Bulletin de la S. M. F.

Jean-Pierre Serre

Le cinquième problème de Hilbert. État de la question en 1951

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LE CINQUIÈME PROBLÈME DE HILBERT
État de la question en 1951 (1).

PAR JEAN-PIERRE SERRE.

1. **Introduction.** — En 1900, Hilbert, dans sa fameuse conférence sur les problèmes des mathématiques [9], proposa comme problème n° 5 de « débarrasser la théorie de Lie de ses hypothèses de différentiabilité ».

Comme on sait, cette théorie se propose essentiellement deux objets :

a. Étudier les rapports existant entre les groupes de Lie et leurs algèbres de Lie (*cf.* [4] et [27] dont nous suivons les notations);

b. Étudier les rapports existant entre les représentations d'un groupe de Lie par des opérateurs d'une variété, et les représentations de son algèbre de Lie par des champs de vecteurs tangents à la variété.

Le 5e Problème se subdivise donc en deux parties que l'on peut énoncer comme suit :

A. *Montrer que tout groupe topologique localement euclidien est un groupe de Lie;*

B. *Montrer que tout groupe localement compact d'opérateurs d'une variété est un groupe de Lie.*

Il est clair que la résolution affirmative de B entraînerait celle de A (faire opérer le groupe sur lui-même par translation à gauche, par exemple). Ceci explique que B soit bien plus inaccessible que A, et que l'on n'ait à son sujet que des résultats fort partiels. Aussi a-t-on coutume de désigner sous le nom de 5e Problème, uniquement la partie A; c'est de cette dernière que nous nous occuperons presque exclusivement dans la suite.

(1) Cet exposé de synthèse de l'état des recherches contenant le cinquième problème de Hilbert a été élaboré, à propos de la seconde thèse de l'auteur. Son intérêt a paru suffisamment grand pour justifier sa publication (N. D. S.)

2. Historique. — Le premier travail concernant le 5e Problème (sous la forme B) est celui de Brouwer en 1910 ([1], [2]) qui montre que tout groupe localement euclidien opérant sur une variété de dimension 1 ou 2 est un groupe de Lie. Du résultat de Brouwer on tire aisément que tout groupe localement euclidien de dimension 1 ou 2 est un groupe de Lie; c'est ce qui est fait en 1931 par Kerejkarto [12]. Entre ces deux dates ne paraît aucun travail sur le 5e Problème, probablement parce que les notions nécessaires pour pouvoir l'énoncer avec précision ne sont introduites qu'en 1926 par Schreier [28].

En 1933, Haar démontre l'existence d'une mesure invariante sur tout groupe localement compact (séparable, restriction inutile comme l'a montré A. Weil [31]); immédiatement von Neumann [25] en tire la résolution du 5e Problème pour les groupes *compacts*, suivi de près par Pontrjagin ([26], *voir* aussi [27]) qui, en 1934, le résout pour les groupes *abéliens*.

En 1941, Chevalley [3] annonce sa résolution pour les groupes *résolubles*; la première démonstration de ce résultat est due à Iwasawa [11], en 1949.

En 1948, Montgomery [17] résout le 5e Problème pour les groupes de dimension 3, et en 1951 Montgomery-Zippin [24] annoncent sa résolution pour les groupes de dimension 4.

Signalons enfin d'importants résultats de Smith [29] et de Gleason [7], [8], dont il sera question plus loin.

Nous allons maintenant passer en revue les diverses méthodes par lesquelles on a attaqué le 5e Problème.

3. Utilisation de la théorie des réprésentations unitaires. — C'est la méthode suivie notamment par von Neumann et Pontrjagin; c'est celle qui a obtenu les résultats les plus brillants. On procède comme suit :

Soit G un groupe localement compact; d'après Gelfand-Raikov, G possède un système complet de représentations unitaires irréductibles et si G est *abélien* (resp. *compact*) on peut montrer qu'une telle représentation est de dimension 1 (resp. de dimension finie). Le groupe G admet donc un système complet de représentations continues dans des groupes de Lie (à savoir les groupes unitaires de dimension finie); il en résulte que G possède un sous-groupe ouvert qui est limite projective de groupes de Lie; ceci se voit en utilisant les deux résultats suivants :

a. Tout groupe localement compact qui admet une représentation continue et biunivoque dans un groupe de Lie est un groupe de Lie (E. Cartan, *cf.* [4]);

b. Toute extension d'un groupe de Lie par un groupe de Lie est un groupe de Lie, Iwasawa [11], Gleason [7].

