

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. CROISOT

Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 217-223

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__217_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS DES COMPLEXES FORTS ET SYMÉTRIQUES DES DEMI-GROUPES;

PAR R. CROISOT.

Introduction. — La lecture de ce travail suppose la connaissance des notions introduites et d'un certain nombre des résultats démontrés par P. Dubreil dans les deux Mémoires suivants : *Contribution à la théorie des demi-groupes*, I ⁽¹⁾ et II ⁽²⁾.

Nous considérons ici, dans un demi-groupe D , un complexe H (supposé non vide) fort et symétrique ⁽³⁾ et étudions quelques propriétés d'un tel complexe liées à l'équivalence principale ⁽⁴⁾ $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$ qui lui correspond.

Nous montrons, en particulier, que le groupoïde quotient F d'un demi-groupe D par l'équivalence principale \mathcal{R} attachée à un complexe H fort, symétrique et net ⁽⁵⁾ est un groupe. Si H , toujours fort et symétrique, est non net, le noyau N ⁽⁶⁾ du groupoïde quotient F , s'il n'est pas vide, est également un groupe.

PROPRIÉTÉ 1. — *Soit, dans un demi-groupe D , un complexe H fort et symétrique. Supposons que H soit contenu dans D^2 et qu'il soit ou bien net ou bien disjoint de son résidu W ⁽⁷⁾. Alors, H est saturé dans D^2 pour l'équivalence principale $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$.*

Soit $h = mn \in H$ et soit $x = ab \equiv h(\mathcal{R})$; il faut établir $x \in H$. Le complexe H étant net ou disjoint de son résidu, il existe $y \in D$ tel que $hy \in H$. De $mn \in H$ et de $mny \in H$, résulte, puisque H est fort (et symétrique), $n \equiv ny(\mathcal{R})$, d'où, \mathcal{R} étant régulière, $h \equiv hy(\mathcal{R})$. Mais, de $x \equiv h(\mathcal{R})$, résulte aussi $xy \equiv hy(\mathcal{R})$ et, par suite, $x \equiv xy(\mathcal{R})$, soit $ab \equiv aby(\mathcal{R})$. On a donc $b \equiv by(\mathcal{R})$, puisque \mathcal{R} est simplifiable dans D si H est net, dans $D - W$ si H est non net et que, dans ce cas,

⁽¹⁾ *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, t. 63, 1941, p. 1-52. Référé DGI.

⁽²⁾ *Rendiconti di Mathematica e delle sue applicazioni*, 1951, p. 183-200. Référé DG II.

⁽³⁾ DG I, p. 9 et 22.

⁽⁴⁾ DG I, p. 7 et 22.

⁽⁵⁾ DG I, p. 8.

⁽⁶⁾ DG I, p. 24.

⁽⁷⁾ DG I, p. 8.

$ab \notin W$ puisque H est disjoint de W . Enfin, de $hy \in H$, on déduit $xy \in H$, soit $aby \in H$, puis $ab \in H$.

COROLLAIRE. — Dans les hypothèses de la propriété 1, le saturé S de H par \mathcal{R} est fort et symétrique ⁽⁸⁾.

On sait, en effet ⁽⁹⁾ que $\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_{S \cap D^2}$ (avec $W_S = W_{S \cap D^2}$, éventuellement) et que S est fort en même temps que $S \cap D^2$.

Or, on a $S \cap D^2 = H$, d'où le corollaire.

Remarque 1. — La propriété 1 et son corollaire cessent d'être exacts si l'on affaiblit les hypothèses de l'une des façons suivantes :

1° H est fort, symétrique, net, mais non contenu dans D^2 .

Exemple 1. — Prenons, pour D , le demi-groupe à quatre éléments a, b, c, d , dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d
a	c	c	d	a
b	c	c	d	a
c	d	d	a	c
d	a	a	c	d

Considérons le complexe $H = \{b, c\}$. Il est fort et net, et symétrique puisque D est abélien. On a $b \notin D^2$.

