PAUL C. ROSENBLOOM

Quelques classes de problèmes extrémaux

Bulletin de la S. M. F., tome 79 (1951), p. 1-58
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1951__79__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

QUELQUES CLASSES DE PROBLÈMES EXTRÉMAUX (¹).

PAR PAUL C. ROSENBLOOM,

Syracuse - New-York (U. S. A.).

Introduction et résumé des résultats.

Depuis l'introduction des espaces abstraits par Fréchet [23] dans son Mémoire célèbre, on a fait de grands progrès dans leur étude, et dans celle de leurs applications. Il suffit de rappeler le rôle fondamental que joue ce point de vue dans les théories modernes des équations intégrales, du calcul des variations, des fonctions de variables réelles, et des équations différentielles, pour voir à quel degré l'influence de ces conceptions ouvelles a pénétré dans presque tous les domaines mathématiques. Le traité de Bourbaki [10] montre d'une manière frappante l'exactitude du mot de Weyl [71] : « In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of each individual mathematical domain ».

La puissance de l'analyse générale provient, d'une part, de ce qu'en synthétisant des théories assez diverses elle nous fait mieux comprendre leurs relations mutuelles, d'autre part de son langage géométrique, qui guide notre intuition par l'analogie entre des faits bien connus dans l'espace ordinaire et des faits nouveaux dans l'analyse, c'est-à-dire dans les espaces fonctionnels.

Malgré les grands succès de l'analyse générale, bien des mathématiciens distingués s'en méfient.

Hardy a mis ces objections en pleine lumière en parlant de la « functiontheory of the *hard*, *sharp*, *narrow* kind as opposed to the *soft*, *large*, *vague* kind ». La petite polémique entre M^lle^ Cartwright [75] et M. Newman [77] au sujet de l'analyse « dure » et l'analyse « molle », publiée dans la revue *Eureka* il y a quelques années, fait un bon exposé de ces points de vue différents.

Est-ce que l'analyse générale est ainsi bornée à des théorèmes d'existence et de

(¹) La matière de ce Mémoire est en partie le résultat du travail exécuté sous le contrat N6ONR, Task Order avec le Bureau des Recherches de la Marine américaine (*Office of Naval Research*).

structure ? Est-ce que les résultats précis des cas concrets lui échappent ? Est-ce qu'elle n'est qu'une façon de traduire en langage prétentieux ce qu'on a déjà découvert par d'autres moyens dans des cas spéciaux ? Le but de ce travail est de montrer comment on peut obtenir par la considération des relations géométriques dans les espaces à un nombre infini de dimensions des conclusions très précises et concrètes dans le cadre de « l'analyse dure ». Dans ce résumé nous simplifions souvent les énoncés en faisant des hypothèses plus restreintes.

Nous partons du fait banal qu'un plan d'appui d'un polyèdre convexe contient au moins un sommet du polyèdre. Cela signifie qu'une fonction linéaire atteint son maximum sur un polyèdre convexe en un sommet, au moins, c'est-à-dire en un point qui ne se trouve pas entre deux points du polyèdre. Ce sommet est uniquement déterminé si aucune arête du polyèdre n'est parallèle au plan d'appui. Ce sont « le principe du sommet » et « le principe de l'arête ». Si les faces du polyèdre et le plan d'appui se déplacent continûment de façon qu'une arête ne devienne jamais parallèle au plan d'appui, le sommet commun se déplace continûment aussi. Imaginons qu'on numérote les faces du polyèdre, et qu'on attache à chaque sommet, comme étiquette, les indices des faces qui s'y rencontrent. Alors, c'est toujours le même sommet qui est commun au polyèdre et au plan. Voilà ce que nous appelons « le principe de déformation ».

Le principe du sommet sert à caractériser les solutions d'une grande classe de problèmes extrémaux. Le principe de l'arête donne un critère simple pour l'unicité des solutions. Le principe de déformation explique l'observation que la solution d'un problème extrémal possède souvent beaucoup d'autres propriétés extrémales. La formulation et la démonstration rigoureuses du dernier principe ne semblent pas être très simples, mais nous n'avons pas réussi à les améliorer. Notre démonstration s'appuie sur le lemme suivant qui présente, peut-être, quelque intérêt en lui-même.

Soient $a^{(i)}$, pour $1 \leqq i \leqq s$, et x des vecteurs de longueur 1 dans l'espace euclidien à n dimensions. Soit K le cône convexe défini par les conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} [a^{(i)}, y] = 0, & 1 \leqq i \leqq r, \\ [a^{(i)}, y] \geqq 0, & r < i \leqq s, \end{cases}$$

où $[a, b]$ signifie le produit scalaire des vecteurs a et b. Si le point x satisfait aux inégalités

$$\begin{aligned} |[a^{(i)}, x]| &\leqq \varepsilon, \qquad 1 \leqq i \leqq r, \\ [a^{(i)}, x] &\geqq -\varepsilon, \qquad r < i \leqq s, \end{aligned}$$

il y a un point y dans K à une distance de x qui ne dépasse pas $\frac{2\varepsilon}{\tau}$, où τ est le minimum de la longueur du vecteur $\sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)}$ sous les conditions

$$\sum_{i=1}^{s} |c_i| = 1 \qquad \text{et} \qquad c_i \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad r < i \leqq s.$$

La condition que $\tau \neq 0$ est nécessaire et suffisante pour que la représentation (1) du cône K soit normalisée dans le sens de Reidemeister [52] et Weyl [70]. Donc la quantité τ est une mesure de la non-dégénérescence du cône K. Notre théorème signifie qu'une solution approchée des équations et inégalités (1) ne s'écarte pas trop d'une solution exacte. A un facteur numérique près, la borne $\frac{2\varepsilon}{\tau}$ ne peut pas être améliorée.

Pour éclaircir ces principes, nous donnons d'abord quelques applications élémentaires.

Dans le troisième chapitre nous démontrons que ces principes s'étendent d'une manière naturelle à l'espace (l) des suites $a = \{a_n\}$ de nombres réels tels que

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des points de l'espace (l) aux coordonnées non négatives. Notre résultat fondamental est le suivant :

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des points appartenant à $\mathfrak{A}$ qui satisfont aux conditions

$$\lambda^{(i)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(i)} a_n = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

où les suites $\{\lambda_n^{(i)}\}$ sont réelles et bornées pour $1 \leqq i \leqq k$. Si $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, il contient au moins un point dont tout au plus k coordonnées sont différentes de zéro.

Un point d'un ensemble convexe s'appelle *point extrême* s'il ne se trouve pas entre deux autres points de l'ensemble. C'est une généralisation de la notion d'un sommet.

Soit $\mathfrak{F}'$ l'ensemble des points appartenant à $\mathfrak{A}$ qui satisfont aux conditions

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda^{(i)}(a) = c_i, & 1 \leqq i \leqq m, \\ \lambda^{(i)}(a) \leqq c_i, & m < i \leqq k. \end{cases}$$

Alors un point extrême de $\mathfrak{F}'$ n'a qu'au plus k coordonnées différentes de zéro. S'il n'est pas vide, l'ensemble $\mathfrak{F}'$ contient au moins un point extrême. Il s'ensuit que si $\{\lambda_n\}$ est une suite bornée de termes réels, et si la fonction $\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$ atteint son maximum sur $\mathfrak{F}'$, elle l'atteint en un point extrême, au moins. C'est le principe du sommet dans une forme adaptée à l'espace (l).

Soit $\delta^{(i)} = \{\delta_n^{(i)}\}$, où $\delta_n^{(i)}$ est le symbole δ de Kronecker (valant 1 si $i = n$; 0 sinon). Si $\mathfrak{J}$ est un ensemble fini de nombres entiers, nous désignons par $E(\mathfrak{J})$ l'espace linéaire formé par les combinaisons linéaires de ces $\delta^{(i)}$ dont l'indice appartient à $\mathfrak{J}$. Nous disons que le système $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}\}$ est *complètement régulier* si pour chaque sous-ensemble, $\lambda^{(i_1)}, \ldots, \lambda^{(i_r)}$, d'eux, où $1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq k$, et pour chaque ensemble $\mathfrak{J}$ du même nombre r de nombres entiers, les $\lambda^{(i_\nu)}$ sont linéairement indépendants sur l'espace $E(\mathfrak{J})$.

Si $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, \lambda\}$ est complètement régulier, le maximum de $\lambda(a)$ sur $\mathfrak{F}'$

n'est atteint qu'en un point, au plus. C'est une généralisation du principe de l'arête.

Il nous faut chercher maintenant des conditions pour que le maximum ou le minimum de $\lambda(a)$ sur $\mathfrak{F}'$ soit atteint. Comme toujours en pareil cas, les clefs du problème sont la notion d'ensemble compact, introduite par Fréchet, et celle de fonction semi-continue, introduite par Baire [4]. Mais l'ensemble $\mathfrak{F}'$ n'est pas, en général, compact par rapport à la topologie forte, celle qui correspond à la norme de l'espace (l). Cette difficulté sera évitée si l'on utilise le fait que cet espace est l'espace conjugué de l'espace (c_0) des suites réelles convergentes vers zéro, avec la norme

$$\| \xi \| = \sup | \xi_n |.$$

Alors on a dans (l) aussi une topologie faible, par rapport à laquelle un ensemble borné et fermé est toujours compact. En se servant de quelques critères simples pour la continuité et la semi-continuité par rapport à cette topologie, on arrivera au théorème suivant :

Soit $\mathfrak{F}'$ borné et non vide. Soit $\lambda^{(i)} \in (c_0)$ pour $1 \leqq i \leqq m$, et soit

$$\liminf_{n \to \infty} \lambda_n^{(i)} \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad m < i \leqq k,$$

et

$$\liminf_{n \to \infty} \lambda_n \geqq 0.$$

Alors $\lambda(a)$ atteint son minimum sur $\mathfrak{F}'$. S'il y a une constante positive h telle que $\lambda_n \geqq h > 0$ pour $n = 0, 1, \ldots$, on peut se passer de la supposition que $\mathfrak{F}'$ soit borné.

Nous renvoyons le lecteur au texte du troisième chapitre pour l'énoncé de notre extension du principe de déformation à l'espace (l), parce qu'il est assez compliqué bien qu'intuitivement clair.

Comme application de cette théorie générale, qui jusqu'ici fait semblant d'appartenir plutôt à « l'analyse molle », envisageons les fonctions f représentées par des séries de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \qquad (a_n \geqq 0), \tag{3}$$

aux coefficients non négatifs, où les fonctions φ_n constituent une suite donnée de fonctions continues sur l'intervalle $0 < x \leqq 1$; nous exigeons que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < x < 1$$

et

$$\varphi_n(1) = 1 \qquad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Soit $0 < x_1 < \ldots < x_k \leqq 1$, soient $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{J}$ une répartition des nombres entiers $1, \ldots, k$ en trois classes, et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble de celles des fonctions (3) qui satisfont aux conditions

$$\begin{cases} f(x_i) = c_i & (i \in \mathfrak{E}), \\ f(x_i) \leqq c_i & (i \in \mathfrak{L}), \\ f(x_i) \geqq c_i & (i \in \mathfrak{G}). \end{cases} \tag{4}$$

L'ensemble $\mathfrak{F}$ correspond à un ensemble convexe dans l'espace (l) défini par des conditions de la forme (2). Par conséquent, si $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, il contient au moins un φ-nôme, c'est-à-dire une combinaison linéaire d'un nombre fini des φ_n ayant au plus k coefficients différents de zéro. Le minimum de $f(1)$ pour $f \in \mathfrak{F}$ est atteint pour un tel φ-nôme. Si $x_k = 1$, $k \in \mathfrak{L}$ et $0 < x_0 < 1$, le maximum et le minimum de $f(x_0)$ pour $f \in \mathfrak{F}$ sont aussi atteints pour de tels φ-nômes.

Pour que le principe de l'arête s'applique, quel que soit le choix des points x_i dans l'intervalle, il faut et il suffit que le système $\{\varphi_n\}$ soit *complètement Tchebyscheffien*, c'est-à-dire qu'une combinaison linéaire de r des φ_n ne s'annule qu'au plus $r - 1$ fois dans l'intervalle, à moins que tous les coefficients ne soient égaux à zéro. C'est une modification légère de la notion d'un système de Tchebyscheff (*cf.* Bernstein [7]). Donc, si cette condition est satisfaite, les φ-nômes extrémaux, dont l'existence est assurée dans le dernier paragraphe, sont uniques.

