ARMAND BOREL

Les fonction automorphes de plusieurs variables complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 167-182

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__167_0>

LES FONCTIONS AUTOMORPHES DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES (¹);

PAR ARMAND BOREL.

La théorie des fonctions automorphes de plusieurs variables complexes a son origine dans l'étude des fonctions $2n$-périodiques et dans les travaux de Poincaré sur les fonctions automorphes d'une variable (*Œuvres complètes*, t. II). Abordée tout d'abord par Picard et Fubini, elle a été développée ensuite par divers auteurs, notamment par Giraud, Myrberg, Hua, Siegel.

Soit D un domaine de l'espace de n variables complexes C^n que nous supposerons toujours univalent, G un groupe d'automorphismes analytiques de D; on appelle fonction automorphe (relativement à G) une fonction uniforme méromorphe dans D, invariante par les opérations de G; il est naturel de supposer G discontinu, c'est-à-dire que les transformés d'un point quelconque de D par G n'ont pas de point d'accumulation dans D, G est alors dénombrable; en fait, il convient souvent de restreindre la notion de discontinuité et, en particulier, d'exiger la discontinuité propre de G (par exemple, tout point possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de ses transformés); cela sera indiqué au passage s'il y a lieu.

Dans l'édification d'une théorie des fonctions automorphes, deux problèmes fondamentaux se présentent immédiatement : celui de *l'existence* de fonctions automorphes non constantes, et celui des *relations algébriques* qui peuvent lier ces fonctions; c'est principalement d'eux qu'il va être question ci-dessous.

I. — Problèmes d'existence.

Il s'agit de savoir quelles conditions il faut imposer à D et à G pour qu'il y ait des fonctions automorphes non constantes ou même plus précisément pour qu'il y ait n fonctions automorphes analytiquement indépendantes. Cette question se subordonne à un autre problème : trouver des fonctions non constantes $f(z)$, $(z \in D)$, telles que $\frac{f(g.z)}{f(z)}$ soit une fonction d'un type déterminé pour $g \in G$ quelconque (ex. : fonctions thêta, séries de Poincaré, *cf.* infra), les fonctions automorphes étant alors obtenues comme quotients de deux fonctions variant suivant la même

(¹) Rapport demandé par le secrétariat de la Société Mathématique de France (Note des Secrétaires).

loi. Dans certains cas, dont nous dirons quelques mots au paragraphe III, on est amené à imposer des conditions sur le comportement des fonctions envisagées au voisinage de certains points frontières de D; ici, nous parlerons des deux principaux cas où le problème d'existence a été traité sans conditions de cette nature, et qui sont : *a*. D borné; *b*. $D = C^n$, $G = Z^{2n}$.

a. D *borné*. — Les fonctions définissant les transformations de G sont uniformément bornées, donc également continues; il en résulte aisément que si G est discontinu, il est proprement discontinu et que, de plus, un compact $K \subset D$ ne rencontre qu'un nombre fini de ses transformés $g(K)$ par G, [$g(K)$ et $g(K')$ étant comptés chacun une fois si $g \neq g'$).

Soit $J_g(z)$ le valeur en z du jacobien de la transformation $z \to g z$; on appelle *forme automorphe de poids m* une fonction holomorphe dans D qui vérifie

$$f(g.z) = J_g(z)^{-m} f(z) \qquad (z \in D, g \in G). \tag{1}$$

La construction de formes automorphes repose sur le

Lemme 1. — *La série* $\sum |J_g(z)|^2$ *converge uniformément sur tout compact.*

Esquisse de démonstration. — Soit K un compact de D, $2r$ sa distance à $C^n - D$ et $C(r, a)$ un polydisque de rayon r et de centre $a \in K$. On voit facilement que

$$|J_g(a)|^2 (\pi r^2)^n \leq \text{Vol. } g(C(r, a));$$

K ne rencontre qu'un nombre fini, disons t, de ses transformés par G, par conséquent chacun des ensembles $g(C(r, a))$ n'en rencontre qu'au plus t autres et la somme de leurs volumes est $\leq t$ Vol. (D), d'où la convergence en a de la série donnée.

Soit encore L compact, contenant K, tel que Vol. (D-L) $\leq \varepsilon$. Il ne rencontre qu'un nombre fini de tnsformés de K, disons $g_1(K), \ldots, g_s(K)$ et si l'on désigne par $\sum'$ une somme sur les éléments de G différents de $g_1, \ldots g_s$, on a

$$\sum' |J_g(z)|^2 (\pi r^2)^n \leq \sum' \text{Vol. } g(C(r, z)) \leq t \,\text{Vol. (D-L)} \leq t\,\varepsilon.$$

pour tout $z \in K$, d'où la convergence uniforme sur K.

Proposition 1. — *Si f est une fonction holomorphe bornée dans* D, *la série*

$$\sum_{g \in G} f(g.z) J_g(z)^m$$

est pour m entier ≥ 2 *absolument et uniformément convergente sur tout compact, et représente une forme automorphe de poids m.*

Les formes automorphes ainsi obtenues sont les *séries de Poincaré*; ce dernier les a introduites pour $n = 1$ sous le nom de séries thêtafuchsiennes.

Théorème 1. — *Soit* G *discontinu sur un domaine borné* D. *Alors il existe n fonctions automorphes dans* D *analytiquement indépendantes.*

Esquisse de démonstration. — Les transformations g pour lesquelles $|J_g(z)| = 1$ pour tout $z \in D$ forment un groupe H, qui est fini d'après le lemme 1; nous en noterons les éléments $h_1 = e, h_2, \ldots, h_k$. On montre tout d'abord l'existence d'un point $a \in D$ et d'un voisinage M de a tels que

$$|J_g(z)| \leq q < 1 \qquad (z \in M,\ g \in G),$$
$$h_i.a \neq a \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Si $F(z, mk)$ désigne la série de Poincaré de poids mk associée à une fonction holomorphe bornée $f(z)$ par la proposition 1, il est clair que

$$\lim_{m \to \infty} F(z, mk) = f(h_1.z) + \ldots + f(h_k.z)$$

uniformément pour $z \in M$; en particulier, si $f(z) = \frac{1}{k}$, on a $\lim F(z, mk) = 1$ dans M et $F(z, mk)$ n'est pas identiquement nulle pour m assez grand.