Les classes modulo \mathcal{R} sont $\{a, b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$. H n'est pas saturé dans D^2 et $S = \{a, b, c\}$ n'est pas fort.

2° H est fort, symétrique, contenu dans D^2 , mais non net et non contenu dans $D - W$ [qu'il soit ou non interdit ⁽¹⁰⁾].

Exemple 2. — D est le demi-groupe à quatre éléments a, b, c, d , dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	b

Soit le complexe $H = \{c\}$ fort, symétrique et contenu dans D^2 , mais non net. On a $W = \{a, c\}$, et les autres classes modulo \mathcal{R} sont $\{b\}$ et $\{d\}$. H n'est pas saturé dans D^2 et $S = W$ n'est pas fort. H est interdit.

⁽⁸⁾ Ce résultat est à rapprocher du théorème 11 de DG I qui montre que, si un complexe fort H est parfait à droite (DG I, p. 14), son saturé S est fort. Remarquons que, dans les hypothèses de la propriété 1, H n'est pas nécessairement parfait (voir ex. 7).

⁽⁹⁾ DG II, p. 4.

⁽¹⁰⁾ DG I, p. 18.

Exemple 3. — D est le demi-groupe à cinq éléments a, b, c, d, e , dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	c	a
c	a	a	a	a	a
d	a	c	a	b	a
e	a	a	a	a	e

Soit le complexe $H = \{c, e\}$ fort, symétrique, non net, contenu dans D^2 . On a $W = \{a, c\}$, et les autres classes modulo \mathcal{R} sont $\{b\}, \{d\}, \{e\}$. H n'est pas saturé dans D^2 et $S = \{a, c, e\}$ n'est pas fort. H coupe à la fois W et $D - W$.

3° Si H est fort, net, contenu dans D^2 , mais non symétrique, on ne peut affirmer qu'il soit saturé dans D^2 pour \mathcal{R}_H ni que son saturé S dans D soit fort.

Exemple 4. — Prenons, pour D, le demi-groupe à huit éléments a, b, c, d, e, f, g, h , dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	c	c	e	e	g	g
b	b	b	d	d	f	f	h	h
c	a	a	c	c	e	e	g	g
d	b	b	d	d	f	f	h	h
e	e	e	g	g	a	a	c	c
f	f	f	h	h	b	b	d	d
g	e	e	g	g	a	a	c	c
h	f	f	h	h	b	b	d	d

On a $D = D^2$. Soit H le complexe $\{a, e, h\}$. Il est fort, net, non symétrique. Les classes modulo \mathcal{R}_H sont $\{a, c, e, g\}, \{b, d\}, \{f, h\}$. Le complexe H n'est pas saturé dans D^2 pour \mathcal{R}_H et son saturé $S = \{a, c, e, f, g, h\}$ n'est pas fort.

Remarque 2. — Dans les hypothèses de la propriété 1, en général, H n'est pas saturé dans D.

Exemple 5. — Soit le demi-groupe D à deux éléments a, b muni de la loi de composition $xy = a$. Le complexe $\{a\}$ satisfait aux hypothèses et n'est pas saturé dans D.

Avant de démontrer les théorèmes 1 et 2, établissons le lemme suivant :

LEMME. — Soit D un demi-groupe possédant un élément s simplifiable ($as = bs$ ou $sa = sb$ entraîne $a = b$) et dans lequel il existe un élément u tel que $us = s$. Alors, u est élément unité bilatère de D.

En effet, pour tout $x \in D$, on a

$$xus = xs, \quad \text{d'où} \quad xu = x,$$

puisque s est simplifiable à droite. En particulier,

$$su = s, \quad \text{d'où} \quad sux = sx \quad \text{et} \quad ux = x$$

pour tout x puisque s est aussi simplifiable à gauche.

Cas particulier. — Dans un semi-groupe, si u et s sont tels que $us = s$, u est élément unité bilatère.