Posons alors, d'après Gleason [7], la définition suivante :

3.1. *Un groupe topologique est dit « groupe de Lie généralisé » (en abrégé : GLG) s'il est localement compact et s'il possède un sous-groupe ouvert qui est limite projective de groupes de Lie.*

On a donc montré :

3.2. *Tout groupe localement compact qui est soit abélien, soit compact, est un* GLG.

Il s'ensuit d'ailleurs que tout groupe localement compact résoluble est un GLG, car on peut montrer ([7], *voir* aussi [11]) que toute extension d'un GLG par un GLG est un GLG.

D'autre part, on a :

3.3. *Tout* GLG *localement connexe de dimension finie est un groupe de Lie.*

Se bornant au cas où le groupe G est limite projective des groupes de Lie G_ι ($\iota \in I$), on voit d'abord que l'on peut supposer que $\dim G = \dim G_\iota$ pour tout $\iota \in I$ (en effet, on a $\dim G = \lim_{\iota \in I} \dim G_\iota$, comme on le voit en « remontant » un cube de G_ι dans G). Cela étant, si les G_ι ne sont pas tous isomorphes au bout d'un certain rang, on montre aisément que G est localement isomorphe au produit direct d'un groupe de Lie et d'un groupe totalement discontinu non discret, ce qui est contraire à l'hypothèse de locale connexion. Le groupe G est donc bien un groupe de Lie.

Combinant 3.2 et 3.3, on obtient :

3.4. *Tout groupe localement compact, localement connexe, de dimension finie, qui est soit résoluble, soit compact, est un groupe de Lie.*

Il est clair que 3.4 entraîne la résolution du 5e Problème pour les groupes résolubles ou compacts.

Remarques. — α. On conjecture généralement que :

3.5. *Tout groupe localement compact est un* GLG.

D'après 3.3, ceci entraînerait la résolution du 5e Problème.

β. On notera que :

3.6. *Tout* GLG *sans sous-groupe arbitrairement petit est un groupe de Lie.*

γ. Les propriétés des GLG ont été étudiées systématiquement par Iwasawa [11] et Gleason [7]. Un des résultats les plus intéressants (dû à Iwasawa) est le suivant :

3.7. *Soit* G *un* GLG *connexe*; G *possède des sous-groupes compacts maximaux qui sont connexes et conjugués deux à deux; si* K *est l'un de ces sous-groupes*, G/K *est homéomorphe à un espace euclidien* R^n, *n fini et* G *est donc homéomorphe* à $K \times R^n$.

Ce résultat ramène évidemment l'étude topologique des GLG à celle des groupes compacts.

Possibilités d'extension des résultats précédents. — Si G est un groupe localement compact quelconque, il se peut que toutes ses représentations unitaires irréductibles soient de dimension infinie (c'est le cas, par exemple, pour les groupes de Lie simples non compacts). Il semble improbable que ces représentations puissent être de quelque utilité pour le 5e Problème.

On peut, par contre, se demander si l'on ne pourrait pas utiliser des représentations linéaires *quelconques* (non nécessairement unitaires). Malheureusement, on ne connaît à l'heure actuelle aucun procédé permettant de construire *a priori* de telles représentations; la découverte d'un pareil procédé serait pourtant extrêmement utile, et permettrait sans doute de donner une démonstration plus satisfaisante du théorème d'Ado.

4. La question des sous-groupes arbitrairement petits. — On dit qu'un groupe topologique n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits s'il existe un voisinage de l'élément neutre e ne contenant pas d'autre sous-groupe que $\{e\}$. Cette propriété est vérifiée par les groupes de Lie, comme on sait. Ce fait (ainsi que 3.6) conduit à poser la question suivante (plus faible que le 5e Problème) :

4.1. *Montrer qu'un groupe localement euclidien n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.*

Le résultat le plus important dans cette voie est dû à Smith ([29], *voir* aussi [20] et [5]), qui l'a obtenu comme cas particulier d'un théorème sur les groupes finis d'opérateurs des variétés :

4.2. *Un groupe localement euclidien n'a pas de sous-groupes finis arbitrairement petits.*

De ce résultat découle immédiatement l'équivalence de la question 4.1 avec la question suivante (en apparence plus faible).