Prenons a comme nouvelle origine et soit $P(z)$ un polynome vérifiant

$$P(0) = 1, \ P(h_i.0) = 0 \qquad (i = 2, \ldots, k),$$

posons

$$q_i(z) = z_i P^2(z) \qquad (z_i\text{-ième coordonnée de } C^n;\ i = 1, \ldots, n);$$

notons $Q_i(z, mk)$ la série de Poincaré associée à $q_i (i = 1, \ldots, n)$, $Q_0(z, mk)$ la série correspondant à $\frac{1}{k}$, et considérons les fonctions automorphes

$$F_i(z, m) = \frac{Q_i(z, mk)}{Q_0(z, mk)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

On a

$$\lim_{m \to \infty} F_i(z, m) = q_i(h_1.z) + \ldots + q_i(h_k.z)$$

uniformément dans M et l'on voit aisément que le jacobien de ces limites vaut 1 à l'origine; par conséquent, si m est assez grand, le jacobien de $F_1, \ldots, F_n$ est $\neq 0$ à l'origine et ces fonctions sont analytiquement indépendantes.

Remarques. — 1° La démonstration précédente montre plus précisément que pour tout m assez grand il existe $n + 1$ formes automorphes $Q_0, \ldots, Q_n$ de poids mk telles que les quotients $Q_i/Q_0, (i = 1, \ldots, n)$, soient analytiquement indépendants.

2° Pour les démonstrations détaillées des résultats précédents, *voir* [26], paragraphes 38 et 39 dont nous avons du reste suivi l'exposé, mais où cependant l'hypothèse D/G compact ([2]) est superflue; quand elle est réalisée, D jouit d'une propriété supplémentaire intéressante ([26], § 40).

Proposition 2. — *Si le domaine borné* D *possède un groupe discontinu* G *d'automorphismes tel que* D/G *soit compact, c'est un domaine d'holomorphie.*

Plus précisément; on montre que D est *domaine d'holomorphie pour toute forme automorphe* $\neq 0$ *de poids* $m \geq 2$; si, en effet, $f(z)$ est une telle forme, on

---

([2]) D/G désigne comme d'habitude l'espace quotient de D par la relation d'équivalence qu'y définit G; il est séparé si D est borné, G discontinu; la condition D/G compact équivaut à : G possède un domaine fondamental relativement compact dans D.

établit sans difficulté que tout point frontière q de D est point d'accumulation d'une suite de points $g_i.a$, où $f(a) \neq 0$; comme $f(g.a) = f(a)\,J_g(a)^{-m}$, le lemme 1 montre que $f(g_i.a)$ tend vers l'infini avec i et ainsi $f(z)$ n'est pas bornée au voisinage de q.

Si D est l'intérieur du cercle unité, $(n = 1)$, il est aussi domaine de méromorphie de toute fonction automorphe non constante, car tout point frontière est point d'accumulation de transformés d'un domaine fondamental de G (Poincaré). On ne sait pas si la proposition 2 admet un complément analogue pour $n > 1$.

D'après un résultat connu de H. Cartan-P. Thullen, il suit de la proposition 2 que D est réunion d'une suite croissante de polyèdres analytiques; ici cela peut aussi se voir directement, en définissant les polyèdres analytiques à l'aide des jacobiens $J_g(z)$ (*voir* [26], § 37).

b. $D = C^n$, $G = Z^{2n}$ [3] *à* $2n$ *générateurs fortement indépendants.* — Par générateurs fortement indépendants, on entend des éléments linéairement indépendants en tant que vecteurs de R^{2n}, ainsi C^n/Z^{2n} est un *tore complexe* à n dimensions complexes; les fonctions automorphes sont donc ici les fonctions méromorphes $2n$-périodiques, dites encore fonctions abéliennes, dont la théorie a été édifiée par Riemann, Weierstrass, Jacobi, Frobenius, etc.; je me bornerai à rappeler ici les principaux résultats relatifs à l'existence (pour les démonstrations, *voir* [26], chap. IV à VIII, ou [4], exp. II à V).

On appelle *fonction thêta*, ou fonction intermédiaire, une fonction holomorphe ou méromorphe telle que

$$f(g.z) = f(z)\,e^{v(z)} \qquad (g \in G),$$

où $v(z)$ est une forme C-linéaire, non nécessairement homogène, dépendant de g.

On montre en premier lieu que toute fonction abélienne est le quotient de deux fonctions thêta holomorphes premières entre elles. L'étude des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de fonctions thêta non triviales, c'est-à-dire possédant des zéros, conduit finalement au

Théorème 2. — *Pour qu'il existe n fonctions abéliennes analytiquement indépendantes, il faut et il suffit qu'il y ait sur* C^n *une forme* R*-bilinéaire alternée, prenant des valeurs entières sur* Z^{2n} *qui soit la partie imaginaire d'une forme hermitienne définie négative.*

Si cette condition est vérifiée, on dit que le tore complexe C^n/Z^{2n} est *non dégénéré.* Les fonctions abéliennes sont bien entendu, exactement les fonctions méromorphes uniformes sur le tore C^n/Z^{2n}; rappelons que pour $n > 1$ il existe des tores complexes sur lesquels toutes les fonctions méromorphes uniformes sont constantes ([26], § 31).

---

[3] Z^{2n} désigne un groupe abélien libre à $2n$ générateurs, identifié à un sous-groupe de R^{2n} (muni de l'addition vectorielle).

II. — Relations algébriques dans le cas D d'holomorphie, D/G compact.

THÉORÈME 3. — *Soit* G *un groupe d'automorphismes* (*discontinu ou non*) *d'un domaine d'holomorphie* D *tel que* D/G *soit compact.*

Si $f_0, \ldots, f_n$ *sont* $n+1$ *fonctions automorphes, il existe entre elles une relation algébrique* $P(f_0, \ldots, f_n) = 0$ *non triviale dont le degré* s *en* f_0 *admet une borne supérieure finie ne dépendant que de* $f_1, \ldots, f_n$.

Ce théorème s'applique, en particulier, aux fonctions abéliennes ([26], th. 14, second proof, § 29) et, compte tenu de la proposition 2, au cas D borné, D/G compact ([26], th. 19, p. 137). En fait, le théorème 3 ne semble être énoncé nulle part, mais la démonstration du théorème 19 de [26] vaut sans changement pour le théorème 3 ci-dessus; du reste, nous allons l'indiquer dans un cas particulier qui ne se distingue du cas général que par des simplifications techniques.

D/G étant compact, on peut trouver un compact K intérieur à D tel que tout point $z \in D$ soit intérieur à l'un des transformés de K par G; nous noterons $6d$ la distance de K à C^n-D et L l'ensemble des points de C^n distants d'au plus $3d$ de K; c'est un compact de D et il existe un nombre fini d'éléments de G, soit $g_1 = e, g_2, \ldots, g_u$ tels que $L \subset g_1(K) \cup \ldots \cup g_u(K)$. Soient encore Q un polyèdre analytique de D contenant K et P un polyèdre analytique de D contenant $g_1(Q) \cup \ldots \cup g_u(Q)$.