Si le système $\{\varphi_n\}$ est complètement Tchebyscheffien, et $x_k < 1$, le φ-nôme P, pour lequel le minimum de $f(1)$ sur $\mathfrak{F}$ est atteint, est appelé la *fonction principale* de $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des nombres entiers i tels que $P(x_i) = c_i$, soit $0 < x'_1 < \ldots < x'_{k+1} \leq 1$, et soit $\mathfrak{F}'$ l'ensemble des fonctions f de la forme (3) qui satisfont aux conditions

$$
\begin{aligned}
f(x'_i) &= c'_i \qquad (i \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B}),\\
f(x'_i) &\leq c'_i \qquad (i \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}),\\
f(x'_i) &\geq c'_i \qquad (i \in \mathfrak{J} \cap \mathfrak{B}),
\end{aligned}
$$

où $c'_i = P(x'_i)$ pour $1 \leq i \leq k$. Donc P est aussi la fonction principale de $\mathfrak{F}'$, et le minimum de $f(x'_{k+1})$ sur $\mathfrak{F}'$ est aussi atteint pour $f = P$. C'est une conséquence du principe de déformation.

Si les ensembles $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{J}$ sont vides, et si g est une fonction quelconque de la forme (3) et différente de P, la différence $g - P$ s'annule k fois au plus. Il s'ensuit que la fonction principale P réalise le minimum de $f(x)$ sur $\mathfrak{F}$ pour x dans les intervalles $(x_k, 1)$, (x_{k-2}, x_{k-1}), $\ldots$, et le maximum dans les intervalles (x_{k-1}, x_k), (x_{k-3}, x_{k-2}), ... Ces résultats montrent la puissance du principe de déformation.

Nous définissons *l'ordre* d'un φ-nôme P comme le maximum du nombre des zéros de $f - P$ pour f de la forme (3), $f \not\equiv P$. Nous concluons que, sous l'hypothèse que les ensembles $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{J}$ sont vides, la fonction principale de $\mathfrak{F}$ est d'ordre k au plus. Pour que son ordre soit inférieur à k, il faut et il suffit qu'elle soit la seule fonction de $\mathfrak{F}$.

Suivant Bernstein [7], nous disons que les fonctions φ_n forment un *système de Descartes* si le nombre de racines d'un φ-nôme dans l'intervalle $0 < x \leq 1$ ne peut dépasser le nombre de variations de signe de ses coefficients. En utilisant une réciproque de la règle de Descartes, nous démontrons que l'ordre d'un φ-nôme P est égal au nombre maximum des variations de signe des coefficients de $f - P$, lorsque f parcourt les fonctions de la forme (3). Moyennant ce résultat nous trouvons un procédé, sous l'hypothèse que $\{\varphi_n\}$ est un système de Descartes, pour déterminer, pas à pas, la fonction principale de $\mathcal{J}$ en réduisant le problème à un pareil à $k-1$ conditions.

D'une telle façon nous déterminons explicitement la fonction principale pour de petites valeurs de k, $k=1$, 2, 3. Il serait facile de le faire aussi pour $k=4$, 5.

L'étude des fonctions absolument monotones dans un intervalle fini remonte au cas $\varphi_n(x)=x^n$. Nous retrouvons les résultats de Bernstein [8] pour cette classe de fonctions. La détermination de la fonction principale pour $k=2$ nous donne une inégalité de Carlson [14] pour la moyenne quadratique d'une fonction analytique, analogue au théorème des trois cercles de Hadamard [28]. De la même manière, nous tirons du cas $k=3$ un théorème de quatre cercles pour la moyenne quadratique. Dans le cas le plus simple, celui où les rayons forment une progression géométrique l'énoncé peut se mettre dans la forme suivante :

Supposons que $f(z)$ est analytique dans le cercle $|z|\leqq \mathrm{R}$ et posons

$$\mathrm{M}_2(r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\mathrm{F}(x)=[\mathrm{M}_2(\sqrt{x})]^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2x^n.$$

Soit $\rho>1$, $0<x\rho^3\leqq \mathrm{R}^2$, et soit n le nombre entier déterminé par

$$\rho^n<\frac{\mathrm{F}(\rho^2x)-\mathrm{F}(\rho x)}{\mathrm{F}(\rho x)-\mathrm{F}(x)}\leqq\rho^{n+1}.$$

Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathrm{F}(x)\\ 1 & \rho^n & \rho^{n+1} & \mathrm{F}(\rho x)\\ 1 & \rho^{2n} & \rho^{2n+2} & \mathrm{F}(\rho^2 x)\\ 1 & \rho^{3n} & \rho^{3n+3} & \mathrm{F}(\rho^3 x)\end{vmatrix}\geqq 0.$$

Étant donné les valeurs de ρ, $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(\rho x)$ et $\mathrm{F}(\rho^2 x)$, cette inégalité donne la plus petite valeur possible de $\mathrm{F}(\rho^3 x)$.

L'énoncé général du théorème de quatre cercles n'est qu'un peu plus compliqué. A l'aide de la même méthode nous arrivons à la forme générale du théorème de k cercles, et nous pourrions déterminer cette forme explicitement aussi pour $k=5$, 6.

Les méthodes de Bernstein [8] ne s'appliquent qu'à des problèmes dont les fonctions extrémales sont d'ordre k au plus. Du point de vue géométrique, ce sont des problèmes correspondant aux plans d'appui du « polyèdre » $\mathcal{J}$ qui le rencontrent en un « sommet » particulier. En effet, la fonction principale de $\mathcal{J}$ en est la seule qui soit d'ordre $\leqq k$. D'autres plans d'appui correspondront à des problèmes dont les fonctions extrémales seront d'autres sommets de $\mathcal{J}$.

Quand on aborde les problèmes analogues pour les fonctions absolument monotones de plusieurs variables, on rencontre de nouveaux phénomènes et des difficultés qui n'ont pas été surmontées jusqu'à présent. On est conduit à des problèmes d'approximation diophantienne dont l'étude serait intéressante également pour d'autres buts.

Nous traitons dans le cinquième chapitre une généralisation aux espaces de Banach d'une partie des résultats déjà obtenus pour l'espace (l). Nous ne jugeons pas cette généralisation assez importante pour en discuter les détails ici.

Il y a, cependant, une autre manière, de plus grande conséquence, de généraliser la théorie des chapitres précédents. Suivant Alexandroff [2] nous appelons *charge* une fonction d'ensemble qui est additive dans le sens restreint. (*Cf.* De La Vallée Poussin [7].)

Alexandroff a développé la théorie d'intégration par rapport à une charge, théorie que nous résumons dans le sixième chapitre. Puisque les charges sur un ensemble S sont en correspondance biunivoque avec les éléments de l'espace B^* conjugué à l'espace B des fonctions réelles et bornées sur S, avec la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|,$$

on a le droit de les identifier avec les éléments de B^*.

Envisageons maintenant un espace S où sont données $k+1$ fonctions réelles et bornées, $f_1, \ldots, f_{k+1}$, et considérons l'ensemble $\mathfrak{M}$ des charges non négatives μ qui satisfont aux conditions

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int f_i \, d\mu = c_i, & 1 \leqq i \leqq m, \\ \displaystyle\int f_i \, d\mu \leqq c_i, & m < i \leqq k, \end{cases}$$

et cherchons la charge μ de $\mathfrak{M}$ pour laquelle l'intégrale $\int f_{k+1} \, d\mu$ atteint sa plus grande valeur. L'ensemble $\mathfrak{M}$ est défini par les conditions linéaires (5) et les inégalités linéaires

$$\mu(E) \geqq 0,$$

où E parcourt tous les sous-ensembles de S. Par conséquent, $\mathfrak{M}$ est analogue à un polyèdre convexe dans un espace à un nombre fini de dimensions. Mais c'est un « polyèdre » d'une espèce spéciale qui a été introduite par Krein et Šmulian [42], à savoir, c'est un ensemble convexe dans l'espace conjugué d'un espace de Banach, dont l'intersection avec une sphère fermée quelconque est compacte par rapport à la topologie faible. Ces auteurs appellent un tel ensemble *régulièrement convexe*.

Quels sont les « sommets » de $\mathfrak{M}$, en d'autres termes, ses points extrêmes? Pour répondre à cette question, il faut diriger notre attention sur ces charges qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. Une telle charge s'appelle *charge première*. Un point extrême de $\mathfrak{M}$ est une combinaison linéaire, aux coefficients non négatifs, d'au plus k charges premières. Les charges premières sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers dans l'algèbre Booléenne des sous-ensembles de S. Une distribution qui consiste en une charge discrète de $+1$ placée en un point particulier est une charge première d'une sorte triviale; nous l'appelons *charge atomique*. D'après les recherches de Tarski et Ulam, il existe beaucoup plus de charges premières non triviales que de charges atomiques. Néanmoins si l'espace S est un espace topologique compact, chaque charge première est équivalente à une charge atomique en ce qui concerne l'intégration des fonctions continues.

Nous employons des propriétés des ensembles régulièrement convexes découvertes par Krein, Šmulian et Milman, [41], [42], en premier lieu pour démontrer que si le maximum de l'intégrale est atteint sur $\mathfrak{M}$, il l'est en un point extrême au moins, et en second lieu pour obtenir des conditions simples pour que ce maximum soit atteint. Si S est un espace topologique compact, si les fonctions données f_i y sont continues et si nous comptons comme égales deux charges μ_1 et μ_2 telles que $\int f\,d\mu_1 = \int f\,d\mu_2$, quelle que soit la fonction continue f, alors la condition géométrique du principe de l'arête se traduit par la condition que le système $\{f_1, \ldots, f_{k+1}\}$ est complètement Tchebyscheffien. Cela n'est possible que si l'espace S est homéomorphe à un ensemble linéaire. Il est facile d'étendre aussi le principe de déformation à cette situation générale.

Comme application de notre théorie, envisageons les fonctions représentables par la formule

$$f(x) = \int_S K(x, s)\,d\mu(s), \tag{6}$$

où K est un noyau donné et μ est une charge non négative sur l'espace S. Nous considérons l'ensemble des fonctions de cette classe qui satisfont aux conditions (4), où les x_i sont des points distincts donnés et nous cherchons l'une d'elles pour laquelle la valeur de $f(x_0)$ est la plus grande ou la plus petite possible. Si l'espace S est compact et le noyau est continu pour chaque point x, ces valeurs extrêmes sont atteintes par des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i K(x, s_i), \qquad a_i \geqq 0, \qquad 1 < i \leqq k,$$

ce que nous appelons un K-nôme, aux coefficients non négatifs. A l'aide du principe de l'arête, nous distinguons une classe générale de noyaux, celle des noyaux Tchebyscheffiens, pour lesquels la fonction extrémale est toujours uniquement déterminée.

Quand le domaine de variation de x est un intervalle et le noyau est aussi continu en x, on peut encore appliquer le principe de déformation, et l'on retrouve les propriétés que nous avons démontrées déjà pour les fonctions de la forme (3). Pour une classe de noyaux, à savoir les noyaux Cartésiens, il y a un procédé trivial pour déterminer l'ordre de K-nôme aux coefficients non négatifs.

Le cas $K(x, s) = e^{xs}$, où $-\infty < x \leqq 0$, $0 \leqq s < +\infty$, nous donne les résultats principaux de Bernstein [8] sur les fonctions absolument monotones sur une demi-droite. En posant $K(x, s)$ égal au noyau de Poisson, on obtient des résultats sur l'interpolation des fonctions harmoniques et non négatives dans un cercle.

Le cas où les points x_i se confondent à l'origine est le problème classique de Carathéodory et Fejér [11], [12], sur les coefficients de Fourier d'une fonction positive. Si $K(x, s)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$K(x, s) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp - \left(\frac{\xi - s}{4t}\right)^2, \qquad x = (\xi, t), \qquad t > 0, \qquad -\infty < \xi < +\infty,$$

où S est l'axe réel, nous obtenons des résultats sur les solutions non négatives de cette équation (*cf.* Widder [73]). Un de nos élèves, M. Resch [53], en a trouvé d'analogues des théorèmes de Harnack sur les fonctions harmoniques. Le cas $K(x, s) = (x + s)^{-1}, x \geqq 0, s \geqq 0$, donne des propriétés nouvelles de transformées de Stieltjes (*cf.* Widder [72]). Le problème des moments, en particulier les généralisations de Wald [68] de l'inégalité de Tchebyscheff dans la théorie de probabilité, fournissent d'autres applications de la théorie générale.