4.3. *Montrer qu'un groupe localement euclidien ne peut contenir de sous-groupe isomorphe au groupe additif des entiers p-adiques.*

La démonstration de 4.3 devrait pouvoir se faire en généralisant convenablement la théorie homologique des revêtements au cas où le groupe d'automorphismes est non plus discret, mais totalement discontinu. C'est en tout cas ainsi, que Smith [30] a pu montrer la contradiction des hypothèses suivantes :

G localement euclidien, g sous-groupe de G isomorphe au groupe additif des entiers p-adiques, $\dim G = \dim G/g$.

On notera que les deux premières hypothèses entraînent déjà que $\dim G/g \geq \dim G$, d'après un théorème classique (*cf.* [10]). Il suffirait donc de démontrer l'inégalité inverse : $\dim G/g \leq \dim G$ pour avoir résolu 4.3 et donc 4.1. Dans cette direction, le seul résultat général connu est le suivant (Montgomery [18]) :

4.4. *Soit* G *un groupe localement compact, métrique séparable, de dimension finie n; si g est un sous groupe abélien fermé de* G, *on a*

$$\dim G/g \leq n(n+1)/2,$$

et en particulier, $\dim G/g < +\infty$.

Signalons encore le résultat suivant, dû à l'auteur (non publié), qui se démontre en combinant 4.4 avec la théorie cohomologique des espaces fibrés due à J. Leray :

4.5. *Soit* G *un groupe localement euclidien*, g *un sous-groupe de* G *isomorphe au solénoïde à une dimension (dual du groupe additif des rationnels). On a* $\dim G/g = \dim G + 1$.

On voit nettement par ces exemples que la résolution de 4.1 semble liée à des progrès dans la théorie locale des espaces fibrés et dans la théorie de la dimension des espaces quotients.

5. **La construction des paramètres canoniques.** — Soit d'abord G un groupe de Lie; il existe un voisinage U de l'élément neutre e de G tel que, si $x \in U$, l'équation $y^n = x$ ait une solution et une seule dans U; nous noterons cette solution $x^{1/n}$.

On peut également choisir U pour que, en posant

5.1 $$t.x = \lim_{p/q \to t} x^{p/q}, \quad -1 \leqq t \leqq +1,$$

5.2 $$x + y = \lim_{n \to +\infty} (x^{1/n} y^{1/n})^n,$$

les limites des seconds membres existent et définissent sur U une structure de *noyau d'espace vectoriel*; cet espace vectoriel est dit espace des paramètres canoniques; il définit l'unique structure analytique réelle de G compatible avec sa structure de groupe topologique.

Si maintenant G est un groupe localement compact, on peut essayer de donner un sens aux formules 5.1 et 5.2. Pour cela, la première chose à faire est de montrer l'existence de racines $n^{\text{ièmes}}$ dans un voisinage de l'élément neutre e (les racines carrées suffisent). D'après Kerejkarto et Gleason [5] on a :

5.3. *Soit* G *un groupe localement euclidien*, N *un voisinage de* e; *il existe alors un voisinage* M *de* e *tel que tout* $x \in M$ *ait une racine carrée dans* N.

Malheureusement, ce résultat ne montre pas que la racine carrée considérée est unique, et n'assure pas non plus de la convergence vers e des racines $2^{n^{\text{ièmes}}}$ d'un élément x donné.

Pour pouvoir établir ces deux résultats, on est obligé de faire l'hypothèse supplémentaire que le groupe n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits (*voir*, par exemple, [5], [13], [14], [30], [33]). Nous suivrons l'exposé de Kuranishi ([13], [14]). On montre d'abord :

5.5. *Soit* G *un groupe localement compact; pour que* G *n'ait pas de sous-groupes arbitrairement petits, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage* U *de* e, *tel que pour tout* $x \in U$, $x \neq e$, *il y ait un entier* n *avec* $x^{2^n} \notin U$.

(Noter que, si l'on remplace 2^n par n, l'énoncé devient trivial.)

5.5. *Soit* G *un groupe localement compact sans sous-groupes arbitrairement petits. Il existe un voisinage* V *de* e *tel que* $x, y, x^2 = y^2 \in V$ *entraînent* $x = y$.