De la théorie des idéaux de fonctions analytiques de H. Cartan (¹), on déduit en particulier ceci : Soient $f(z)$ une fonction méromorphe dans un voisinage de P, f_x la restriction de $f(z)$ en un point $x \in P$, $I(f_x)$ l'idéal ponctuel des fonctions h_x holomorphes en x telles que $h_x . f_x$ soit holomorphe en x. Alors il existe un et un seul idéal $I(f, P)$ de fonctions holomorphes dans P dont la restriction à x soit $I(f_x)$ pour tout $x \in P$; cet idéal a un nombre fini de générateurs et est aussi l'idéal des fonctions $h(z)$ holomorphes dans P telles que $h(z).f(z)$ soit holomorphe dans P; les restrictions à Q des éléments de $I(f, P)$ engendrent évidemment l'idéal analogue $I(f, Q)$.

Nous supposerons ici que les idéaux $I(f_0, P), \ldots, I(f_n, P)$ *sont principaux*, ce qui revient à admettre que les fonctions f_i, sont dans P quotients de deux fonctions holomorphes premières entre elles; c'est là l'hypothèse simplificatrice à laquelle nous faisions allusion plus haut.

Soit $h_i(z)$ un générateur de $I(f_i, P)$ et g_j un des éléments $g_1, \ldots, g_u$; la fonction

$$f_i(z).h_i(g_j.z) = f_i(g_j.z).h_i(g_j.z)$$

est holomorphe dans Q, donc $h_i(g_j.z) \in I(f_i, Q)$, ce qui s'écrit

$$(2) \qquad h_i(g_j.z) = v_{ij}(z).h_i(z) \qquad (z \in Q,\ v_{ij} \text{ holomorphe dans } Q).$$

Nous considérerons maintenant une combinaison linéaire $f(z)$ à coefficients cons-

(¹) H. CARTAN, *Ann. Ec. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. 61, 1944, p. 149-197 et *Bull. Soc. Math. France*, t. 78, 1950, p. 29-64.

tants des $(s+1)(t+1)^n$ monomes $f_0^{a_0} f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n}$ $(0 \leqq a_0 \leqq s,\ 0 \leqq a_i \leqq t,\ i \geqq 1)$ et poserons $h = h_0^s h_1^t \dots h_n^t$; le produit $f.h$ est holomorphe dans P et pour $z \in K$, on a

$$f(g_j.z).h(g_j.z) = f(z)\,h(z)\,v_{0j}^s(z)\,v_{1j}^t(z) \dots v_{nj}^t(z).$$

Soient M_0, M, μ les maxima sur K des fonctions $v_{0j}(z)$, resp. des fonctions $v_{ij}(z)$ $(i \geqq 1, j = 1, \dots, u)$, resp. de $h(z)f(z)$. On a donc

$$(3) \qquad |f(g_j.z)\,h(g_j.z)| \leqq \mu M_0^s\, M^{tn} \qquad (z \in K, j = 1, \dots, u).$$

On peut, d'autre part, trouver sur K un nombre fini de points $k_1, \dots, k_q$ en lesquels $f_0, f_1, \dots, f_n$ sont holomorphes et tels que tout point de K soit distant d'au plus d de l'un des k_i au moins. Soient, pour s et r provisoirement fixés, t l'entier tel que

$$(4) \qquad (s+1)t^n \leqq \binom{n+r}{r} q < (s+1)(t+1)^n$$

$\binom{n+r}{r}$ est le nombre des dérivées partielles d'ordres $\leqq r$ d'une fonction de $z_1, \dots, z_n$; on peut donc supposer que la fonction $f(z)$ examinée plus haut est une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls des $(s+1)(t+1)^n$ monomes $f_0^{a_0} f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n}$ qui s'annule ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordres $\leqq r$ aux points $k_1, \dots, k_q$.

Nous nous proposons maintenant de montrer que si s est plus grand qu'une constante déterminée par $f_1, \dots, f_n$, la fonction f est forcément identiquement nulle, ce qui établira le théorème.

Posons $\Phi(z) = f(z)\,h(z)$; si $f(z) \not\equiv 0$, alors $\Phi(z) \not\equiv 0$ et, après multiplication par une constante non nulle, on peut supposer que $\Phi(z)$ a sur K un maximum égal à 1. Soient b un point de K où ce maximum est atteint, k un des points k_i distants d'au plus d de b et λ une variable complexe auxiliaire. La fonction $\Psi(\lambda) = \dfrac{\Phi[k + \lambda(b-k)]}{\lambda^{r+1}}$ est holomorphe au voisinage de $\lambda = 0$ et même pour $|\lambda| \leqq 3$, car pour ces valeurs de λ, le point $k + \lambda(b-k)$ est dans L, donc dans P; puisque $\Psi(1) = \Phi(b) = 1$, il existe un λ_0 de module égal au nombre e tel que

$$|\Phi[k + \lambda_0(b-k)]| \geqq e^{r+1}$$

et comme $k + \lambda_0(b-k)$ fait partie de L, on peut trouver g_j et $z_0 \in K$ tels que $k + \lambda_0(b-k) = g_j.z_0$; ainsi nous obtenons

$$(5) \qquad |f(g_j.z_0)\,h(g_j.z_0)| \geqq e^{r+1}, \qquad (z_0 \in K)$$

ce qui, compte tenu de (3) et de $\mu = 1$, donne

$$(6) \qquad r + 1 \leqq s \log M_0 + tn \log M;$$

mais, d'autre part, d'après (4),

$$(r+1)^n \geqq \left(\frac{r}{1}+1\right)\left(\frac{r}{2}+1\right) \quad \dots \quad \left(\frac{r}{n}+1\right) = \binom{n+r}{n} = \binom{n+r}{r} \geqq \frac{s+1}{q}\, t^n,$$

d'où

$$\left(\frac{s+1}{q}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq s \log M_0 + nt \log M.$$

Si nous prenons s tel que $s+1 > q(n \log M)^n$, borne déterminée par $f_1, \ldots, f_n$, on arrive évidemment à une absurdité pour t assez grand, par conséquent on a $f(z) \equiv 0$. C. Q. F. D.

En combinant les théorèmes 1, 2, 3, on obtient le

THÉORÈME 4. — *Les fonctions automorphes dans* D *relativement au groupe discontinu* G *forment un corps algébrique de fonctions à n indéterminées dans les deux cas suivants : a.* D *borné,* D/G *compact*; *b.* $D = C^n$, $G = Z^{2n}$, D/G *étant un tore complexe non dégénéré.*

Remarque sur le cas D *borné,* D/G *compact.* — Si D est borné, on déduit du théorème 3 que $n+2$ formes automorphes de même poids sont algébriquement liées et du théorème 4 que toute fonction automorphe est quotient de deux polynomes isobares de même poids en $n+2$ formes automorphes fixes liées par une relation isobare non triviale ([26], th. 20).