Dans l'appendice nous discutons quelques compléments au théorème des trois cercles de Hadamard. D'abord nous traitons un problème dans l'espace de Hilbert : parmi les éléments f tels que $\|f\| = 1$ et $(Af, f) = \tau$, où A est une opération hermitienne bornée et non négative, quels sont ceux qui réalisent le maximum du module du produit scalaire (f, f_0) avec l'élément donné f_0 ? Pour répondre nous introduisons la fonction

$$F(x) = [(xI - A)^{-1} f_0, f_0],$$

où I est l'identité. Si C est la borne supérieure de l'opération A, l'équation

$$x + \frac{F(x)}{F'(x)} = \tau$$

a, en général, une solution unique x_0 hors de l'intervalle [O, C], et le maximum de $|(f, f_0)|$ est égal à

$$\frac{|F(x_0)|}{\sqrt{-F'(x_0)}}.$$

Cette valeur est atteinte pour $f = \frac{\alpha g_0}{\|g_0\|}$, où $g_0 = (x_0 I - A)^{-1} f_0$ et $|\alpha| = 1$.

Comme application, nous considérons les fonctions analytiques dans $|z| \leqq 1$ dont les valeurs de $\mathbf{M}_2(r)$ et $\mathbf{M}_2(1)$ sont données, et nous cherchons la plus grande valeur possible du maximum $\mathbf{M}(\rho)$ du module de la fonction sur un cercle intermédiaire $|z| = \rho$, où $r \leqq \rho < 1$. Nous obtenons

$$\mathbf{M}(\rho) \leqq \mathbf{K}_1(r, \rho)\mathbf{M}_2(r)^{\frac{\log \rho}{\log r}} \mathbf{M}_2(1)^{\frac{\log \frac{r}{\rho}}{\log r}}, \qquad \text{pour} \quad r < \rho < 1,$$

et

$$\mathbf{M}(r) \leqq \mathbf{K}_2(r)\mathbf{M}_2(r) \log \frac{\mathbf{M}_2(1)}{\mathbf{M}_2(r)}, \qquad \text{si} \quad \mathbf{M}_2(r) \leqq \frac{\mathbf{M}_2(1)}{2},$$

où $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{K}_2$ sont des constantes qui ne dépendent que des rayons des cercles. A l'aide de telles inégalités on peut obtenir, en partant des inégalités du quatrième chapitre pour la moyenne quadratique, de pareilles inégalités pour le maximum du module $M(r)$. Les inégalités qu'on obtient par ce raisonnement ne sont pas les meilleures possibles, mais elles sont à peu près de l'ordre de grandeur correct.

Dans une remarque finale nous signalons un phénomène nouveau qui apparaît dans la recherche d'une inégalité de quatre cercles pour le maximum du module, à savoir, que la fonction extrémale a beaucoup de zéros dans chaque direction. Voici un contraste avec le cas de trois cercles, où la fonction extrémale est cz^n pour des valeurs données de $M(r)$ et $M(1)$, si $\log \frac{M(1)}{M(r)} \Big/ \log \frac{1}{r}$ est un nombre entier, ce qui a lieu pour des valeurs arbitrairement grandes de $\frac{M(1)}{M(r)}$.

Nous avons commencé ces recherches sous l'influence du regretté Professeur J. D. Tamarkin, et nous voudrions dire combien nous avons profité de nos discussions avec lui et combien étaient utiles aux mathématiciens américains ses vastes connaissances, dont il faisait part si généreusement aux jeunes, avec tant de goût et de charme.

Les quatre premiers chapitres sont écrits sans faire usage de la théorie générale des espaces de Banach de façon qu'un lecteur, qui s'intéresse plutôt aux applications, puisse les comprendre sans difficulté.

I. — Les principes du sommet et de déformation.

Soit E_n l'espace affine à n dimensions. Un *corps convexe* dans E_n est un ensemble convexe, fermé, et borné. Si E' est le plus petit sous-espace linéaire de E_n qui contient le corps convexe K, alors comme sous-ensemble de l'espace E' le corps K contient des points intérieurs. Un point de K est appelé *point extrême* de K, s'il n'est intérieur à aucun segment contenu en K, c'est-à-dire qu'il ne se trouve pas entre deux autres points de K. Si K est un corps convexe quelconque, il possède au moins un point extrême; en effet, K est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrêmes (*cf.* [9], p. 15). Un *tronçon* dans E_n est l'intersection non vide d'un nombre fini d'hyperplans et de demi-espaces (Raumstück en [3]). Un *polyèdre convexe* est un tronçon borné. Les points extrêmes d'un tronçon sont ses *sommets;* c'est-à-dire, les intersections de n faces linéairement indépendantes. Un *hyperplan d'appui* de K est un hyperplan H tel que tous les points de K se trouvent sur H ou d'un même côté de H, et tel que la distance de K à H est égal à zéro. Dans la suite de ce chapitre, nous désignons par K un tronçon (ou un polyèdre convexe) dans E_n.

Théorème 1. — *Chaque hyperplan d'appui du corps convexe* K *contient au moins un point extrême de* K.

Démonstration. — Soit H un hyperplan d'appui de K. Alors $H \cap K$ est un corps convexe et possède donc au moins un point extrême P. Si P n'était pas un point extrême de K, il y aurait des points Q et R dans K tels que le point P se trouve entre Q et R. Si l'un des points Q et R appartient à H, il en est de même pour l'autre, de sorte que P ne serait pas un point extrême de $H \cap K$. Il s'ensuit que les points Q et R se trouvent sur des côtés opposés de H, ce qui est contraire à l'hypothèse que H est un hyperplan d'appui.

Corollaire 1 *a*. — *Si* K *est un tronçon dans* E_n, *et* H *est un hyperplan d'appui, et si* $H \cap K$ *est borné, alors* H *contient un sommet de* K.

Corollaire 1 *b*. — *Soit* f *une fonction linéaire sur* E_n, *et soit* K *un tronçon. Supposons que pour une valeur de la constante* C *l'intersection de* K *avec le demi-espace* $f(x) \geqq C$ *soit non vide et bornée. Alors l'ensemble des points* x *où* f *atteint son maximum sur* K *contient au moins un sommet.*

Le principe simple énoncé au corollaire 1 *b* est tout à fait évident, et il est certainement bien connu; néanmoins, nous n'avons pas réussi à trouver une formulation explicite dans la littérature. Sa puissance dans les applications ne semble guère être reconnue.

Le théorème suivant donne un critère, que nous appelons le « principe de l'arête », pour que le sommet extrémal soit uniquement déterminé.

Théorème 2. — *Soient* K *un tronçon et* H *un hyperplan d'appui de* K, *et soit* P *un sommet de* K *contenu en* H; *pour que* P *soit le seul point de* $H \cap K$, *il faut et il suffit qu'aucune arête de* K *issue de* P *soit contenue dans* H.

Corollaire 2 *a*. — *Pour que la fonction linéaire* f *atteigne son maximum sur* K *en un sommet unique, il suffit qu'aucune arête de* K *ne soit parallèle au hyperplan* $f(x) = 0$.

Dans les applications ce corollaire est plus utile que le théorème 2, parce qu'on ne sait pas ordinairement quel sommet est le sommet extrémal.

Passons maintenant à la formulation analytique de ces résultats. Supposons que K est l'intersection des demi-espaces et hyperplans

$$l_i(x) = b_i, \qquad 1 \leqq i \leqq r, \tag{1}$$

$$l_i(x) \geqq b_i, \qquad r < i \leqq s, \qquad 0 \leqq r \leqq n \leqq s, \tag{2}$$

où

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Alors les sommets de K sont les points où il y a égalité dans (1) et (2) pour n fonctions linéairement indépendantes parmi les l_i. Le maximum d'une fonction linéaire f sur K, telle que l'intersection de K avec le demi-espace $f(x) \geqq C$ est non vide et bornée, est atteint en un tel point, de sorte qu'au plus $s - n$ relations d'inégalité y sont valables.

La condition du corollaire $2a$ résulte de la suivante :

$$
(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{n-1} 1} & \dots & a_{i_{n-1} n} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} \neq 0,
$$

où $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, quel que soit l'ensemble de $n-1$ fonctions linéairement indépendantes choisies parmi les l_i. Si la condition (3) est satisfaite, nous disons que le système (K, f) ou $(l_1, \dots, l_s, f)$ est *régulier*. Si chaque ensemble de n des fonctions $l_1, \dots, l_s, f$ est linéairement indépendant, alors nous disons que le système $(l_1, \dots, l_s, f)$ est *complètement régulier* (abrégé c. r.).

Un complément utile au principe du sommet est celui que nous appelons le « principe de déformation ». Pour sa démonstration nous avons besoin de quelques lemmes. Nous désignerons la longueur euclidienne du vecteur x de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ par $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, et le produit scalaire des vecteurs x et y par xy.

Lemme 3. — *Si* $\|a^{(i)}\| = \|x\| = 1$, $1 \leqq i \leqq s$, $\varepsilon > 0$, *et si*

$$
(4) \qquad \begin{cases} |a^{(i)}x| \leqq \varepsilon, & 1 \leqq i \leqq r, \\ a^{(i)}x \geqq -\varepsilon, & r < i \leqq s, \end{cases}
$$

et si K *est le cône convexe défini par*

$$
(5) \qquad \begin{cases} a^{(i)}y = 0, & 1 \leqq i \leqq r, \\ a^{(i)}y \geqq 0, & r < i \leqq s, \end{cases}
$$

alors il y a un point y dans K *dont la distance à x ne dépasse* $\frac{2\varepsilon}{\tau}$, *et tel que* $\|y\| \leqq 1$. *La grandeur τ est définie comme le minimum de* $\left\|\sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)}\right\|$, *lorsque les c_i parcourent toutes les valeurs satisfaisant aux conditions*

$$
(6) \qquad c_i \geqq 0, \quad r < i \leqq s \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{s} |c_i| = 1.
$$

Démonstration. — Soit K_1 l'intersection de K avec la sphère $\|y\| \leqq 1$, et soit

$$
(7) \qquad H(u) = \max_{y \in K_1} (uy)
$$

la fonction d'appui (« Stützfunction », *cf.* [9]) de K_1. Établissons d'abord que

$$
H(u) = \min \left\| u + \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \right\| = H_1(u),
$$

où les c_i parcourent toutes les valeurs telles que $c_i \geqq 0$ pour $r < i \leqq s$. Cette formule a été suggérée par une remarque de M. F. Riesz sur le travail de M. Lannér [43], que celui-ci a fait connaître dans une conférence à l'Université de Lund.

Évidemment, si $y \in K_1$ et $c_i \geqq 0$ pour $r < i \leqq s$, on a

$$uy = \left[u + \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)}\right] y - \sum_{i=1}^{s} c_i [a^{(i)} y] \leqq \left\| u + \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \right\|,$$

de sorte que $H(u) \leqq H_1(u)$.

Choisissons maintenant c_i, $1 \leqq i \leqq s$, de manière que $c_i \geqq 0$ pour $r < i \leqq s$ et $\left\| u + \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \right\| = H_1(u)$ et posons $z = u + \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)}$. Or, si $1 \leqq i \leqq r$,

$$\| z + t a^{(i)} \|^2 = \| z \|^2 + 2t[a^{(i)} z] + t^2 \geqq \| z \|^2$$

quel que soit t; il en résulte que

$$a^{(i)} z = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq r.$$

De façon analogue, on démontre que

$$a^{(i)} z \geqq 0, \qquad r < i \leqq s.$$

Le point z est donc dans K, et $\frac{z}{\| z \|} \in K_1$. Par conséquent, on a

$$uz \leqq H(u) \| z \|.$$

Mais

$$\left\| u + t \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \right\|^2 = \| u + t(z-u) \|^2 \geqq \| z \|^2 + 2(t-1) z(z-u) + (t-1)^2 \| z - u \|^2 \geqq \| z \|^2$$

pour $t \geqq 0$. On déduit que $z(z-u) = 0$, ou ce qui est équivalent,

$$uz = \| z \|^2,$$

d'où

$$H_1(u) = \| z \| \leqq H(u),$$

ce qui achève la démonstration de notre formule.

