BULLETIN DE LA S. M. F.

M. LAISANT

Note sur la géométrie des quinconces

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 156-158
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__156_1>

Note sur la Géométrie des quinconces; par M. Laisant.

(Séance du 13 février 1878.)

Dans une Communication faite à la *Société mathématique* le 7 novembre 1877 (*Bulletin*, t. VI, p. 9), M. Éd. Lucas a énoncé et démontré le théorème suivant :

Les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier.

La démonstration très-ingénieuse de M. Lucas repose sur une remarque géométrique préliminaire et sur un théorème relatif aux sommes de deux carrés. Je crois qu'il est possible de la rendre beaucoup plus élémentaire et de généraliser en même temps le résultat obtenu.

Il est visible, en effet, en prenant un sommet A du triangle pour origine, et traçant deux axes AX, AY parallèles aux côtés des cases, que les coordonnées des deux autres sommets B et C seront exprimées par des nombres entiers, si l'on adopte pour unité de longueur le côté d'une case. Par conséquent, la tangente de l'angle BAX sera de la forme $\frac{l}{m}$, et celle de l'angle CAX sera de la forme $\frac{l_1}{m_1}$, l, m, l_1, m_1 étant entiers.

Or, l'angle A du triangle ABC étant égal, soit à la somme, soit à la différence de BAX, CAX, nous aurons

$$\operatorname{tang} A = \frac{\frac{l}{m} + \frac{l_1}{m_1}}{1 - \frac{ll_1}{mm_1}} = \frac{lm_1 + ml_1}{mm_1 - ll_1} = \frac{p}{q}$$

ou bien

$$\tang A = \frac{\frac{l}{m} - \frac{l_1}{m_1}}{1 + \frac{ll_1}{mm_1}} = \frac{lm_1 - ml_1}{mm_1 + ll_1} = \frac{p'}{q'},$$

c'est-à-dire que la tangente de l'angle A est nécessairement commensurable.

. On peut donc énoncer le théorème suivant, plus général que celui de M. Lucas, qui n'en est qu'un corollaire :

Tout triangle, ayant pour sommets les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque, présente trois angles dont les tangentes sont commensurables.

Appelons *figure inscriptible dans l'échiquier* une figure composée de lignes droites passant chacune par deux centres de cases. Il est clair que la propriété s'applique à deux droites quelconques d'une figure inscriptible.

La hauteur AH d'un triangle inscriptible divise la base BC en deux segments dont le rapport est commensurable ; car, $\frac{AH}{CH} = \tang C$ et $\frac{AH}{BH} = \tang B$ étant commensurables, il en sera de même du rapport $\frac{BH}{CH}$ de ces deux tangentes.

Les carrés des côtés d'un triangle inscriptible (et par suite les carrés des côtés et des diagonales d'un polygone inscriptible) sont commensurables entre eux. En effet, si nous appelons $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ les coordonnées des trois sommets, les carrés des côtés sont

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2, \quad (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2,$$

c'est-à-dire que ces carrés sont exprimés par des nombres entiers.

On pourrait sans doute établir encore de nombreuses propriétés de ces figures inscriptibles, et il est probable que quelques-unes d'entre elles seraient de nature à fournir des théorèmes sur les nombres.

Il y a lieu, du reste, de remarquer le lien qui rattache l'étude de cette Géométrie des quinconces avec celle des nombres complexes de la forme $x + yi$, x et y étant des nombres entiers. En choisissant les axes comme nous l'avons dit plus haut, tout centre de case se trouve, en effet, avoir des coordonnées x et y représentées par des nombres entiers.

Par exemple, ce théorème bien connu que rappelle M. Lucas : *Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés,* résulte immédiatement de la considération suivante. Soient OI une longueur égale à l'unité portée sur l'axe des x à partir de l'origine, A et B deux centres de cases; si l'on construit le triangle OBC directement semblable à OIA, C sera encore un centre de case.

Algébriquement :

$$(x+yi)(x'+y'i)=z+ui,$$

z et u étant entiers, si x, y, x', y' le sont; d'où

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)=z^2+u^2,$$

relation qui correspond à $\mathrm{OA}^2.\mathrm{OB}^2=\mathrm{OC}^2$.

On sait que

$$z=xx'-yy', \quad u=xy'+x'y.$$

Comme cas particulier, si $xx'=yy'$, le produit $(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)$ est un carré parfait.

Les considérations relatives à cet ordre d'idées seraient peut-être d'un certain secours dans la théorie des nombres, et pourraient fournir la matière de recherches intéressantes.