Inversement, on peut parvenir au théorème 3 en étudiant tout d'abord les formes automorphes; on utilise alors la

PROPOSITION 3. — *Soient* D *borné,* D/G *compact,* d_m *la dimension de l'espace vectoriel sur* C *des formes automorphes de poids m. Alors,* $d_m \leqq Am^n$, *où* A *est une constante ne dépendant que de n.*

Cette proposition est due à M Hervé [9]; auparavant, elle avait été obtenue dans des domaines particuliers et pour une catégorie un peu plus générale de fonctions par Siegel [25] et Hua [12]. Si $n = 2$, Hervé [10] a, de plus, montré que $\frac{d_m}{m^2}$ a une limite finie quand $m \to \infty$.

De la proposition 3, on tire par un raisonnement de Siegel [25] que $n+2$ formes automorphes de poids m assez grand sont algébriquement dépendantes.

III. — Existence et relations quand D/G n'est pas compact.

Le problème des relations s'est avéré beaucoup plus difficile quand D/G n'est pas compact et n'a pu jusqu'à présent être traité que dans les cas des fonctions modulaires et des fonctions invariantes par certains groupes hyperabéliens, auxquels s'ajoutera peut-être celui des fonctions « hermitiennes modulaires » une fois paru le Mémoire IV de la série [2]. Nous verrons que pour avoir un théorème de relations satisfaisant, on est amené à imposer des conditions supplémentaires aux fonctions automorphes considérées, ce qui posera un nouveau problème d'existence, non résolu par le théorème 1, bien que les domaines D soient équivalents à des domaines bornés.

Le *groupe modulaire de degré p* est le groupe des $2p \times 2p$ matrices à coefficients entiers rationnels faisant partie du groupe symplectique réel à $2p$ variables; ce dernier est le groupe des $2p \times 2p$ matrices réelles S vérifiant

$$S'JS = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix} \quad (E_p = \text{matrice identité}).$$

Il opère sur le « demi-plan généralisé », domaine de C^n, $n = \frac{p(p+1)}{2}$, qui est l'espaces des $p \times p$ matrices symétriques à partie imaginaire définie positive; S agit par

$$(7) \qquad Z \to S(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Le quotient D/G n'est pas compact; Siegel a construit un domaine fondamental F_p de G et montré notamment qu'il était limité par un nombre fini de surfaces algébriques ([23], § 2).

Considérons tout d'abord le cas $n = p = 1$; le domaine fondamental F_1 est alors l'ensemble des points $|Re(z)| \leq \frac{1}{2}$, $z\bar{z} \geq 1$, et possède un sommet parabolique; d'autre part, deux fonctions invariantes par G ne sont pas forcément algébriquement liées comme le montre l'exemple de $J(z)$ et $\exp[J(z)]$, où $J(z)$ est l'invariant modulaire classique; mais convenons d'appeler *fonction modulaire* toute fonction méromorphe invariante par G, qui tend vers une limite (finie ou non) bien déterminée quelle que soit la manière dont $z \to \infty$ en restant dans F_1. On peut alors établir (ce qui est dû à Poincaré) que deux fonctions modulaires sont algébriquement dépendantes, en fait qu'elles sont même fonctions rationnelles de $J(z)$, elles sont donc tout comme $J(z)$, quotients de deux formes automorphes de même poids, bornées dans F_1.

C'est cette dernière propriété qui sera prise comme définition pour $n > 1$; on appelle *forme modulaire* de poids k (k entier pair), une fonction holomorphe dans D, bornée dans F_p, vérifiant

$$(8) \qquad \tau(Z_1) = |CZ + D|^k \, \tau(Z) \qquad (|CZ + D| = \text{déterminant de } CZ + D$$

pour toute substitution $Z_1 = S(Z)$, $S \in G$, donnée par (7), et *fonction modulaire* tout quotient de deux formes modulaires de même poids.

Une forme modulaire est périodique de période 1 en les coefficients z_{ij} de Z, elle admet un développement de Fourier convergent que l'on écrira

$$(9) \qquad \tau(Z) = \Sigma_T \, c(T) \, e^{2\pi i \operatorname{Tr}(TZ)},$$

Tr(TZ) est la trace de TZ; *a priori*, la somme est étendue sur toutes les matrices symétriques $T = (t_{jk})$ demi-entières, c'est-à-dire dans lesquelles t_{jj} et $2t_{jk}$ ($j \neq k$, j, $k = 1, \ldots, p$), sont entiers rationnels; en fait, on a $c(T) = 0$ si $T < 0$ et la somme ne porte effectivement que sur les matrices $T \geq 0$ ([23], p. 635).

Une forme modulaire est nulle si $k < 0$, constante si $k = 0$; pour établir l'existence de formes modulaires $\neq 0$ de poids $k > 0$, on utilise les *séries d'Eisenstein*

$$(10) \qquad \Psi_k(Z) = \sum\nolimits^{*} |CZ + D|^{-k},$$

$\sum^*$ désigne une somme dans laquelle figure exactement un représentant (quelconque) de chaque classe de restes à droite de G suivant H, où H est le sous-groupe des matrices S pour lesquelles $C = 0$.

Si $k > n+1$, la série $c\Psi_k(Z)$ converge absolument (Braun [1]) et uniformément sur tout compact, et représente une forme modulaire de poids k. De plus, on peut trouver $n+1$ séries d'Eisenstein algébriquement indépendantes ([23, § 5]); le point essentiel de la démonstration consiste à montrer que les fonctions modulaires $f_s(Z) = \frac{\Psi_{su}}{\Psi_u^s}$ ($u > n+1$ entier pair fixé, $s = 1, 2, \ldots$) *grosso modo* « séparent » les points intérieurs de F_p; de façon précise, si Z_1 et Z_2 sont intérieurs à F_p et si Z_1 ne fait pas partie d'un certain sous-ensemble Q, qui est réunion dénombrable de surfaces algébriques, on ne peut avoir $f_s(Z_1) = f_s(Z_2)$ pour tout s. Si maintenant la famille $\{f_s(Z)\}$ ne contient pas n fonctions algébriquement indépendantes, on prouve sans difficulté l'existence d'un point Z_1 intérieur à $F_p(Z_1 \in Q)$, et d'une courbe $\mathcal{C}$ passant par Z_1 telle que $f_s(Z) = f_s(Z_1)$ pour tout s et pour tout $Z \in \mathcal{C}$, d'où une contradiction.