Considérons maintenant le point y de K_1 le plus près du point x. Or, quel que soit Y dans K_1, on a

$$\| x - tY - (1-t) y \|^2 \geqq \| x - y \|^2 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Par le même raisonnement nous obtenons

$$(x-y) Y \leqq (x-y) y;$$

donc

$$H(x-y) = (x-y) y.$$

Nous avons démontré plus haut qu'il existe des constantes c_i telles que $c_i \geqq 0$ pour $r < i \leqq s$,

$$\left\| x - y + \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \right\| = \mathrm{H}(x - y),$$

et

$$w = x - y + \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \in \mathrm{K}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} x(x-y) &= xw - \sum_{i=1}^{s} c_i [a^{(i)} x] \leqq \| w \| + \varepsilon \sum_{i=1}^{s} | c_i | \\ &\leqq \| w \| + \tau^{-1} \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \right\| \leqq \| w \| + \tau^{-1} \varepsilon (\| w \| + \| x - y \|) \\ &\leqq \mathrm{H}(x-y) + 2\tau^{-1} \varepsilon \| x - y \| \leqq y(x-y) + 2\tau^{-1} \varepsilon \| x - y \|, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aussitôt l'inégalité cherchée. Nous avons utilisé ici le fait évident que $\mathrm{H}(u) \leqq \| u \|$ pour tous les u.

La grandeur τ possède une interprétation très simple. Un tronçon dans E_n à $n - r$ dimensions avec k faces à $n - r - 1$ dimensions peut être représenté d'une manière essentiellement unique comme l'intersection de r hyperplans et k demi-espaces, et le nombre $s = r + k$ des équations et inégalités dans une telle représentation « normalisée » de K est minimal. Si $\tau = 0$, alors la représentation (5) de K n'est pas normalisée, et réciproquement, de sorte que la grandeur τ est une mesure de la « normalité » de cette représentation de K (*cf.* Reidemeister [52], Weyl [71]).

Lemme 4. — *Supposons que le tronçon défini par les conditions*

$$(8) \qquad \begin{cases} l_i(x) = a^{(i)} x = b_i, & 1 \leqq i \leqq r, \\ l_i(x) = a^{(i)} x \geqq b_i, & r < i \leqq s, \end{cases}$$

n'est pas vide, que $(l_1, \ldots, l_s)$ *est c. r., et que*

$$\| a^{(i)} \|^2 + b_i^2 = 1, \qquad 1 \leqq i \leqq s.$$

Soit

$$\tau^2 = \min \left[\left\| \sum_{i=1}^{s} c_i a^{(i)} \right\|^2 + \left(\sum_{i=1}^{s} c_i b_i \right)^2 \right],$$

où les c_i parcourent toutes les valeurs telles que

$$c_i \geqq 0, \qquad r < i \leqq s,$$
$$\sum_{i=1}^{s} | c_i | = 1,$$

et $c_i = 0$ *avec n exceptions au plus, et soit* $0 \leqq 2\varepsilon < \tau$. *Si*

$$(9)\qquad \begin{cases} |l_i(x) - b_i| \leqq \varepsilon, & 1 \leqq i \leqq r, \\ l_i(x) - b_i \geqq -\varepsilon, & r < i \leqq s, \end{cases}$$

alors il y a un point y dans K *tel que*

$$\| x - y \| \leqq \frac{2\varepsilon(1 + \| x \|)}{\tau - 2\varepsilon}.$$

Démonstration — Dans E_{n+1}, soit $A^{(i)} = (a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}, -b_i)$, $1 \leqq i \leqq s$ et $X = R^{-1}(x_1, \ldots, x_n, 1)$, ou $R^2 = 1 + \| x \|^2$. Soit σ un ensemble de n entiers dans l'intervalle $1 \leqq i \leqq s$. En vertu de (9), on a

$$| A^{(i)} X | \leqq \frac{\varepsilon}{R}, \qquad 1 \leqq i \leqq r,$$

$$A^{(i)} X \geqq \frac{\varepsilon}{R}, \qquad r < i \leqq s.$$

Il résulte donc du lemme 3 qu'il existe un point Y_σ tel que

$$A^{(i)} Y_\sigma = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq r \qquad (i \in \sigma),$$
$$A^{(i)} Y_\sigma \geqq 0, \qquad r < i \leqq s \qquad (i \in \sigma),$$

et

$$\| X - Y_\sigma \| \leqq \frac{2\varepsilon}{R}.$$

Posons $Y_\sigma = (y_1, \ldots, y_{n+1})$, $z = (y_1, \ldots, y_n)$, Alors

$$\| z - R^{-1} x \|^2 + | y_{n+1} - R^{-1} |^2 \leqq \frac{4\varepsilon^2}{R^2 \tau^2},$$

d'où

$$| R y_{n+1} - 1 | \leqq \frac{2\varepsilon}{\tau} < 1,$$

et

$$| (R y_{n+1})^{-1} - 1 | \leqq \frac{2\varepsilon}{\tau - 2\varepsilon}.$$

Posons

$$y_\sigma = \frac{z}{y_{n+1}}.$$

Alors

$$l_i(y_\sigma) = b_i, \qquad 1 \leqq i \leqq r \qquad (i \in \sigma),$$
$$l_i(y_\sigma) \geqq b_i, \qquad r < i \leqq s \qquad (i \in \sigma),$$

et

$$\| x - y_\sigma \| \leqq \frac{\| R^{-1} x - z \|}{y_{n+1}} + \| x \| . | 1 - (R y_{n+1})^{-1} |$$
$$\leqq 2\varepsilon \left(\frac{1 + \| x \|}{\tau - 2\varepsilon} \right) = \varepsilon_1.$$

Choisissons un point u de K et supposons que S_i est l'intersection de l'$i^{\text{ième}}$ hyperplan ou demi-espace dans (8) avec la sphère de rayon $\| u - x \| + \varepsilon_1$ et centre u.

Ces sphères S_i et la sphère S_{s+1} de rayon ε_1 et centre x forment un système de $s+1$ corps convexes dans E_n, tel que tout sous-ensemble de $n+1$ de ceux-ci a une intersection non vide, contenant y_σ ou u selon que la sphère S_{s+1} y est comprise ou non. Notre conclusion résulte maintenant du théorème de Helly [36].

Corollaire 4*a*. — *Soit* $K(t)$ *le tronçon défini par*

$$(10) \qquad \begin{cases} l_i(x, t) = b_i(t), & 1 \leq i \leq r, \\ l_i(x, t) \geq b_i(t), & r < i \leq s, \end{cases}$$

où $l_i(x, t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j$, $1 \leq i \leq s$, *et les fonctions* $a_{ij}(t)$ *et* $b_i(t)$ *sont définies dans un voisinage* U *de* $t = 0$ *et continues pour* $t = 0$. *Supposons que* $(l_1, \ldots, l_s)$ *est c. r. pour* $t = 0$, *que* $K(t)$ *n'est pas vide pour* $t \in U$, *et que* $P \in K(0)$.

Alors il existe une fonction $P(t)$, *définie dans un voisinage* U_1 *de* $t = 0$, *telle que* $P(t) \in K(t)$ *pour* $t \in U_1$ *et* $\lim_{t \to 0} P(t) = P(0) = P$.

Démonstration. — On peut supposer que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)^2 + b_i(t)^2 = 1, \qquad 1 \leq i \leq s.$$

Posons $a^{(i)}(t) = [a_{i1}(t), \ldots, a_{in}(t)]$. En vertu de la continuité des a_{ij} et b_i, le système $(l_1, \ldots, l_s)$ est c. r. et la grandeur $\tau(t)$ est bornée inférieurement, $\tau(t) \geq h > 0$, dans un voisinage de $t = 0$. Or, pour $1 \leq i \leq r$, on a

$$\begin{aligned} | l_i(P, t) - b_i(t) | &= | [a^{(i)}(t) - a^{(i)}(0)] P + b_i(0) - b_i(t) | \\ &\leq \| a^{(i)}(t) - a^{(i)}(0) \| . \| P \| + | b_i(t) - b_i(0) | = \varepsilon_i(t) < \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

et, de pareille manière,

$$l_i(P, t) - b_i(t) \geq -\varepsilon_i(t) > -\frac{h}{2}$$

pour $r < i \leq s$, et pour t dans un voisinage U_1 de $t = 0$. Il y a donc un point $P(t)$ dans $K(t)$ tel que

$$\| P(t) - P \| \leq 2\varepsilon(t) \frac{1 + \| P \|}{h - 2\varepsilon(t)}$$

pour

$$t \in U_1, \qquad \text{où} \quad \varepsilon(t) = \max_{1 \leq i \leq s} \varepsilon_i(t).$$

Corollaire 4*b*. — *Si, dans le corollaire* 4*a*, *le point* P *est un sommet de* $K(0)$ *et* $K(t)$ *est un polyèdre pour* $t \in U$, *alors on peut choisir pour* $P(t)$ *un sommet de* $K(t)$.

Démonstration. — Supposons que le nombre de dimensions de $K(0)$ est égal à k. Donc, il en est de même pour le cône des normales à P dans l'enveloppe linéaire de $K(0)$. Par conséquent, il existe un vecteur λ dans l'intérieur de ce cône qui n'est perpendiculaire à aucune arête de $K(t)$ pour t dans un voisinage U_1 suffisamment petit de $t=0$. Alors la fonction $f(x)=\lambda x$ atteint son maximum sur $K(t)$ en un sommet unique $P(t)$ et $P(0)=P$. Vu le corollaire, il existe une fonction $Q(t)$ telle que $Q(t)\in K(t)$ pour $t\in U_1$ et $\lim\limits_{t\to 0} Q(t)=Q(0)=P$. On a donc

$$\liminf_{t\to 0} f[P(t)] \geq \lim_{t\to 0} f[Q(t)] = f(P).$$

Il s'ensuit que le seul point d'accumulation de $P(t)$ lorsque t tend vers zéro est P.

Si P est un sommet du polyèdre défini par (10), nous définissons son *étiquette* comme l'ensemble des entiers i pour lesquels $l_i(P, t) > b_i(t)$. Le sommet d'étiquette σ sera désigné par P_σ. Remarquons que le nombre d'entiers constituant σ est au plus $s-n$. Si σ_1 et σ_2 sont des sous-ensembles de $\{1, \ldots, s\}$, si le nombre d'entiers constituant $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est au plus $s-n$, si $(l_1, \ldots, l_s)$ est c. r., et si les sommets P_{σ_1} et P_{σ_2} existent, alors ils doivent coïncider et $\sigma_1=\sigma_2$.

THÉORÈME 5. — *Soit* $K(t)$ *un polyèdre convexe défini par* (10), *et soit*

$$f(x, t)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) x_i,$$

où les fonctions $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ *et* $\lambda_i(t)$ *sont continues dans l'intervalle* $0\leq t\leq 1$, *et le système* $(l_1, \ldots, l_s, f)$ *est c. r. dans cet intervalle. Soit* $P(t)$ *le point de* $K(t)$ *où* $f(x, t)$ *atteint son maximum et soit* $\sigma(t)$ *son étiquette. Alors* $P(t)$ *est continu et* $\sigma(t)$ *est semi-continu inférieurement dans l'intervalle.* [*C'est-à-dire que si* $0\leq t\leq 1$, *il y a un voisinage* U *de* t *tel que* $\sigma(t)\subset\sigma(t_1)$ *pour* $t_1\in U$.]

Démonstration. — Par le corollaire **2a**, nous savons déjà que le maximum de f sur $K(t)$ est atteint en un sommet $P(t)$ uniquement déterminé. Soit $0\leq t_k\leq 1$, $t_k\to t_0$. Nous allons montrer que $P(t_k)\to P(t_0)$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour l'ensemble $\sigma(t_k)$, on peut supposer, sans restriction de généralité, que l'étiquette $\sigma(t_k)=\sigma$ ne dépend pas de k. Choisissons n entiers $i_1, \ldots, i_n$ de l'intervalle qui n'appartiennent pas à l'ensemble σ.