THÉOREME 1. — *Si H est un complexe fort, symétrique et net d'un demi-groupe D , le demi-groupe quotient $F = D/\mathcal{R}$ où \mathcal{R} est l'équivalence principale $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$, est un groupe et le complexe $D^2 \cap H$ (fort, symétrique et net) est parfait et saturé dans D^2 pour \mathcal{R} .*

Le complexe $D^2 \cap H$ est non vide puisque H est net; soit $h_1 = ab \in D^2 \cap H$. H étant net, il existe $x_1 \in D$ tel que $abx_1 = h_1x_1 \in H$. De $abx_1 \in H$ et de $ab \in H$, résulte $bx_1 \equiv b(\mathcal{R})$. Donc, en désignant par B et X_1 respectivement les classes de b et x_1 modulo \mathcal{R} , on a, dans F , $BX_1 = B$.

F étant un semi-groupe ⁽¹¹⁾, $X_1 = E$ est élément unité de F (cas particulier du lemme).

Soit alors h_2 un élément quelconque de $D^2 \cap H$. Le même raisonnement montre qu'il existe $x_2 \in D$ tel que $h_2x_2 \in H$ et que la classe X_2 de x_2 est aussi élément unité de F . D'où $X_2 = X_1 = E$ et $x_2 \equiv x_1(\mathcal{R})$. Par suite, H étant fort, on a $h_2x_1 \in H$ et $h_2 \equiv h_1(\mathcal{R})$. Donc, $D^2 \cap H$ est parfait.

Désignons par K la classe modulo \mathcal{R} constituée par le saturé de $D^2 \cap H$ par \mathcal{R} . Soit X un élément quelconque de F et x un élément de X . H étant net, il existe $y \in D$ tel que $xy \in H \cap D^2 \subseteq K$. Par suite, il existe $Y \in F$ tel que $XY = K$. En particulier, pour tout $A \in F$, il existe A' tel que $(KA)A' = K$, ce qui entraîne $AA' = E$ et montre que F est un groupe.

Enfin, $D^2 \cap H$ est saturé dans D^2 pour \mathcal{R} comme il résulte de la propriété 1.

COROLLAIRE 1. — *Soit D un demi-groupe dans lequel il existe un complexe $H = \{h_i\}_{i \in I}$ tel que $xy \in H$ ait, pour tout x (pour tout y), une solution et une seule en y (en x). Alors, H ne contient qu'un seul élément et D est un groupe.*

En effet, H est un complexe net, fort, symétrique (l'équivalence principale à droite et l'équivalence principale à gauche coïncident avec l'égalité) et l'on a $F \simeq D$. Donc, D est un groupe; par suite, H est contenu dans D^2 et ne contient qu'un seul élément puisqu'il est parfait.

COROLLAIRE 2. — *Si H est un complexe fort et symétrique d'un demi-groupe strict ⁽¹²⁾ D , le demi-groupe quotient $F = D/\mathcal{R}$ est un groupe ⁽¹³⁾.*

En effet, par définition, H est net dans ces hypothèses.

⁽¹¹⁾ DG I, th. 26 a, p. 23.

⁽¹²⁾ DG I, p. 10.

⁽¹³⁾ On peut obtenir le corollaire 2 d'une manière différente qui utilise une propriété intéressante des demi-groupes stricts. On sait qu'un demi-groupe D qui vérifie l'axiome des quotients à droite est strict à droite (DG I, p. 11). La réciproque est vraie quand D est simplifiable d'un côté. En effet, dans ce cas, tout complexe réduit à un seul élément est fort, ce qui entraîne l'existence

COROLLAIRE 3. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe H d'un demi-groupe D soit classe dans une équivalence régulière ρ telle que le demi-groupe quotient D/ρ soit un groupe est que H soit fort, symétrique, net et homogène ⁽¹⁴⁾. Il existe alors une seule équivalence ρ répondant à la question.*

On sait que la condition est nécessaire ⁽¹⁵⁾.

Elle est suffisante d'après le théorème 1.

L'unicité résulte facilement du fait que, dans un groupe, il existe une seule équivalence régulière, l'égalité, admettant une classe réduite à un seul élément.