Démonstration. — Soit U compact, vérifiant la condition de 5.4; on peut trouver un voisinage W symétrique de e tel que $W.W \subset U$, puis un voisinage V tel que, si $g \in U$, $g^{-1}Vg \subset W$. Maintenant, si $x, y, x^2 = y^2 \in V$, posons $a = x^{-1}y$; l'identité $a^{2^n} = x^{-1}.a^{-2^{n-1}}.x.a^{2^{n-1}}$ montre, par récurrence sur n, que $a^{2^n} \in U$, d'où d'après 5.4, $a = e$ et $x = y$.

Si G est localement euclidien, le théorème d'invariance du domaine montre alors que l'application $x \to x^2$ est un homéomorphisme d'un voisinage de e sur un autre voisinage de e. On en tire aisément [13] :

5.6. *Soit* G *un groupe localement euclidien sans sous-groupes arbitrairement petits. Il existe alors un voisinage* W *de e tel que tout* $x \in W$ *ait une racine carrée et une seule contenue dans* W.

Soit maintenant $x \in W$; les racines $2^{n^{\text{ièmes}}}$ de x contenues dans W existent et sont uniques; si y est un de leurs points limites, il est clair que $y^2, y^4, \ldots$ sont aussi des points limites de cette suite, d'où $y = e$, d'après 5.4. Ces racines tendent donc vers e. La formule 5.1 permet alors de définir l'élément $t.x$, $t \in [-1, +1]$, à condition d'utiliser pour fractions p/q des fractions dyadiques, et de passer à la limite suivant un ultrafiltre. On obtient ainsi facilement :

5.7. *Soit* G *un groupe localement euclidien sans sous-groupes arbitrairement petits. Il existe un voisinage* W' *de e tel que l'on puisse définir pour tout* $x \in W'$ *et tout* $t \in [-1, +1]$ *un élément* $s_x(t) \in W'$, *dépendant continûment du couple* (x, t), *tel que* $s_x(1) = x$, *et que, pour tout* $x \in W'$, s_x *soit un sous-groupe à un paramètre de* G.

(Nous empruntons cet énoncé à C. Chevalley, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2, 1951.)

Il est plus difficile de donner un sens à la formule 5.2 sans faire d'hypothèse supplémentaire. La difficulté est la suivante : soit W' un voisinage de e vérifiant les conditions de 5.7 et soit W'_n l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ (contenues dans W') des éléments de W'. Pour pouvoir donner un sens à 5.2, il faudrait être sûr que $(W'_n)^n$, l'ensemble des produits de n éléments de W'_n, est contenu dans un compact indépendant de n. En *supposant* qu'il en soit ainsi, on voit facilement que les lois de composition $t.x$ et $x + y$ définissent sur un voisinage de e une structure de noyau d'espace vectoriel (pour établir la commutativité de $x + y$, utiliser l'identité :

$$(x^{1/n}y^{1/n})^n = x^{1/n}(y^{1/n}x^{1/n})^n x^{-1/n}.$$

La compacité locale de G entraîne que cet espace vectoriel est de dimension finie. Soit alors Int (G) le groupe des automorphismes intérieurs de G; ces automorphismes sont bien déterminés par leur effet sur les éléments de G assez voisins de e, par exemple sur ceux du noyau d'espace vectoriel précédent (du moins si G est connexe, ce que l'on peut supposer). Il suit de là que Int (G) admet une représentation continue fidèle dans le groupe des automorphismes de cet espace vectoriel, donc est un groupe de Lie. Le groupe G est donc une extension d'un GLG (son centre, qui est un GLG parce qu'abélien) par le groupe de Lie

Int (G); c'est donc un GLG (*voir* § 3) et, comme il est localement euclidien, c'est un groupe de Lie d'après 3.3. On a donc prouvé [33] :

5.8. *Soit* G *un groupe localement euclidien possédant un voisinage* V *compact de e sans sous-groupe distinct de* $\{e\}$, *et un voisinage* $W' \subset V$ *tel que* $(W'_n)^n \subset V$ *pour tout n* (les notations étant celles données plus haut). *Alors* G *est un groupe de Lie.*

Ce dernier résultat contient tous ceux obtenus antérieurement par divers auteurs qui supposaient que le groupe avait une loi de composition deux fois, ou une fois différentiable, ou bien vérifiant une condition de Lipschitz.