Le point $Q(t)$ défini par les équations

$$l_{i_\nu}(x, t)=b_{i_\nu}(t), \qquad 1\leq\nu\leq n,$$

est uniquement déterminé et est une fonction continue de t par suite de l'hypothèse de la régularité complète, et $Q(t_k)=P(t_k)$ $(k=1, 2, \ldots)$. Le point $P(t_k)$ tend donc vers $Q(t_0)$. Mais il existe, vu le lemme **4a**, une fonction $R(t)$ définie dans un voisinage U de t_0 telle que $R(t)\in K(t)$ pour $t\in U$ et

$$\lim_{t\to t_0} R(t)=R(t_0)=P(t_0).$$

Aussitôt que k dépasse une certaine valeur $t_k\in U$, on a

$$f[R(t_k), t_k]\leq f[P(t_k), t_k],$$

d'où

$$f[P(t_0), t_0]\leq f[Q(t_0), t_0].$$

Puisque le maximum de $f(x, t_0)$ sur $K(t_0)$ est atteint au seul point $P(t_0)$, il s'ensuit que $P(t_0) = Q(t_0) = \lim_{k \to \infty} P(t_k)$, ce qui est la conclusion désirée. Il en est de même pour une suite de nombres t_k tendant vers t_0 d'une manière quelconque, parce que ce résultat s'applique à chacune des sous-suites, en nombre fini, correspondant à des valeurs constantes de l'étiquette $\sigma(t_k)$. Le théorème s'ensuit maintenant par un raisonnement trivial.

Corollaire 5*a*. — *Sous les hypothèses du théorème* 5, *si* $\sigma(0) = \sigma$ *et si* $P_\sigma(t)$ *existe et se trouve dans* $K(t)$ *pour* $0 \leqq t \leqq 1$, *alors* $\sigma(t) = \sigma$ *et* $P(t) = P_\sigma(t)$ *pour* $0 \leqq t \leqq 1$.

Démonstration. — Soit t_0 la borne inférieure des valeurs de t, s'il en existe, telles que $P(t) \neq P_\sigma(t)$. Si $t_0 < 1$, il y a un $h > 0$ tel que $\sigma(t_0) \subset \sigma(t)$ pour $|t - t_0| < h$, $0 \leqq t \leqq 1$. Puisque $P_\sigma(t) = P(t)$ pour $0 \leqq t \leqq t_0$, alors $P_\sigma(t_0) = P(t_0)$ et $\sigma(t_0) = \sigma$. Mais en vertu des remarques ci-dessus, si $\sigma \subset \sigma(t)$, alors

$$P_\sigma(t) = P_{\sigma(t)}(t) = P(t),$$

et alors $\sigma = \sigma(t)$ aussi pour $t_0 \leqq t \leqq t_0 + h$, ce qui contredit la définition de t_0.

Cela montre que si les hyperplans et demi-espaces qui définissent K et la fonction f dont le maximum est recherché varient continûment de façon que le système reste complètement régulier et le point P_σ reste dans K, alors l'étiquette du sommet où le maximum est atteint reste constante. Ce *principe de déformation* est fondamental dans la suite.

Il sera utile de considérer quelques exemples simples. Soit $n = 2$, et prenons

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= (\sin\theta, \cos\theta), \\ a^{(2)} &= (\sin\theta, -\cos\theta), \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ x &= (-1, 0). \end{aligned}$$

Alors

$$a^{(1)}x = a^{(2)}x = -\sin\theta = -\varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} \tau &= \min_{\substack{c_1 + c_2 = 1 \\ c_1, c_2 \geq 0}} \| c_1 a^{(1)} + c_2 a^{(2)} \| \\ &= \min_{0 \leq c_1 \leq 1} \sqrt{\sin^2\theta + (1 - 2c_1)^2 \cos^2\theta} = \sin\theta. \end{aligned}$$

Le point du secteur angulaire $K(\theta)$ défini par

$$\begin{aligned} l_1(y, \theta) &= a^{(1)}y \geqq 0, \\ l_2(y, \theta) &= a^{(2)}y \geqq 0, \end{aligned}$$

qui est le plus proche de x est l'origine. On a donc dans le lemme 3, $y = 0$ et $\frac{\varepsilon}{\tau} = 1 = \| x - y \|$, ce qui montre qu'au facteur numérique 2 près, la conclusion ne peut pas être améliorée.

Concernant le corollaire $4a$, nous voyons que $x \in K(0)$, mais que x ne se trouve proche d'aucun point de $K(\theta)$ pour $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Bien entendu, (l_1, l_2) n'est pas complètement régulier pour $\theta = 0$.

Considérons maintenant le polygone $K(t)$ défini par

$$l_1(x, t) = x_1 - 2x_2 \geq 0,$$
$$l_2(x, t) = x_1 + 2x_2 \geq 0,$$
$$l_3(x, t) = -x_1 + x_2 \geq -1,$$

$$l_4(x, t) = \begin{cases} 2x_1 - x_2 \\ (4-4t)x_1 + (8t-5)x_2 \\ x_1 + x_2 \end{cases} \geq b_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - t, & 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ t - \frac{3}{4}, & \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

et posons $f(x, t) = -x_1$ pour $0 \leq t \leq 1$. Alors le point $P(t)$ où la fonction f atteint son maximum sur $K(t)$ est

$$P(t) = \begin{cases} \left[\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2} - t\right), \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - t\right)\right], & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (0, 0), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \left[\frac{2}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right), \frac{1}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)\right], & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

L'étiquette du sommet $P(t)$ est

$$\sigma(t) = \begin{cases} \{1, 3\}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \{3\}, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \{2, 3\}, & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La variation de $\sigma(t)$ provient de ce que $P_{\{1,3\}}$ n'existe pas pour $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}$.

II. — Systèmes Tchebyscheffiens et Cartésiens de fonctions.

Soit φ_n, $0 \leq n \leq N$, un ensemble de $N+1$ fonctions linéairement indépendantes sur l'intervalle [1] $I = (0, a)$. Nous étudierons les combinaisons linéaires

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$$

[1] Nous nous servons des notations (a, b) pour l'intervalle ouvert $a < x < b$, $(a, b]$ pour l'intervalle demi-ouvert à gauche $a < x \leq b$, ...

aux coefficients non négatifs. Une telle fonction sera appelée φ-nôme. L'ensemble de ces fonctions est en correspondance biunivoque avec les points du premier « quadrant » de E_{N+1}. Soit $\delta_n(P) = a_n$, $0 \leq n \leq N$, et $L(P, x) = P(x)$ pour $x \in I$. Ces fonctions δ_n et $L(P, x)$ sont des fonctions linéaires sur E_{N+1}. Notre première tâche est de déterminer les conditions pour que le système $[\delta_0, \ldots, \delta_N, L(P, x_1), \ldots, L(P, x_k)]$ soit complètement régulier sur E_{N+1}.

THÉORÈME 6. — *Pour que le système $[\delta_0, \ldots, \delta_N, L(P, x_1), \ldots, L(P, x_k)]$ soit c. r., il faut et il suffit que pour $1 \leq r \leq k$ aucune combinaison linéaire de r des fonctions $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ ne s'annule en plus de $r - 1$ des points $x_1, \ldots, x_k$ sans qu'elle s'annule identiquement.*

COROLLAIRE 6*a*. — *Pour que le système $(\delta_0, \ldots, \delta_N, L(P, x_1), \ldots, L(P, x_k)]$ soit c. r. pour chaque choix de $k\,(\leq N + 1)$ points distincts de l'intervalle* I, *il faut et il suffit qu'aucune combinaison linéaire de r des fonctions $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ n'ait plus de $r - 1$ zéros dans* I *sans qu'elle s'annule identiquement.*

Ces propositions sont des conséquences immédiates de (3).

Le système $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ est appelé *Tchebyscheffien* (système T) sur I si aucune combinaison linéaire de ces fonctions n'admet plus de N zéros dans I, sans que tous les coefficients sont nuls à la fois. Le système est appelé *complètement Tchebyscheffien* (c. T.) si chaque sous-système est Tchebyscheffien. La suite $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_N\}$, où les fonctions sont rangées dans cet ordre déterminé, est appelée *cartésienne* (système D) sur I si le nombre de zéros d'une combinaison linéaire quelconque, $\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n$, ne dépasse pas le nombre des variations des signes de ses coefficients. Un système D sur I est évidemment complètement Tchebyscheffien. Le corollaire 6*a* dit qu'il est nécessaire et suffisant que le système $(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ soit c. T. pour que le système $[\delta_0, \ldots, \delta_N, L(P, x_1), \ldots, L(P, x_k)]$ soit c. r., quel que soit l'ensemble d'au plus $N + 1$ points $x_1, \ldots, x_k$ dans I.

THÉORÈME 7. — *Le système $(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ est un système* T *sur* I *si, et seulement si le déterminant*

$$D_{0,1,\ldots,N}(x_0, \ldots, x_N) = \text{dét}[\varphi_i(x_j)] \neq 0,$$

quels que soient les $N+1$ points distincts, $x_0, \ldots, x_N$, dans I (Bernstein [7]).

COROLLAIRE 7*a*. — *Pour que le système $(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ soit c.*T. *sur* I, *il faut et il suffit que le déterminant*

$$D_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_k) = \text{dét}[\varphi_{i_r}(x_s)] \neq 0,$$

quel que soit l'ensemble de $k\,(\leq N + 1)$ points dans I *et de k fonctions distinctes $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}$ arbitrairement choisies du système.*

Le déterminant $D_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_k)$ a un signe constant $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_k}$ pour

$$0 < x_1 < \ldots < x_k < a.$$

Corollaire 7b. — *Pour que la suite* $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_N\}$ *soit cartésienne sur* I, *il faut et il suffit que* $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_k}$ $(0 \leqq i_1 < \ldots < i_k < N)$ *ne dépende que de* k.

En effet, si

$$k \leqq N,\ 0 \leqq i_1 < \ldots < i_{k+1} \leqq N,\ 0 < x_1 < \ldots < x_k < a,$$

alors

$$D_{i_1,\ldots,i_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k, x) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} D_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k)\,\varphi_{i_j}(x)$$

s'annule en $x_1, \ldots, x_k$, de sorte qu'il y a k variations des signes des coefficients. On en conclut donc que $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_{j-1} i_{j+1} i_{k+1}}$ doit être indépendant de j.

La démonstration de la réciproque est aussi très simple.

Théorème 8. — *Si les fonctions* $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ *sont de la classe* C^N *dans* I, *alors une condition suffisante pour que le système* $(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ *soit* c. T. *sur* I *est que les wronskiens* $W(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})$, *pour* $0 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq N$, *ne s'annulent pas dans* I. *Si les zéros des combinaisons linéaires des fonctions* φ_n *sont comptés selon leurs multiplicités, alors cette condition est aussi nécessaire.*

Corollaire 8a. — *Sous les mêmes hypothèses, une condition suffisante pour que le système soit cartésien sur* I *est que le signe de* $W(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})$, *pour* $0 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq N$, *ne dépend que de* k. *Si les zéros sont comptés selon leurs multiplicités, cette condition est aussi nécessaire.*

Le corollaire 8a est essentiellement contenu dans les problèmes 87 et 90 (Pólya-Szegö [51], vol. II, p. 52-53). On démontre le théorème 8 de la même manière. Si l'on ne compte que des zéros distincts, alors les wronskiens ne peuvent jamais changer de signe, mais il est possible qu'ils s'annulent. (Bien entendu, ils ne peuvent pas s'annuler identiquement, parce que les fonctions $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ sont linéairement indépendantes.) Par exemple, soit $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 2 + x^3$, $I = (-1, +1)$. Alors (φ_0, φ_1) est c. T. sur I, mais $W(\varphi_0, \varphi_1) = 3x^2$ s'annule à zéro.

Théorème 9. — *Soit* $\varphi_n(x, t)$, $0 \leqq n \leqq N$, *continue sur* $I \times S$, *où* S *est un espace topologique avec une base dénombrable de voisinages; soit* $[\varphi_0(x, t_0), \ldots, \varphi_N(x, t_N)]$ *un système* c. T. *sur* I, *quels que soient les points* $t_0, \ldots, t_N \in S$, *et soit* μ_n, $0 \leqq n \leqq N$, *une mesure sur* S *telle que* $0 \leqq \mu_n(S) < \infty$. *Si* $\psi_n(x) = \int_S \varphi_n(x, t)\, d\mu_n(t)$, *alors* $(\psi_0, \ldots, \psi_N)$ *est aussi* c. T. *sur* I.