Enfin, Siegel ([23], § 4) a montré que $n+2$ formes modulaires $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n+1}$ sont toujours liées par une relation algébrique isobare non triviale, dont le degré en τ_0 a une borne supérieure finie ne dépendant que de $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n+1}$. La démonstration repose principalement sur le fait qu'une forme modulaire développée en série (9) est identiquement nulle si certains coefficients $c(T)$, en nombre fini, sont nuls; on montre ensuite que si k est assez grand, ce nombre est plus petit que celui des monomes de poids k en $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n+1}$; on peut donc en former une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui est identiquement nulle.

De ces résultats, on tire le

Théorème 5. — *Les fonctions modulaires de degré p forment un corps algébrique de fonctions à* $n = \frac{p(p+1)}{2}$ *indéterminées.*

Récemment, H. Maass [18] a étendu à n quelconque des méthodes et résultats de H. Petersson sur les fonctions modulaires d'une variable (*voir*, notamment, *Jahresbericht der D. M. V.*, t. 49, 1939, p. 49-75; *Math. Annalen*, t. 117, 1940-1941, p. 453-537). Il part pour cela des séries

$$\Psi_k(Z,T) = \sum^* e^{2\pi i \operatorname{Tr}[TS(Z)]} \, |CZ + D|^{-k} \tag{11}$$

(T, matrice symétrique ≥ 0 demi-entière fixée); il montre qu'une telle série converge absolument et uniformément sur tout compact si

$$k > \operatorname{Min}(2n, n+1+\operatorname{rang} T)$$

et représente une forme modulaire de poids k; il établit ensuite notamment un théorème « de représentation » : *Toute forme modulaire de poids* $k > 2n+1$ *est combinaison linéaire de séries* [11].

On appelle groupe *hyperabélien* un sous-groupe du produit de n groupes homographiques à une variable, à coefficients réels, opérant de façon discontinue sur le produit topologique de n demi-plans $I(z_i) > 0$; ces groupes et leurs fonctions automorphes ont été envisagés tout d'abord par Picard pour $n = 2$. Un cas bien connu est celui du groupe modulaire de Hilbert, étudié par Blumenthal *Math. Annalen*, t. **56**, 1903, p. 509-548; t. **58**, 1904, p. 497-527) et, plus tard, notamment par H. Maass [**15**] [**16**], [**17**]. Rappelons-en la définition : Soit K un corps algébrique totalement réel de degré n, $K = K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ ses conjugués. Le groupe modulaire est celui des transformations

$$(12) \qquad (z_1, \ldots, z_n) \to \left(\frac{a^{(1)}z_1 + b^{(1)}}{c^{(1)}z_1 + d^{(1)}}\right), \quad \ldots \quad \left(\frac{a^{(n)}z_n + d^{(n)}}{c^{(n)}z_n + d^{(n)}}\right),$$

où $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $c^{(1)}$, $d^{(1)}$, sont des entiers de K tels que $a^{(1)}d^{(1)} - b^{(1)}c^{(1)}$ soit une unité totalement positive, et $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $d^{(i)}$ leurs conjugués.

L'objet de [**16**] est l'examen d'une classe plus générale de groupes hyperabéliens. Les formes et fonctions automorphes considérées ont des définitions analogues à celles des formes et fonctions modulaires, et moyennant des hypothèses convenables sur le domaine fondamental de G (en gros, un nombre fini de sommets paraboliques), l'auteur montre que les fonctions automorphes forment un corps algébrique de fonctions à n indéterminées. Il obtient aussi un théorème de représentation des formes automorphes à l'aide de séries d'un type déterminé. L'existence de formes automorphes est également obtenue à l'aide de séries d'Eisenstein, dont la convergence avait été étudiée par Kloosterman [**14**] dans le cas du groupe modulaire de Hilbert et de certains de ses sous-groupes ayant un index fini.

Le groupe *hermitien modulaire* de degré p introduit par H. Braun [**2**] est le groupe des $2p \times 2p$ matrices vérifiant

$$(13) \qquad \bar{S}'JS = J, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}$$

dont les coefficients appartiennent à un corps quadratique imaginaire donné; il opère par (7) sur un domaine de C^{p^2}, l'espace des $p \times p$ matrices Z telles que $i(\bar{Z}' - Z)$ soit hermitienne définie positive. Des séries d'Eisenstein, dont la convergence est examinée dans [**2**], partie **1**, permettent de montrer l'existence de formes hermitiennes modulaires non constantes ; la définition de ces formes est analogue à celle des formes modulaires.

Remarques. — Pour $n = 1$, on doit à Poincaré un théorème de relations algébriques dans le cas général où le domaine fondamental de G est un polygone à un nombre fini de côtés, possédant au plus des sommets sur la frontière, D étant le demi-plan supérieur. Les fonctions automorphes auxquelles il s'applique sont celles qui ont une limite (finie ou non) quand z tend vers un sommet du domaine fondamental en restant dans ce domaine, limite ne dépendant que de $f(z)$ et du sommet. Poincaré a montré que deux telles fonctions sont algébriquement liées.

Ce résultat n'a pas encore été généralisé. En fait le problème se pose même dans le cas modulaire, malgré le théorème **5**. En effet, la définition précédente s'applique au cas modulaire, c'est même du reste de cette façon que nous avons tout d'abord défini les fonctions modulaires au début de ce paragraphe. On peut l'étendre à n quelconque et elle paraît, *a priori* en tout cas, plus générale que celle que nous avons adoptée (quotient de formes modulaires); mais on ne sait pas si elle est effectivement plus générale et, en fait, on ne connaît pas de théorèmes de relations algébriques pour les fonctions modulaires en ce sens large ([**26**], p. 198).

IV. — Les domaines bornés symétriques.

Les résultats généraux des paragraphes précédents montrent qu'il y aurait grand intérêt à connaître les groupes discontinus d'automorphismes des domaines bornés.

On sait que le groupe $\mathcal{A}(D)$ de tous les automorphismes d'un domaine borné D, muni de la topologie de la convergence compacte, est de Lie ([5]). De plus, le sous-groupe $\mathcal{H}_z$ des transformations laissant fixe un point $z \in D$, le « groupe d'isotropie » de z est compact; plus généralement, étant donnés un point z et un compact K de D, l'ensemble des automorphismes de D qui envoient z dans K est un compact de $\mathcal{A}(D)$. Il en résulte évidemment que *les groupes discontinus d'automorphismes d'un domaine borné* D *sont exactement les sous-groupes discrets du groupe* $\mathcal{A}(D)$ *de tous ses automorphismes*, résultat que l'on trouve fréquemment démontré dans des cas particuliers. Il est important, car il ramène un problème de groupes de transformations, à savoir la détermination des groupes discontinus d'automorphismes de D, à un problème de groupes de Lie abstraits : détermination des sous-groupes discrets de $\mathcal{A}(D)$.