Un résultat analogue a d'ailleurs permis à Kuranishi [14] de prouver le théorème suivant, qui est un des plus généraux connus sur la partie B du 5ᵉ Problème :

5.9. *Soit* G *un groupe localement compact de transformations une fois différentiables d'une variété une fois différentiable. Supposons que l'élément neutre de* G *soit le seul élément dont l'ensemble des points fixes ait un intérieur non vide. Alors* G *est un groupe de Lie.*

6. **Le cas des petites dimensions.** — Il a été étudié principalement par Montgomery et Zippin (*voir* § 2) par des méthodes tirées surtout de la Topologie analytique. Nous nous bornerons à de brèves indications.

Dans le cas où G est un groupe localement euclidien de dimension 3, le principe de la démonstration est le suivant : on trouve un sous-groupe H de dimension 1, tel que G/H soit une variété de dimension 2, et la connaissance des groupes d'opérateurs de ces variétés permet alors de montrer que G est un groupe de Lie (*voir* [1], [2]). Les principales difficultés sont :

a. Montrer l'existence d'un sous-groupe H de G tel que $\dim H = 1$;
b. Montrer que G/H est une variété;
c. Montrer que $\dim G/H = 2$.

Au sujet de *a*, on a (Montgomery [15]) :

6.1. *Soit* G *un groupe localement euclidien, connexe, simplement connexe, de dimension* $n \geqq 2$; G *contient un sous-groupe fermé* H, *avec* $H \neq G$ *et* $\dim H > 0$.

Si $n = 2$, on utilise 6.2 (*voir* plus bas); si $n \geqq 3$, on fait opérer G sur lui-même par la représentation adjointe; supposant que le centre de G est totalement discontinu (sinon le théorème résulte immédiatement des propriétés des groupes abéliens), Montgomery montre que l'on peut prendre pour sous-groupe H l'ensemble des $x \in G$ commutant avec un élément y convenable de G.

Au sujet de *b* et de *c*, on utilise le fait que la fibration de G par H possède une section locale si H est un groupe de Lie (Gleason [6]). Il est alors facile de voir que G/H est une *variété-homologique* de dimension 3-dimH. Mais toute variété-homologique de dimension 1 ou 2 est une variété [32], d'où *b* et *c* lorsque H est un groupe de Lie. Le cas où H est quelconque est plus compliqué à traiter. On utilise notamment le résultat suivant :

6.2. *Tout groupe localement compact, connexe, métrique séparable, de dimension* 1 *ou* 2, *est un* GLG.

(Pour la dimension 1, *voir* [16], [8]; pour la dimension 2, *voir* [19].)

Les démonstrations des résultats de ce paragraphe seraient grandement simplifiées si l'on pouvait établir 4.1 *a priori.*

7. **Les résultats de Gleason.** — Gleason [8] a annoncé récemment plusieurs résultats intéressants. Tout d'abord :

7.1. *Tout groupe localement compact, connexe, qui contient plus d'un élément, contient un arc.*

Si le groupe G est métrisable, on voit tout de suite que le semi-groupe des sous-ensembles compacts de G contenant e contient un sous-semi-groupe connexe, totalement ordonné par inclusion, et localement compact. De l'étude de la structure de ce sous-semi-groupe on tire que, ou bien G contient une suite décroissant vers e de sous-groupes compacts connexes (auquel cas 7.1 résulte de 3.2), ou bien G contient une famille de sous-espaces compacts connexes $F(t)$, $t \in [0, 1]$, tels que :

(a) $$F(t) \neq \{e\} \quad \text{si} \quad t \neq 0;$$

(b) $$\bigcap_{t>0} F(t) = F(0) = \{e\};$$

(c) $$F(t)F(u) = F(t+u) \quad \text{si} \quad t+u \leqq 1.$$

A l'aide de cette famille $F(t)$, on construit sans difficulté un arc dans G. Le cas général se ramène au cas métrisable par un procédé standard.

Les autres résultats de Gleason sont relatifs aux groupes de dimension finie. Par une généralisation convenable de résultats de Montgomery, il montre d'abord que :

7.2. *Tout groupe localement connexe par arc et de dimension finie est localement compact.*

Ceci permet de définir sur la composante connexe par arc de e dans G (localement compact, de dimension finie) une topologie plus fine que la topologie induite, et pour laquelle cette composante est un groupe localement compact, de dimension finie, localement connexe par arc. Il en déduit :

7.3. *Tout groupe localement connexe de dimension finie* $\geqq 2$ *contient un sous-groupe distinct de* $\{e\}$ *et de* G (comparer avec 6.1).