Démonstration. — Évidemment, si $0 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq N$, et $x_1, \ldots, x_k$ sont des points distincts de I, alors on a

$$D_{i_1,\ldots,i_k}(\psi)(x_1, \ldots, x_k) = \int_S \cdots \int_S D_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi)(x_1, \ldots, x_k)\, d\mu_{i_1} \ldots d\mu_{i_k}.$$

Puisque $D_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi)(x_1, \ldots, x_k)$ est continu et différent de zéro sur S^k, il ne change pas de signe. Il y a un point t_n dans S tel que pour chaque voisinage U de

t_n la mesure $\mu_n(\mathrm{U}) > 0$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, chaque point aurait un voisinage dont la μ_n-mesure est égale à zéro. Il y aurait donc un ensemble dénombrable de voisinages $\{\mathrm{U}_{nr}\}$ tels que

$$\mathrm{S} = \sum_r \mathrm{U}_{nr} \qquad \text{et} \qquad \mu_n(\mathrm{U}_{n,r}) = 0$$

pour tout r, et par conséquent

$$\mu_n(\mathrm{S}) \leqq \sum_r \mu_n(\mathrm{U}_{n,r}) = 0.$$

Soit U_r un voisinage de t_{i_r} tel que $|\mathrm{D}_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi)(x_1, \ldots, x_k)| \geqq h > 0$ pour tous les points de $\mathrm{U}_1 \times \ldots \times \mathrm{U}_k$. Alors

$$|\mathrm{D}_{i_1,\ldots,i_k}(\psi)(x_1, \ldots, x_k)| \geqq h\mu_{i_1}(\mathrm{U}_1) \ldots \mu_{i_k}(\mathrm{U}_k) > 0.$$

D'une manière semblable on peut démontrer le

Corollaire 9 *a*. — *Sous les mêmes hypothèses, si* $\{\varphi_0(x, t_0), \ldots, \varphi_\mathrm{N}(x, t_\mathrm{N})\}$ *est un système* D *sur* I, *quels que soient les points* $t_0, \ldots, t_\mathrm{N}$ *dans* S, *alors* $\{\psi_0, \ldots, \psi_\mathrm{N}\}$ *est aussi un système* D *sur* I.

Théorème 10. — *Si* $(\varphi_0, \ldots, \varphi_\mathrm{N})$ *est c.* T. *sur* $[0, \infty)$ *et* $\varphi_n \in \mathrm{L}_1(0, \infty)$ *pour* $0 \leqq n \leqq \mathrm{N}$, *et si* $\mathrm{F}_n(x) = \int_0^\infty \varphi_n(t)\, e^{xt}\, dt$, *alors* $(\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_\mathrm{N})$ *est aussi c.* T. *sur* $[0, \infty)$.

C'est une conséquence immédiate du problème 80 (Pólya-Szegö [51], Vol. II, p. 50).

On obtient un pareil résultat si $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_\mathrm{N}\}$ est cartésien.

On trouve quelques exemples importants de systèmes D dans Pólya-Szegö (*op. cit.*, p. 52).

Si $(\varphi_0, \ldots, \varphi_\mathrm{N})$ est c. T. sur I, alors aucune des fonctions φ_n ne s'annule dans I, de sorte que l'on peut supposer que $\varphi_n > 0$ sur I, sans restriction de généralité. On voit aussi que $\varphi_m - \lambda\varphi_n$ admet au plus une racine dans I, quel que soit le nombre réel λ, d'où l'on conclut que $\frac{\varphi_m}{\varphi_n}$ est monotone sur I. Il s'ensuit que l'on peut ranger les fonctions φ_n de façon que $\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$ est une fonction croissante dans I pour $1 \leqq n \leqq \mathrm{N}$. Un tel système sera appelé *normal* (abrégé n. c. T.). Un système peut être normal sans être cartésien. Par exemple, on peut vérifier sans peine par le théorème 8 et son corollaire que si $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = e^x$, $\varphi_2 = e^{2x}$, $\varphi_3 = e^{2x}\sqrt{x}$, alors $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est n. c. T. sur $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ sans y être cartésien. En effet,

$$\mathrm{W}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = 2e^{3x} > 0,$$
$$\mathrm{W}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3) = -x^{-\frac{3}{2}} e^{3x} \frac{(1-4x)^2}{4} < 0,$$

tandis qu'aucun des autres wronskiens ne s'annule dans $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Soit $(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ n. c. T. sur $I = (0, a]$, soit $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$, $k \leqq N$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{G}$ des sous-ensembles sans élément commun de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ tels que

$$\mathfrak{E} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{G} = \{x_1, \ldots, x_k\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{E} \cup \mathfrak{L} \neq 0,$$

et soient $m_1, \ldots, m_k$ des constantes positives données. Soit $P_N\{\mathfrak{E}, \mathfrak{L}, \mathfrak{G}; m_1, \ldots, m_k\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires $P = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n$ qui satisfont aux conditions

$$a_n \geqq 0, \quad 0 < n \leqq N, \tag{11}$$

$$L(P, x_i) = P(x_i) = m_i, \quad x_i \in \mathfrak{E}, \tag{12}$$

$$L(P, x_i) \leqq m_i, \quad x_i \in \mathfrak{L}, \tag{13}$$

$$L(P, x_i) \geqq m_i, \quad x_i \in \mathfrak{G}. \tag{14}$$

Si $P \in P_N$, $x_i \in \mathfrak{E} \cup \mathfrak{L}$, on a

$$0 \leqq a_n \leqq \frac{m_i}{\varphi_n(x_i)}, \quad 0 \leqq n \leqq N. \tag{15}$$

Il y a une correspondance biunivoque entre les fonctions P et les points $(a_0, \ldots, a_N)$ de E_{N+1}. Les conditions (11), (13) et (14) correspondent à un nombre fini de demi-espaces, tandis que (12) définit un nombre fini d'hyperplans. Les inégalités (15) montrent que l'ensemble qui correspond à P_N est borné, de sorte que P_N correspond à un polyèdre convexe dans E_{N+1}, que nous identifierons tout simplement avec P_N. Ses sommets sont les points de P_N, où les égalités ont lieu dans au moins $N+1$ de ces conditions, c'est-à-dire qu'ils sont des combinaisons linéaires dont au plus k coefficients sont différents de zéro. Réciproquement, si $\mathfrak{L} = \mathfrak{G} = 0$, et

$$P(x) = \sum_{r=1}^{k} a_{j_r} \varphi_{j_r}(x)$$

est un tel φ-nôme dans P_N, alors P est un sommet de P_N. En effet, si

$$P = \lambda Q + (1-\lambda) R, \quad 0 < \lambda < 1, \quad Q, R \in P_N,$$

$$Q = \sum_{n=0}^{N} b_n \varphi_n, \quad R = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n,$$

alors on a

$$\lambda b_n + (1-\lambda) c_n = a_n \quad \text{pour} \quad n \neq j_1, \ldots, j_k,$$

d'où

$$b_n = c_n = 0$$

pour ces valeurs de n.

Mais $D_{j_1, \ldots, j_k}(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$, de sorte que $Q = R = P$ en vertu de (12). Nous avons démontré ainsi le

Théorème 11. — *Chaque sommet de* $P_N(\mathfrak{E}, \mathfrak{L}, \mathfrak{G}; m_1, \ldots, m_k)$ *est un φ-nôme ayant au plus k coefficients différents de zéro. Si* $\mathfrak{L} = \mathfrak{G} = 0$, *alors un tel φ-nôme dans* P_N *est toujours un sommet de* P_N.

COROLLAIRE 11*a*. — *Si* $L(P) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \alpha_n$ *est une fonction linéaire quelconque sur* E_{N+1}, *alors* L *atteint son maximum sur* P_N *en un* φ*-nôme au moins dont au plus* k *coefficients sont différents de zéro. Le* φ*-nôme extrémal est uniquement déterminé si*

$$\begin{vmatrix} \varphi_{j_1}(x_{i_1}) & \dots & \varphi_{j_p}(x_{i_1}) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi_{j_1}(x_{i_{p-1}}) & \dots & \varphi_{j_p}(x_{i_{p-1}}) \\ \lambda_{j_1} & \dots & \lambda_{j_p} \end{vmatrix} \neq 0,$$

pour $0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq N$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq k$.

COROLLAIRE 11*b*. — *Si* $x_0 \in I$, $x_0 \neq x_i$, $1 \leq i \leq k$, *alors* $L(P, x_0) = P(x_0)$ *atteint son maximum et son minimum sur* P_N *en des* φ*-nômes uniquement déterminés ayant au plus* k *coefficients différents de zéro.*

Si $k = 1$, la fonction extrémale sera de la forme de $c\varphi_n$. Lorsque $\mathfrak{E} = \{x_1\}$, cette fonction extrémale doit être

$$P(x) = m_1 \left(\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x_1)}\right)$$

pour une certaine valeur de n, et

$$\max_{P \in P_N} L(P) = m_1 \max \left(\frac{\lambda_n}{\varphi_n(x_1)}\right),$$

ce qui est, bien entendu, un résultat trivial.

Par exemple, si $\varphi_n(x) = x^n$, $0 \leq n \leq N$, $x_1 = m_1 = 1$, $0 < x_0 < 1$, $L(P) = P'(x_0)$, alors on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE 11*c*. — *Si* $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ *est un polynome à coefficients non négatifs, alors pour* $0 < x < a$, *on a*

$$P'(x) \leq (s+1)\left(\frac{x}{a}\right)^s \frac{P(a)}{a}, \qquad \text{où} \quad s = \left[\frac{x}{a-x}\right].$$

Si $x \neq \frac{as}{1+s}$, alors l'égalité n'a lieu que pour le monôme $P(x) = cx^{s+1}$, mais si $x = \frac{as}{1+s}$, alors l'égalité a lieu pour un polynome quelconque de la forme $c(\lambda x^s + (1-\lambda)x^{s+1})$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

La même méthode nous conduit aussi au

COROLLAIRE 11*d*. — *Si* $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, *et*

$$M_2(P, r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta})|^2 d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

alors

$$M_2(P', r) \leqq (s+1) r^s M_2(P, 1),$$

où $s = \min\left[N-1, \left[\frac{r}{1-r}\right]\right]$, *pour* $0 \leqq r \leqq 1$. *L'égalité n'est atteinte que pour* $P(z) = cz^{s+1}$ *si* $r \neq \frac{s}{1+s}$, *mais pour* $r = \frac{s}{1+s}$ *l'égalité a lieu pour tous les polynomes de la forme*

$$P(z) = c(z^s \cos\alpha + z^{s+1} \sin\alpha).$$

Si $r = 1$ c'est l'analogue pour la moyenne quadratique de l'inégalité de Bernstein (*cf.* Bernstein [7], Western [69]).

Ce cas trivial $k = 1$ ne montre point la puissance de la méthode.