On ne possède actuellement qu'assez peu de renseignements sur $\mathcal{A}(D)$ et, en particulier, on ne sait pas caractériser les domaines pour lesquels il contient une infinité d'éléments. Le cas le mieux étudié pour l'instant est celui où $\mathcal{A}(D)$ est *transitif*, autrement dit où D est un *domaine borné homogène*, il est alors homéomorphe au quotient $\mathcal{A}(D)/\mathcal{H}_z$.

Un domaine borné ou plus généralement une variété analytique complexe V est dite *symétrique* si tout point $z \in V$ est point fixe isolé d'un automorphisme involutif de V. Les domaines bornés symétriques sont toujours homogènes ([3], p. 134) et leur détermination est l'objet principal du Mémoire [3], auquel nous consacrerons le reste du paragraphe IV. E. Cartan a, de plus, vérifié que pour $n = 1, 2, 3$ tout domaine borné homogène est symétrique (*voir* [3] si $n = 1, 2$, démonstration non publiée si $n = 3$); on ne sait pas s'il existe des domaines bornés homogènes non symétriques pour $n > 3$.

Après avoir établi que le groupe des automorphismes d'un domaine borné symétrique est semi-simple et sans composante simple compacte, É. Cartan énonce plusieurs résultats qui, compte tenu de quelques théorèmes sur les groupes semi-simples, sont équivalents au théorème suivant, où $\mathcal{A}_0(D)$ désigne le plus grand sous-groupe connexe de $\mathcal{A}(D)$:

THÉORÈME 6. — *Si* D *est borné symétrique irréductible* ([6]), $\mathcal{A}_0(D)$ *est simple*

([5]) H. CARTAN, *Sur les groupes de transformations analytiques Act. Sc. Ind.*, 198, Hermann, Paris, 1935.

([6]) Irréductible veut dire ici que le groupe linéaire formé par les parties linéaires des automorphismes de $\mathcal{H}_z$ est irréductible; cette définition, *a priori* plus restrictive que celle de É. Cartan, est celle qui intervient dans les démonstrations.

non compact de centre réduit à e; le groupe d'isotropie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}_0(D)$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathcal{A}_0(D)$ et possède un centre non discret.

Réciproquement, si $\mathcal{G}$ est simple non compact de centre réduit à e et contient un sous-groupe compact maximal $\mathcal{H}$ à centre non discret; l'espace homogène $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ possède une structure bien déterminée de variété analytique complexe symétrique, invariante par $\mathcal{G}$ et dont $\mathcal{G}$ est le plus grand groupe connexe d'automorphismes. Enfin, $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ est analytiquement homéomorphe à un domaine borné symétrique.

Disons que les variétés analytiques complexes V_1 et V_2 sont équivalentes s'il existe entre elles un homéomorphisme analytique (complexe bien entendu); le théorème 6 affirme donc que les classes de domaines bornés symétriques irréductibles équivalents sont en correspondance biunivoque avec les quotients $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ ($\mathcal{G}$ simple non compact de centre réduit à e, $\mathcal{H}$ à centre non discret compact maximal dans $\mathcal{G}$), dont nous reproduirons la liste plus bas.

En fait, ce théorème ou plus exactement la dernière assertion de ce theorème n'est pas entièrement démontrée. É. Cartan prouve tout d'abord la 1re partie, c'est-à-dire que les conditions imposées à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont nécessaires (essentiellement le lemme IX, n° 32); il affirme ensuite qu'il va obtenir la réciproque, mais les nos 33, 34, 35 montrent seulement que $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ a une structure analytique complexe symétrique invariante par $\mathcal{G}$ et non pas qu'il est équivalent à un domaine borné. Plus loin (p. 146-151), É. Cartan *vérifie* que les quotients $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ des quatre grandes classes admettent des réalisations comme domaines bornés symétriques, mais il ne le fait pas pour les deux quotients $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ exceptionnels (types V et VI), et l'auteur de ces lignes avoue ne pas savoir si ces derniers sont équivalents ou non à des domaines bornés. Par suite, il n'est pas non plus complètement démontré que tout domaine borné symétrique est équivalent à un produit de domaines bornés symétriques irréductibles. Par contre, il est en tout état de cause exact (et démontré dans [3]), qu'un domaine borné symétrique D de C^n est cerclé, homéomorphe à R^{2n}, équivalent à un produit $\mathcal{G}/\mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_k/\mathcal{H}_k$ de variétés analytiques complexes homogènes symétriques irréductibles et que $\mathcal{A}_0(D) \cong \mathcal{G}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_k$; cette dernière égalité résulte du théorème C, n° 26, lui-même cas particulier d'un résultat général de É. Cartan sur les espaces riemanniens symétriques, d'où l'on déduit aussi que $\mathcal{A}_0(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \cong \mathcal{G}$. Signalons encore qu'en complétant le raisonnement du (n° 34) de [3], on obtient le [7]

THÉORÈME 7. — *Soient $\mathcal{G}$ simple non compact de centre réduit à e, possédant un sous-groupe compact maximal $\mathcal{H}$ de centre non discret, $C(\mathcal{G})$ son extension complexe, $\mathcal{G}_C$ un sous-groupe compact maximal de $C(\mathcal{G})$ tel que $\mathcal{G}_C \cap \mathcal{G} = \mathcal{H}$.*

Alors $C(\mathcal{G})$ opère sur l'espace homogène compact $\mathcal{G}_C/\mathcal{H}$ qui peut être muni d'une structure de variété analytique complexe symétrique respectée par les opérations de $C(\mathcal{G})$. De plus $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ s'identifie à un ouvert de $\mathcal{G}_C/\mathcal{H}$ et les automorphismes de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ se prolongent en automorphismes de $\mathcal{G}_C/\mathcal{H}$.

---

[7] *Voir* A. BOREL, *Les espaces hermitiens symétriques*, exposé fait au Séminaire Bourbaki, mai 1952, ainsi qu'un travail qui paraîtra ultérieurement et développera aussi les résultats d'une Note écrite en collaboration avec A. Lichnerowicz (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 2332-2334.

Ainsi toute variété $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ et, par conséquent, tout domaine borné symétrique, admet un ***prolongement analytique compact naturel***, naturel en ce sens que tout automorphisme du domaine se prolonge en automorphisme de cette compactification. Certains de ces prolongements ont été retrouvés par Hua [8], [10]; le cas particulier le plus simple est bien entendu l'immersion du demi-plan de Poincaré dans la sphère de Riemann.