Remarque. — Dans les hypothèses du théorème 1, le complexe H n'est pas nécessairement parfait comme le montre l'exemple 1.

THÉOREME 2. — *Si H est un complexe fort, symétrique et non net d'un demi-groupe D et si le noyau N du demi-groupe quotient $F = D/\mathcal{R}$, où \mathcal{R} est l'équivalence principale $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$, est non vide, N est un groupe et le complexe $D^2 \cap H$ (fort et symétrique) est parfait et saturé dans D^2 pour \mathcal{R} .*

N étant non vide, H n'est pas interdit. En effet, W désignant le résidu de H , supposons qu'on ait $H \subseteq W$; pour tout $X \in F$, avec $X \neq W$ ⁽¹⁶⁾, choisissons $x \in X$; il existe $y \in D$ tel que $xy \in H$; Y désignant la classe modulo \mathcal{R} qui contient y , on a $Y \neq W$ et $XY = W$, ce qui entraîne $X \notin N$: N serait vide, contrairement à l'hypothèse.

Montrons qu'il existe $U \in N$ tel que $UA = AU = A$ pour tout $A \in F$. Soit $s \in D$ tel que $s \in S \in N$; il existe $t \in D$ tel que $st \in H$; on a $t \notin W$, d'où $st \notin W$, puisque $s \in N$; par suite, il existe $u \in D$ tel que $ust \in H$, ce qui entraîne $us \equiv s(\mathcal{R})$ et, dans F , $US = S$; $S \in N$ étant un élément simplifiable de F , on voit d'après le lemme que U est élément unité de F ; de plus, on a $U \in N$ car $UZ = W$ ou $ZU = W$ entraîne $Z = W$.

Montrons que $H \cap D^2$ est disjoint de W . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, donc qu'il existe $w \in W$ tel que $w = xy \in H$; soit u un élément quelconque de U ; on a $uw \equiv w(\mathcal{R})$, donc $w' = uw \in W$ et l'on ne peut avoir $w' \in H$, ce qui entraînerait $w \notin W$; on a $ux \equiv x(\mathcal{R})$ et de $xy \in H$, résulte $uxy \in H$, soit $w' \in H$, ce qui constitue une contradiction.

Le complexe $H \cap D^2$ est parfait. Soit $h_1 = ab \in D^2 \cap H$; de $h_1 \notin W$, résulte l'existence de $x_1 \in D$ tel que $abx_1 \in H$, d'où $bx_1 \equiv b(\mathcal{R})$ et $bu \equiv bx_1(\mathcal{R})$ pour tout élément $u \in U$; on en déduit $u \equiv x_1(\mathcal{R})$, puisque $b \notin W$, et $x_1 \in U$, d'où $abu = h_1u \in H$; de même, pour $h_2 \in H \cap D^2$, on a $h_2u \in H$ et, par suite, $h_2 \equiv h_1(\mathcal{R})$.

des quotients à droite si D est strict à droite. Il en résulte qu'un demi-groupe qui possède trois des quatre propriétés suivantes : *simplifiable à droite, simplifiable à gauche, strict à droite, strict à gauche* possède la quatrième et est un groupe. Le corollaire 2 se déduit alors du fait que F est un semi-groupe (DG I, th. 26 b, p. 23) et du fait qu'un demi-groupe homomorphe à un demi-groupe strict à droite est strict à droite.

⁽¹⁴⁾ DG I, p. 27.

⁽¹⁵⁾ DG I, th. 29 c, p. 28.

Établissons maintenant que N est un groupe. Soit X un élément quelconque de N , et soit K la classe modulo \mathcal{R} qui contient $H \cap D^2$; on a $KX \neq W$ puisque $X \in N$ et $K \neq W$; donc, il existe $X' \in F$ tel que $KXX' = K = KU \neq W$; on en déduit $XX' = U$; enfin, on a $X' \in N$; en effet, $X'Z = W$ entraîne $XX'Z = UZ = W$, d'où $Z = W$; de même, $ZX' = W$ entraîne $ZX'X = ZU = W$, d'où $Z = W$ (car on a aussi $XX'X = UX = XU \neq W$, d'où $X'X = U$).