Pour $k = 2$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{G} = 0$, les sommets de P_N sont de la forme

$$(17) \qquad P_{\mu\nu}(x) = \frac{m_1 D_{\mu\nu}(x, x_2) + m_2 D_{\mu\nu}(x_1, x)}{D_{\mu\nu}(x_1, x_2)} = -\frac{\begin{vmatrix} \varphi_\mu(x_1) & \varphi_\nu(x_1) & m_1 \\ \varphi_\mu(x_2) & \varphi_\nu(x_2) & m_2 \\ \varphi_\mu(x) & \varphi_\nu(x) & 0 \end{vmatrix}}{D_{\mu\nu}(x_1, x_2)}.$$

Si $0 \leqq \mu < \nu \leqq N$, alors $P_{\mu\nu} \in P_N(\mathfrak{C}; m_1, m_2)$ si et seulement si

$$\frac{\varphi_\mu(x_2)}{\varphi_\mu(x_1)} \leqq \frac{m_2}{m_1} \leqq \frac{\varphi_\nu(x_2)}{\varphi_\nu(x_1)}.$$

On a l'identité

$$P_{\mu\rho}(x) - P_{\mu\nu}(x) = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & \varphi_\mu(x_1) \\ m_2 & \varphi_\mu(x_2) \end{vmatrix} D_{\mu\nu\rho}(x_1, x, x_2)}{D_{\mu\nu}(x_1, x_2) D_{\mu\rho}(x_1, x_2)}.$$

Supposons que $D_{i_1, i_2, i_3}(x_1, x_2, x_3) > 0$ pour $0 \leqq i_1 < i_2 < i_3 \leqq N$,

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 \leqq a.$$

Soit σ l'entier défini par la condition

$$\frac{\varphi_\sigma(x_2)}{\varphi_\sigma(x_1)} \leqq \frac{m_2}{m_1} < \frac{\varphi_{\sigma+1}(x_2)}{\varphi_{\sigma+1}(x_1)}.$$

Donc pour $x_1 < x < x_2$, on a

$$P_{\sigma,\sigma+1}(x) \geqq P_{\sigma,\sigma+2}(x) \geqq \ldots \geqq P_{\sigma,N}(x),$$

et

$$P_{\sigma,\nu}(x) > P_{\sigma-1,\nu}(x) > \ldots > P_{0,\nu}(x) \qquad \text{pour} \quad \sigma + 1 \leqq \nu \leqq N.$$

Il en résulte que

$$P_{\sigma,\sigma+1}(x) \geqq P_{\mu\nu}(x), \qquad 0 \leqq \mu \leqq \sigma < \nu \leqq N,$$

et l'égalité n'a lieu que si elle a lieu identiquement. De l'identité ci-dessus on déduit aussi que

$$P_{\sigma,\sigma+1}(x) \leqq P_{\mu\nu}(x), \qquad 0 \leqq \mu \leqq \sigma < \nu \leqq N,$$

pour $x < x_1$ ou $x > x_2$, avec l'égalité seulement sous les mêmes conditions.

Le même raisonnement s'applique à une fonction linéaire quelconque telle que $L[D_{\mu\nu\rho}(x_1, x, x_2)]$ a le même signe pour toutes les valeurs de μ, ν et ρ telles que $0 \leqq \mu \leqq \nu < \rho \leqq N$.

THÉORÈME 12. — *Si* $(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ *est n. c. T. sur* I, $0 < x_1 < x_2 < a$, *si* L *est une fonction linéaire telle que* $L[D_{\mu\nu\rho}(x_1, x, x_2)] > 0$ *pour* $0 \leqq \mu < \nu < \rho \leqq N$, *et si* P_N *est l'ensemble des* φ*-nômes aux coefficients non négatifs tels que*

$$P(x_1) = m_1 \quad \text{et} \quad P(x_2) = m_2,$$

alors

$$\max_{P \in P_N} L(P) = L(P_{\sigma,\sigma+1}),$$

où σ *est l'entier défini par*

$$\frac{\varphi_\sigma(x_2)}{\varphi_\sigma(x_1)} \leqq \frac{m_2}{m_1} < \frac{\varphi_{\sigma+1}(x_2)}{\varphi_{\sigma+1}(x_1)}.$$

Le φ*-nôme maximal est uniquement déterminé.*

COROLLAIRE 12 *a*. — *Si* $(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ *est n. c. T. sur* I, $0 < x_1 < x_2 < a$ *et si* $D_{\mu\nu\rho}(x_1, x_2, x_3) > 0$ *pour* $0 \leqq \mu < \nu < \rho \leqq N$, $0 < x_1 < x_2 < x_3 < a$, *alors pour un* φ*-nôme* P *quelconque aux coefficients non négatifs, on a*

$$P(x) \begin{Bmatrix} \leqq \\ \geqq \end{Bmatrix} \frac{P(x_1) D_{\sigma,\sigma+1}(x, x_2) + P(x_2) D_{\sigma,\sigma+1}(x_1, x)}{D_{\sigma,\sigma+1}(x_1, x_2)},$$

selon que $x_1 < x < x_2$ *ou non. S'il y a égalité en un point* $\neq x_1, x_2$, *on a une identité.*

Si nous posons $\varphi_n(x) = x^{n-M}$, nous obtenons en faisant M et N tendre vers l'infini une inégalité due à Carlson [14], que nous discuterons dans la suite plus en détail.

COROLLAIRE 12 *b*. — *Sous les hypothèses du théorème* 12,

$$\min_{P \in P_N} L(P) = L(P_{0,N}).$$

COROLLAIRE 12 *c*. — *Sous les hypothèses du corollaire* 12 *a*,

$$P(x) \begin{Bmatrix} \geqq \\ \leqq \end{Bmatrix} \frac{P(x_1) D_{0,N}(x, x_2) + P(x_2) D_{0,N}(x_1, x)}{D_{0,N}(x_1, x_2)}.$$

Si nous appliquons ce résultat au cas $\varphi_n(x) = x^n$, nous obtenons le

COROLLAIRE 12 *d*. — *Si* $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ *est un polynome aux coefficients non négatifs, alors* $P\left(x^{\frac{1}{N}}\right)$ *est une fonction concave pour* $x \geqq 0$. *L'inégalité obtenue ainsi ne peut pas être améliorée.*

On peut aussi démontrer ce résultat directement. Il suffit de montrer que

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{P}\left(x^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\right) \leqq 0 \qquad \text{pour} \quad x > 0.$$

Mais on a

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{P}\left(x^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\right) = \frac{x^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\,\mathrm{P}''\left(x^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\right) - (\mathrm{N}-1)\,\mathrm{P}'\left(x^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\right)}{\mathrm{N}^2 x^{2-\frac{1}{\mathrm{N}}}}.$$

et

$$x\,\mathrm{P}''(x) - (\mathrm{N}-1)\,\mathrm{P}'(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n-\mathrm{N})\,n a_n x^{n-1} \leqq 0$$

pour $x > 0$. Si l'égalité a lieu en un point, alors $\mathrm{P} = a + bx^{\mathrm{N}}$, et elle vaut identiquement.

Remarquons que les fonctions extrémales dans les corollaires **12** *a* et **12** *c* correspondant à une valeur de x, sont aussi les fonctions extrémales pour d'autres valeurs de x. Ce phénomène est assez général, et est une conséquence du principe de déformation, comme nous le montrerons en détail au chapitre IV.

III. — Les problèmes extrémaux dans l'espace (l).

Il est naturel de chercher des généralisations des principes du chapitre I aux espaces à un nombre infini de dimensions, afin d'obtenir des résultats analogues à ceux du chapitre précédent pour des séries et des intégrales. Nos méthodes, étant basées sur la notion de la convexité, sont adaptées à l'étude des phénomènes dans les espaces de Banach. Les premières applications que nous allons faire peuvent être réalisées sans utiliser les techniques de la théorie générale des espaces de Banach. Comme ces résultats pourraient intéresser ceux qui ne connaissent pas cette théorie, nous avons pensé qu'il serait préférable de pousser ces applications aussi loin que possible en utilisant des méthodes classiques au lieu des méthodes plus générales qui sont introduites par la suite. Dans les chapitres V et VI nous établirons quelques théorèmes plus généraux qui contiennent comme cas spéciaux les faits fondamentaux utilisés dans ce chapitre-ci.

Il est instructif, quand même, de se servir de la terminologie de la théorie des espaces de Banach dans l'étude de ces cas spéciaux, car elle suggère à l'esprit des images géométriques qui nous guident dans ces considérations par l'analogie avec les espaces à un nombre fini de dimensions; c'est, en effet, par ce chemin que ces résultats furent découverts.

Nous rappelons d'abord quelques résultats bien connus et quelques définitions utiles. Des termes définis dans Banach [5] seront utilisés sans autre explication.

Soit E un espace de Banach, et soit E^* son espace conjugué. Si $f_0 \in \mathrm{E}^*$ et $\mathfrak{M}$ est un sous-ensemble fini de la sphère de rayon 1 dans E, et si $\varepsilon > 0$, alors le *voisinage faible* $\mathrm{U}(f_0, \mathfrak{M}, \varepsilon)$ est l'ensemble de tous les éléments $f \in \mathrm{E}^*$ tels que

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{M}.$$

La *topolgie faible* de E^* est celle qui est engendrée par les voisinages faibles. Si E est séparable, alors cette topologie se confond avec la notion définie par Banach [5]. Nous désignerons par E^*_T l'espace topologique que constitue E^* muni de la topologie faible et nous nous servirons d'expressions telles que « faiblement continu », « faiblement fermé », et ainsi de suite, pour parler des relations et notions dans l'espace E^*_T. Évidemment, pour que $f_n \rightarrow f$ dans E^*_T, il faut et il suffit que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, quel que soit le point $x \in E$.

Les développements de ce chapitre concernent l'espace (l) des séries absolument convergentes aux termes réels $a = \{a_n\}$ avec la norme

$$\| a \| = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |.$$

Cet espace est le conjugué de (c_0), l'espace de toutes les suites $\xi = \{\xi_n\}$ qui tendent vers zéro, avec la norme

$$\| \xi \| = \sup | \xi_n |.$$

Cela résulte d'une modification banale de la démonstration donnée dans Banach [5], p. 65. L'espace conjugué de (l) est (m), celui des suites bornées $\lambda = \{\lambda_n\}$ avec la norme

$$\| \lambda \| = \sup | \lambda_n |.$$

Remarquons que (c_0) et (l) sont séparables, tandis que (m) ne l'est pas. Nous désignons par $\mathfrak{a}$ le « premier quadrant » de (l), c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $a = \{a_n\}$ aux coordonnées non négatives.

Pour qu'une suite $a^{(m)} = \{a_n^{(m)}\}$ converge vers $a = \{a_n\}$ dans $(c_0)^*_T = (l)_T$, il faut et il suffit que les normes $\| a^{(m)} \|$ soient bornées et que $a_n^{(m)} \rightarrow a_n$ pour tout n (Banach [5], p. 130).

THÉORÈME 13. — *Si* $\lambda = \{\lambda_n\} \in (m)$, *et si* $\lambda_n \geqq 0$ *pour tout* $N > N_0$, *alors* $\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$ *est une fonction semi-continue inférieurement sur* $\mathfrak{a}$ *par rapport à la topologie faible.*

Démonstration. — Supposons que $a^{(m)} = \{a_n^{(m)}\}$ converge faiblement vers $a = \{a_n\}$, où $a^{(m)} \in \mathfrak{a}$ pour tout m. Donc pour $N > N_0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n a_n^{(m)} \leqq \lambda[a^{(m)}] \quad \text{pour tout } m.$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n a_n \leqq \liminf_{m \rightarrow \infty} \lambda[a^{(m)}],$$

de sorte que

$$\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n \leqq \liminf_{m \rightarrow \infty} \lambda[a^{(m)}].$$

Corollaire 13 *a*. — *Si* $\lambda = \{\lambda_n\} \in (m)$, *et si* $\liminf\limits_{n \to \infty} \lambda_n \geqq 0$, *alors la fonction* $\lambda(a)$ *est semi-continue inférieurement sur* $\mathfrak{A}$ *par rapport à* $(l)_T$.

Démonstration. — Soit $\lambda'_n = \min(\lambda_n, 0)$, $\lambda''_n = \max(\lambda_n, 0)$. Alors $\lambda'' = \{\lambda''_n\}$ est une fonction semi-continue inférieurement sur $\mathfrak{A}$ relativement à $(l)_T$, d'après le théorème 13. D'ailleurs, $\lambda' = \{\lambda'_n\} \in (c_0)$, et est donc une fonction faiblement continue sur (l). Par conséquent, $\lambda = \lambda' + \lambda''$ est une fonction semi-continue inférieurement sur $\mathfrak{A}$ par rapport à $(l)_T$.