Pour simplifier les notations dans la liste ci-dessous, nous n'indiquons pas des groupes $\mathcal{G}$ de centre réduit à e, il est entendu que le groupe *effectif* de transformations est le quotient du $\mathcal{G}$ donné par son centre; nous faisons aussi figurer le prolongement compact ainsi que, pour les quatre grandes classes, une réalisation de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ comme domaine de C^n, éventuellement non borné (pour plus de détails, *cf.* [26].

Notations. — $SO(n)$ [resp. $SU(n)$], groupe orthogonal (resp. unitaire), unimodulaire de n variables réelles (resp. complexes); $U(n)$ [resp. $Sp(n)$], groupe unitaire de n variables complexes (resp. quaternioniennes), Spin (10) revêtement universel de $SO(10)$; E_6, E_7, groupes exceptionnels compacts à 78 et 133 paramètres.

Type I. — $D =$ ensemble des $p \times p$ matrices Z telles $Z'\bar{Z} < E_q$ $(n = pq)$, $\mathcal{G}$ groupe des matrices

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{telles que} \quad \bar{S} \begin{pmatrix} -E_p & O \\ O & E_q \end{pmatrix} S' = \begin{pmatrix} -E_p & O \\ O & E_q \end{pmatrix}$$

opérant par $Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$.

$\mathcal{H} = U(p) \times U(q)$; le prolongement compact $U(p+q)/U(p) \times U(q)$ est la grassmannienne complexe des sous-espaces à p dimensions de C^{p+q}.

En permutant p et q, on obtient des domaines équivalents; pour $p = 1$, D est la boule ouverte de rayon 1 de C^q, les groupes discontinus opérant sur elles sont les ***groupes hyperfuschsiens***, considérés par Picard pour $p = 2$, par Fubini pour q quelconque.

Type II. — D est l'ensemble des $p \times p$ matrices antisymétriques complexes z telles que $Z'\bar{Z} < E_p$; $\mathcal{G}$ est le groupe des $2p \times 2p$ matrices complexes laissant invariante une forme hermitienne à p carrés positifs et p carrés négatifs, et ayant de plus la forme

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

opérant sur D par $Z \to (AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})$.

$\mathcal{H} = U(p)$ et le prolongement compact est $SO(2p)/U(p)$, espace des variétés planes à p dimensions génératrices de la quadrique complexe à $2p$ dimensions (complexes).

Type III. — C'est le demi-plan généralisé défini dans le paragraphe III à propos des fonctions modulaires; $\mathcal{G}$ est donc le groupe symplectique de $2p$ variables réelles, $\mathcal{H} = U(p)$ et le prolongement compact est $Sp(p)/U(p)$, espace des variétés planes à $p-1$ dimensions appartenant à un complexe linéaire non dégénéré de l'espace projectif complexe à $2p-1$ dimensions (complexes).

Ce domaine est aussi étudié dans [5] pour $p=2$, $n=3$, dans [11], [24], [26] pour p quelconque.

Type IV. — D est l'ensemble des points de C^p vérifiant

$$2(|z_1|^2+\ldots+|z_p|^2)<1+|z_1^2+\ldots+z_p^2|^2<2.$$

Pour faire agir $\mathcal{G}$, il est plus commode d'utiliser un modèle matriciel réel [12]; les points de D sont les $2\times p$ matrices réelles X vérifiant $X.X'<E_2$ et $\mathcal{G}$ est le groupe des $(p+2)\times(p+2)$ matrices réelles S

$$S=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \quad \text{telles que} \quad S\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & -E_p\end{pmatrix}S'=\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & -E_p\end{pmatrix}$$

agissant par $X\to(AX+B)(CX+D)^{-1}$.

$\mathcal{H}=SO(p)\times SO(2)$; le prolongement compact $SO(p+2)/SO(p)\times SO(2)$ est l'espace des droites orientées de l'espace projectif réel à $p+1$ dimensions, ou encore la quadrique complexe non dégénérée à p dimensions complexes.

Pour $p=2$, le domaine n'est pas irréductible et est produit de deux demi-plans de Poincaré. Pour $p=3$, il a été considéré par Giraud [5], [6], [7], pour p quelconque par Giraud ([8], chap. III) et Hua [12].

Types V et VI. — Les prolongements compacts sont $E_6/\mathrm{spin}(10)\times SO(2)$ et $E_7/E_6\times SO(2)$. Ce sont aussi des variétés algébriques, mais de définitions moins simples que les préccdentes et que nous n'indiquerons pas. Les variétés symétriques non compactes correspondantes sont les quotients par $\mathrm{spin}(10)\times SO(2)$ resp. $E_6\times SO(2)$, des formes ouvertes de E_6 et E_7 définies par les automorphismes involutifs de E_6 et E_7 dont spin $(10)\times SO(2)$ sont les sous-groupes caractéristiques. Elles ont resp. 16 et 27 dimensions complexes; comme nous l'avons déjà relevé, on n'en connaît pas de réalisation comme domaine (borné ou non) de C^{16}, resp. C^{27}.

Remarques. — Pour les quatre grandes classes, nous avons suivi la numérotation de Siegel (26), celle de É. Cartan permute III et IV. Pour les petites dimensions, certains des domaines énumérés sont équivalents. Ces équivalences sont :

1° Type I, $p=q=1$; type II, $p=2$ et types III et IV pour $p=1$ sont équivalents au demi-plan de Poincaré ;
2° Type I, $p=1$, $q=3$ et type II, $p=3$;
3° Type I, $p=q=2$ et type IV, $p=4$;
4° Type III, $p=2$ et type IV, $p=3$.

On ne sait que peu de choses sur les sous-groupes discrets des groupes de la liste précédente, car on n'a pas de méthode systématique d'investigation des sous-groupes discrets des groupes de Lie. Pour l'instant, on ne peut construire des sous-groupes discrets que par voie arithmétique, par un procédé remontant essentiellement à Poincaré. Par exemple pour le type I on prend des groupes de matrices dont les coefficients sont des entiers algébriques d'un corps algébrique bien choisi ([26], § 47); une méthode analogue s'applique au type III ([26], § 52).

V. — Groupes kleinéens.

On sait que la théorie des fonctions automorphes d'une variable de Poincaré se divise en deux parties, l'une consacrée aux fonctions fuchsiennes, l'autre aux fonctions kleinéennes. La première est l'étude des fonctions définies sur le demi-plan de Poincaré ou sur l'intérieur du cercle unité et invariantes par des groupes discontinus (fonctions à cercle principal); on a donc ici un domaine D *a priori*.