D'où, par récurrence sur la dimension de G :

7.4. *Tout groupe localement compact, connexe, de dimension finie qui contient plus d'un point, contient un sous-groupe à* 1 *paramètre.*

Dans la même direction, signalons deux résultats récents de Montgomery-Zippin [22], [23] :

7.5. *Tout groupe métrique séparable, localement compact, non compact, de dimension* $n > 0$, *contient un sous-groupe fermé isomorphe au groupe additif* R *des nombres réels.*

7.6. *Tout groupe métrique séparable, localement compact, non compact, de dimension* $n > 1$, *contient un sous-groupe fermé connexe non compact de dimension* 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. E. J. Brouwer, *Die Theorie der endlichen kontinuerlichen Gruppen, unabhangig von den Axiomen von Lie* (*Math. Ann.*, t. 67, 1909, p. 246-267).

[2] L. E. J. Brouwer, *Ibid.*, t. 69, 1910, p. 181-203.

[3] C. Chevalley, *Two theorems on solvable topological groups* (*Lectures in Topology*, Michigan, 1941).

[4] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton, 1946.

[5] A. M. Gleason, *Square roots in locally euclidean groups* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1949, p. 446-449).

[6] A. M. Gleason, *Spaces with a compact Lie group of transformations* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 35-43).

[7] A. M. Gleason, *The structure of locally compact groups* (*Duke Math. Journ.*, t. 18, 1951, p. 85-110).

[8] A.M. Gleason, *Arcs in locally compact groups* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, t. 36, 1950, p. 663-667).

[9] D. Hilbert, *Mathematische Probleme* (*Gott. Nachr.*, 1900, p. 253-297).

[10] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, 1941.

[11] K. Iwasawa, *On some types of topological groups* (*Ann. Math.*, *t.* 50, 1949, p. 507-558).

[12] Von Kerekjarto, *Geometrische Theorie der Zweigliedrigen kontinuerlichen Gruppen Hamb. Abh.*, t. 8, 1931, p. 107-114).

[13] M. Kuranishi, *On euclidean local groups satisfying certain conditions* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 372-380).

[14] M. Kuranishi, *On conditions of differentiability of locally compact groups* (*Nagoya Math. Journ.*, t. 1, 1950, p. 71-81).

[15] D. Montgomery, *A theorem on locally euclidean groups* (*Ann. Math.*, 48, 1947, p. 650-659).

[16] D. Montgomery, *Connected one dimensional groups* (*Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 110-117).

[17] D. Montgomery, *Analytic parameters in three dimensional groups* (*Ann. Math.*. t. 49, 1948, p. 118-131).

[18] D. Montgomery, *Dimension of factor spaces* (*Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 373-378).

[19] D. Montgomery, *Connected two dimensional groups* (*Ann. Math.*, t. 51, 1950, p. 262-277).

[20] D. Montgomery, *Locally homogeneous spaces* (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 261-271).

[21] D. Montgomery, *Finite dimensional groups* (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 591-605).

[22] D. Montgomery, and L. Zippin, *Existence of subgroups isomorphic to the real numbers* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 298-326).

[23] D. Montgomery, and L. Zippin, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 57, p. 75, *Abstract* 53 t.

[24] D. Montgomery, and L. Zippin, *Ibid.*, p. 145, *Abstract* 176 t.

[25] J. von Neumann, *Die Einführung analytischer Parameter in topologische Gruppen* (*Ann. Math.*, t. 34, 1933, p. 170-190).

[26] L. Pontrjagin, *The theory of topological commutative groups* (*Ann. Math.*, t. 35, 1934, p. 361-388).

[27] L. Pontrjagin, *Topological groups*, Princeton, 1939.

[28] O. Schreier, *Abstrakte kontinuerliche Gruppen* (*Hamb. Abh.*, t. 4, 1926, p. 15-32).

[29] P. A. Smith, *Transformations of finite period.* III. *Newman's theorem* (*Ann. Math.*, t. 42, 1941, p. 446-458).

[30] P. A. Smith, *Periodic and nearly periodic transformations* (*Lectures in Topolody*, Michigan, 1941).

[31] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, 1940.

[32] R. L. Wilder, *Topology of Manifolds*. Colloquium, 1949.

[33] H. Yamabe, *Note on locally compact groups* (*Osaka Math. Journ.*, t. 3, 1951, p. 77-82).