Finalement, $D^2 \cap H$ est saturé dans D^3 d'après la propriété 1.

COROLLAIRE. — Si H est un complexe fort, symétrique et non net d'un demi-groupe D ⁽¹⁸⁾, et si le résidu W de H est premier ⁽¹⁹⁾, N est non vide et F est un pseudo-groupe ⁽¹⁷⁾.

Remarque 1. — Dans les hypothèses du théorème 2, la classe K modulo \mathcal{R} qui contient $D^2 \cap H$ n'est pas nécessairement un élément de N .

Exemple 6. — Soit le demi-groupe D à trois éléments a, b, c , dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

Considérons le complexe $H = \{b\}$. Il est fort, symétrique, non net et contenu dans D^2 . Les classes modulo \mathcal{R} sont $W = \{c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$. On a $F \simeq D$ et $N = \{a\}$. $K = \{b\}$ n'est pas élément de N . Le même exemple montre que N peut être non vide sans que W soit premier.

Remarque 2. — H étant toujours fort et symétrique, si N est vide, les exemples 2 et 3 montrent que le complexe $D^2 \cap H$ peut être interdit ou couper à la fois W et $D - W$. Il peut aussi être disjoint de W .

Exemple 7. — Prenons pour D le demi-groupe à trois éléments a, b, c , dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

Considérons le complexe $H = \{a, b\}$. Il est fort symétrique, non net, contenu dans D^2 . Les classes modulo \mathcal{R} sont $W = \{c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$. On a $F \simeq D$, N est vide et H est disjoint de W .

⁽¹⁸⁾ DG I, p. 11.

⁽¹⁹⁾ DG I, p. 25. On obtient ce corollaire un peu plus simplement en adaptant la démonstration du théorème 1 à ce cas.

Dans l'exemple 7, bien que disjoint de son résidu, le complexe H n'est pas parfait. Ce fait est général en vertu de la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 2. — *H étant un complexe fort et symétrique d'un demi-groupe D , pour que N soit non vide, il faut et il suffit que F possède un élément unité, il faut et il suffit que $D^2 \cap H$ soit parfait.*

Ces conditions sont nécessaires d'après le théorème 2 et la première d'entre elles est évidemment suffisante.

Supposons $D^2 \cap H$ parfait et soit K la classe modulo \mathcal{R} qui contient $D^2 \cap H$. Soit $X \in F$, avec $X \neq W$ (un tel élément existe certainement puisque $D^2 \cap H$ est parfait). Il existe $Y \in F$ tel que $XY = K \neq W$. Il existe $U \in F$ tel que $UK = K$. On en déduit $UXY = XY \neq W$, d'où $UX = X$. Cette relation est également valable pour $X = W$. Donc, F possède un élément unité à gauche, et de la même façon un élément unité à droite, par suite un élément unité bilatère et N est non vide.

Considérons maintenant le sous-ensemble N' de F constitué par les éléments X tels que $AXB = W$ entraîne $A = W$ ou $B = W$. On a évidemment $N' \subseteq N$. Si W est premier, on a $N' = N$. Sinon, on peut trouver $A \& B \in F$ tels que $AB = W$, avec $A \neq W$, $B \neq W$; supposons N non vide et soit $X \in N$, X' l'inverse de X dans N ; on a $AXX'B = W$, avec $A \neq W$ et $X'B \neq W$ (puisque $B \neq W$ et $X' \in N$); par suite, $X \notin N'$ et N' est vide. On a donc démontré la

PROPRIÉTÉ 3. — *H étant un complexe fort, symétrique et non net ⁽¹⁸⁾ d'un demi-groupe D , N' est non vide si et seulement si W est premier. C'est alors un groupe confondu avec le noyau $N = F - \{W\}$.*

(18) On suppose naturellement que $H \cap D^2$ n'est pas vide, afin d'avoir $F \neq \{W\}$.