Dans la deuxième partie, on part des groupes kleinéens, ce sont les sous-groupes discrets du groupe homographique complet d'une variable complexe, autrement dit du groupe des automorphismes de la sphère de Riemann. Si un tel sous-groupe n'est pas fini, il ne peut être discontinu sur toute la sphère et l'on est conduit à deux problèmes : A. Étant donné un groupe kleinéen, trouver des domaines de discontinuité invariants relativement à ce groupe : B. Faire la théorie des fonctions automorphes dans l'un de ces domaines. Remarquons en passant qu'il y a avantage pour A à introduire la discontinuité en un point z d'un groupe qui signifie que z n'est pas point d'accumulation de ses transformés.

On peut considérer les paragraphes I, II, III comme généralisations de la théorie des fonctions fuchsiennes, par contre les travaux de P. J. Myrberg [19], [20], [21], représentent plutôt une extension à n dimensions du point de vue kleinéen. Leur auteur considère des groupes opérant sur l'espace projectif complexe, ce sont des sous-groupes discrets du groupe homographique ou plus généralement certains groupes de Crémona de transformations birationnelles; dans ce dernier cas, les transformations possèdent donc en général des singularités. Il attache à un tel groupe un ou plusieurs domaines invariants de *discontinuité normale* (par exemple où le groupe est discontinu et où les fonctions définissant ses transformations forment une famille normale) et étudie les fonctions invariantes par le groupe, définies dans l'un de ces domaines. Les théorèmes d'existence sont aussi obtenus à l'aide de séries de Poincaré [19]. Le Mémoire [22] de Schubart se rattache à cet ordre d'idées et étudie les domaines fondamentaux de sous-groupes discrets du groupe homographique pour $n = 2$.

On peut enfin remarquer que le théorème 7 suggère une extension assez naturelle de la théorie des groupes et fonctions kleinéens. Elle consisterait à partir des prolongements analytiques compacts, des sous-groupes discrets de leurs groupes d'automorphismes, d'en étudier leurs domaines de discontinuité et leurs fonctions automorphes, définies dans l'un de ces domaines. Mais, sauf dans le cas de l'espace projectif complexe, qui est le prolongement compact de la boule unité, ce problème ne semble jamais avoir été abordé.

BIBLIOGRAPHIE

N. B. — Cette bibliographie ne prétend en aucune façon être exhaustive, elle est en particulier fort incomplète quant aux travaux parus avant 1920.

[1] H. BRAUN, *Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen* (*Math. Zeits.*, t. 44, 1939, p. 387-397).

[2] H. BRAUN, *Hermitian modular functions*, part. 1 (*Ann. Math.*, t. 50, 1949, p. 827-855); part. 2 (*Ibid.*, t. 51, 1950, p. 92-104); part, 3 (*Ibid.*, t. 53, 1951, p. 143-160).

[3] É. CARTAN, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes* (*Abb. math. Sem. Univ. Hamburg.*, t. 11, 1935, p. 116-162).

[4] H. CARTAN, *Séminaire de l'Ec. Norm. Sup.*, Paris, 1951-1252, Notes polycopiées.

[5] G. GIRAUD, *Sur une classe de groupes discontinus...* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, 3e série, t. 32, 1915, p. 237-403).

[6] G. GIRAUD, *Sur les groupes... de certaines formes quadratiques quaternaires...* (*Ibid.*, t. 33, 1916, p. 303-330).

[7] G. GIRAUD, *Sur les groupes... de certaines formes quadratiques quinaires* (*Ibid.*, t. 33, 1916, p. 331-362).

[8] G. GIRAUD, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1920.

[9] M. HERVÉ, *Sur les fonctions automorphes de n variables complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 462-464).

[10] M. HERVÉ, *Sur lesfonctions fuchsiennes de deux variables complexes* (*Ibid.*, t. 232, 1951, p. 673-675).

[11] L. K. HUA, *On the theory of automorphic functions of a matrix variable* : I. *Geometrical basis* (*Amer. J. Math.*, t. 66, 1944, p. 470-488); II. *The classification of hypercircles under the symplectic group* (*Ibid.*, t. 66, 1944, p. 531-563).

[12] L. K. HUA, *On the theory of fuschsian functions of several variables* (*Ann. Math.*, t. 47, 1946, p. 167-191).

[13] L. K. HUA, *On the extended spaces of several complexe variables* (*Acad. Sinica Sc. Record.* t. 2, 1947, p. 5-8).

[14] H. D. KLOOSTERMAN, *Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen* (*Abb. math. Sem. Univ. Hamburg.*, t. 6, 1928, p. 163-188).

[15] H. MAASS, *Ueber Gruppen von hyperabelschen Transformationen* (*Sitzungsberichte Heidel. Akad. Wiss.*, math.-naturw. Kl., 1940, 2 Abh.).

[16] H. MAASS, *Zur theorie der automorphen Funtionen von n Veränderlichen* (*Mat. Ann.*, t. 117, 1940-1941, p. 538-578).

[17] H. MAASS, *Theorie der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen der Hilbertschen Modulgruppe* (*Ibid.*, t. 118, 1942, p. 518).

[18] H. MAASS, *Ueber die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen* (*Ibid.*, t. 123, 1951, p. 125-151).

[19] P. J. MYRBERG, *Untersuchungen über automorphe Funktionen beliebig vieler Variabeln* (*Acta Mathematica*, t. 46, 1925, p. 215-336).

[20] P. J. MYRBERG, *Ueber gewisse Cremona-Gruppen und ihre automorphe Funktionen.* I. (*Ann. Acad. Sc. Fennicae*, Ser. A, *Math. Phys.*, t. 23, 1925); II. (*Ibid.*, t. 53, 1948).

[21] P. J. MYRBERG, *Beispiele von automorphen Funktionen 2 Variabeln* (*Ibid.*, t. 56, 1951).

[22] H. SCHUBART, *Ueber normal-diskontinuerliche lineare Gruppen in 2 komplexen Variabeln* (*Comm. Math. Helv.*, t. 12, 1939-1940, p. 81-129).

[23] C. L. SIEGEL, *Einführung in die Theorie der Modulfuntionen n-ten Grades* (*Math. Ann.*, t. 116, 1939, p. 617-657).

[24] C. L. SIEGEL, *Symplectic geometry* (*Amer. J. Math.*, t. 65, 1943, p. 1-86).

[25] C. L, SIEGEL, *Note on automorphic functions of several variables* (*Ann. Math.*, t. 43, 1942, p. 613-616).

[26] C. L. SIEGEL, *Analytic functions of several complexe variables*, Princeton, 1949, Notes polycopiées.