Nous sommes prêts maintenant à généraliser les résultats du Chapitre I. L'instrument principal est le

Théorème 14. — *Soient*

$$\lambda^{(i)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(i)} a_n \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

k fonctions linéaires données sur (l), *c'est-à-dire* $\lambda^{(i)} \in (m)$ *pour* $1 \leqq i \leqq k$. *Soit* $\mathfrak{L}$ *l'ensemble des points* $a \in \mathfrak{A}$ *tels, que*

$$(18) \qquad \lambda^{(i)}(a) = c_i, \quad 1 \leqq i \leqq k,$$

où les c_i *sont des constantes données. Si* $\mathfrak{L}$ *est borné, alors une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathfrak{L}$ *soit non vide est qu'il contienne un élément a dont au plus k coodonnées* a_n *sont différentes de zéro.*

Démonstration. — Soit

$$b = \{b_n\} = \sum_{s=1}^{\infty} b'_s\, \delta^{(n_s)}$$

un point de $\mathfrak{L}$, où $\delta^{(i)} = \{\delta_n^i\}$ et δ_n^i est le symbole-delta de Kronecker, et $b'_s > 0$, $s = 1, 2, \ldots$. Soit r le rang de la matrice $[\lambda_{n_j}^{(i)}]$; alors $r \leqq k$. Si $r < k$, il y a un déterminant d'ordre r de $[\lambda_{n_j}^{(i)}]$ qui n'est pas nul, tandis que tous les déterminants d'ordre $r + 1$ s'annulent. Précisément, comme dans le cas des matrices finies, on trouve que r des vecteurs $\lambda^{(i)}$ sont linéairement indépendants sur l'espace S engendré par les $\delta^{(n_s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ et les autres sont linéairement dépendants de celles-ci. Si nous ne considérons que les r équations dans (18), qui sont linéairement indépendantes sur S, et si nous pouvons établir qu'il y a un point a dans S dont au plus r coordonnées ne s'annulent pas, alors le théorème est démontré. On peut numéroter les colonnes de façon qu'il suffise de démontrer l'énoncé suivant :

Soient

$$\lambda^{(i)}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(i)} a_n, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

des fonctions linéaires sur (l) telles que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_k^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{(k)} & \ldots & \lambda_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0;$$

supposons que les équations (18) aient une solution $a = \{a_n\}$ à coordonnées positives. Alors elles ont une solution à coordonnées non négatives dont k au plus ne s'annulent pas.

Soit (μ_{ir}) la matrice inverse de $[\lambda_j^{(i)}]$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ et soit $a^{(0)} = \{a_n^{(0)}\}$ une solution de (18) avec $a_n^{(0)} > 0$ pour tout n. Soit

$$\alpha = \sum_{n=1}^{k} a_n^{(0)} \delta^{(n)}, \qquad b = a^{(0)} - \alpha.$$

Soit $\mathfrak{A}'$ l'ensemble des points β dans $\mathfrak{A}$ dont les k premières coordonnées s'annulent, soit

$$\mathrm{K}^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} \mu_{ij} \lambda^{(j)}, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

et soit

$$c'_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_{ij} c_j, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

Alors si $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta^{(n)} \in \mathfrak{F}$, on a

$$\lambda^{(i)}(a) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^{(i)} a_s + \lambda^{(i)} \left[\sum_{n>k} a_n \delta^{(n)}\right] = c_i,$$

d'où

$$\mathrm{K}^{(i)}(a) = a_i + \mathrm{K}^{(i)} \left[\sum_{n>k} a_n \delta^{(n)}\right] = c'_i, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

et l'on en conclut que $\beta = \sum_{n>k} a_n \delta^{(n)} \in \mathfrak{A}'$ et

$$\mathrm{K}^{(i)}(\beta) \leq c_i, \qquad 1 \leq i \leq k. \tag{19}$$

Inversement, si $\beta \in \mathfrak{A}'$ satisfait aux conditions (19), et si nous posons

$$a = \sum_{i=1}^{k} [c_i - \mathrm{K}^{(i)}(\beta)] \delta^{(i)} + \beta, \tag{20}$$

alors a appartient à $\mathfrak{F}$. L'équation établit donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathfrak{F}'$ des éléments de $\mathfrak{A}'$ qui satisfont aux conditions (19) et l'ensemble $\mathfrak{F}$. On a, d'ailleurs,

$$\mathrm{K}^{(i)}(b) = \mathrm{K}^{(i)}[a^{(0)}] - a_i^{(0)} = c_i - a_i^{(0)} < c'_i, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

Soit

$$b^{(\mathrm{N})} = \sum_{k+1}^{\mathrm{N}} a_n \delta^{(n)}.$$

On a donc

$$\| b - b^{(N)} \| = \sum_{N+1}^{\infty} a_n \to 0,$$

d'où

$$K^{(i)}[b^{(N)}] \to K^{(i)}(b), \qquad 1 \leqq i \leqq k.$$

Il s'ensuit qu'à partir d'une valeur N_0 de N on a

$$K^{(i)}[b_0^{(N)}] < c'_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k.$$

Pour $N > N_0$ le point $b^{(N)} \in \mathfrak{F}'$, alors

$$a^{(N)} = \sum_{i=1}^{k} (c'_i - K^{(i)}[b^{(N)}])\, \delta^{(i)} + b^{(N)}$$

appartient à $\mathfrak{F}$, et $a_n^{(N)} = 0$ pour $n > N$. Soit $\mathfrak{F}_{(N)}$ l'ensemble des points $(a_1, \ldots, a_N)$ dans E_N tels que

$$a_n \geqq 0, \qquad 1 \leqq n \leqq N,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_n^{(i)} a_n = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k.$$

Donc $\mathfrak{F}_{(N)}$ est non vide et borné, ce qui entraîne le fait qu'il est un polyèdre convexe pour $N > N_0$. D'après le corollaire $2a$, il contient un point dont au plus k coordonnées sont différentes de zéro, et par conséquent il en est de même pour $\mathfrak{F}$.

Corollaire 14 *a*. — *Soient $\lambda^{(i)}$ et c_i comme ci-dessus, et soit $\mathfrak{F}''$ l'ensemble des points a de $\mathfrak{A}$ tels que*

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} \lambda^{(i)}(a) = c_i, & 1 \leqq i \leqq m, \\ \lambda^{(i)}(a) \leqq c_i, & m < i \leqq k. \end{cases}$$

Si $\mathfrak{F}''$ est borné, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit non vide est qu'il contienne un point dont au plus k coordonnées s'annulent.

Démonstration. — Soit $a^{(0)} \in \mathfrak{F}''$, soit $c''_i = \lambda^{(i)}[a^{(0)}]$, $1 \leqq i \leqq k$, et soit $\mathfrak{F}_1$ l'ensemble des points $a \in \mathfrak{A}$ tels que

$$\lambda^{(i)}(a) = c''_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k.$$

Puisque $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, cet ensemble est aussi borné et non vide.

La conclusion découle immédiatement du théorème 14.

Remarquons que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}''$ sont des ensembles fermés et convexes dans (l), et comme des intersections de demi-espaces et d'hyperplans, ils ont des faces « plates », et ressemblent ainsi à des polyèdres convexes dans les espaces à un nombre fini de dimensions.

Corollaire 14 *b*. — *Chaque point extrême de $\mathfrak{F}''$ a au plus k coordonnées différentes de zéro.*

Soit $a = \{a_n\}$ un point extrême de $\mathfrak{F}''$, et soient $a_n \neq 0$ pour $n = n_1, \ldots, n_k$, où $n_1 < \ldots < n_k$, et soit

$$b = \Sigma' a_n \delta^{(n)} \neq 0,$$

où la sommation se fait sur les $n \neq n_1, \ldots, n_k$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{H}$ des points $x = (x_1, \ldots, x_{k+1})$ dans E_{k+1} tels que

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \delta^{(n_i)} + x_{k+1} b \in \mathfrak{F}''.$$

Ce sont les points qui satisfont aux conditions

$$x_i \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq k+1,$$

$$L_j(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda^{(j)}[\delta^{(n_i)}] + x_{k+1} \lambda^{(j)}(b) = c_j, \qquad 1 \leq j \leq m,$$

$$L_j(x) \leq c_j, \qquad m < j \leq k.$$

Ceci montre que $\mathfrak{H}$ est un tronçon et le point $(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, 1)$ est un sommet de $\mathfrak{H}$. Mais à un sommet de $\mathfrak{H}$ les égalités ont lieu dans au moins $k+1$ des conditions ci-dessus, ce qui entraîne qu'au moins une coordonnée s'annule. Cette contradiction conduit au résultat énoncé.

Si $\mathfrak{J}$ est un ensemble fini d'entiers et si $E(\mathfrak{J})$ est l'espace engendré par les $\delta^{(i)}$ pour $i \in \mathfrak{J}$, alors $\lambda^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$, se réduit à une fonction linéaire ordinaire lorsqu'on restreint le vecteur sur lequel elle opère à l'espace $E(\mathfrak{J})$ qui a un nombre fini de dimensions. Nous dirons que le système $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}\}$ est complètement régulier si, quel que soit l'ensemble fini $\mathfrak{J}$ d'entiers, les fonctions $\delta^{(i)}$, $i \in \mathfrak{J}$, et $\lambda^{(j)}$ forment un système complètement régulier sur $E(\mathfrak{J})$. Ceci est équivalent à la condition algébrique

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_{n_1}^{(i_1)} & \ldots & \lambda_{n_r}^{(i_1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n_1}^{(i_r)} & \ldots & \lambda_{n_r}^{(i_r)} \end{vmatrix} \neq 0$$

pour un choix arbitraire des indices avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq k$, $0 \leq n_1 < \ldots < n_r$.

Corollaire 14 c. — *Si le système $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}\}$ est c. r., alors chaque élément de $\mathfrak{F}$ dont au plus k coordonnées s'annulent est un point extrême de $\mathfrak{F}$.*

Ceci se déduit par le même raisonnement que celui de la page 29, en utilisant les conditions (22).

Corollaire 14*d*. — ***Chaque point extrême de $\mathfrak{F}''_{(N)}$ est un point extrême de $\mathfrak{F}''$, où $\mathfrak{F}''_{(N)}$ est l'ensemble des points $a = \{a_n\}$ dans $\mathfrak{F}''$ tels que $a_n = 0$ pour $n > N$. Si $\mathfrak{F}''$ est borné, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il ne soit pas vide est qu'il contienne un point extrême.***

Démonstration. — Si a est un point extrême de $\mathfrak{F}''_N$ et si b et c sont dans $\mathfrak{F}''$, et si $a = tb + (1-t)c$, ou $0 < t < 1$, alors on a

$$a_n = tb_n + (1-t)c_n, \qquad b_n \geqq 0, \qquad c_n \geqq 0 \quad \text{pour tout } n,$$

et puisque $a_n = 0$ pour $n > N$, on a aussi $b_n = c_n = 0$ pour $n > N$, de sorte que b, $c \in \mathfrak{F}''_N$. Mais par l'hypothèse, a est un point extrême de $\mathfrak{F}''_N$, d'où il suit que $b = c = a$. Dans le cours de la démonstration du théorème 14 nous avons montré que $\mathfrak{F}''_N$ n'est pas vide pour N assez grand, et $\mathfrak{F}''$ contient donc des points extrêmes.

Si $\lambda^{(i)} \in (c_0)$, $1 \leqq i \leqq k$, alors $\mathfrak{F}''$ est régulièrement convexe, et ce corollaire est une conséquence d'un théorème de Krein et Milman [41] (*cf.* aussi Yosida et Fukamiya [74]). L'ensemble $\mathfrak{F}''$ n'est pourtant pas régulièrement convexe en général, de sorte que leurs méthodes ne s'appliquent pas ici.

Corollaire 14e. — *On peut omettre l'hypothèse que $\mathfrak{F}$ soit borné dans le théorème* 14 *et que $\mathfrak{F}''$ le soit dans les corollaires* 14 *a et* 14 *d.*

Démonstration. — Supposons que $\mathfrak{F}''$ n'est pas vide, et soit $a^{(0)} \in \mathfrak{F}''$. Posons

$$\lambda^{(k+1)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad c_{k+1} = \| a^{(0)} \| + 1\,;$$

soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des éléments a de $\mathfrak{F}''$ satisfaisant à la condition

$$(23) \qquad \lambda^{(k+1)}(a) \leqq c_{k+1},$$

et soit $\mathfrak{G}'$ l'ensemble des éléments a de $\mathfrak{F}''$ satisfaisant à l'équation

$$(24) \qquad \lambda^{(k+1)}(a) = c_{k+1} - 1,$$

de sorte que $a^{(0)} \in \mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$. L'ensemble $\mathfrak{G}$ est borné et $\mathfrak{G}'$ n'est pas vide, ce qui entraîne que $\mathfrak{G}'_{(N)}$ n'est pas vide pour N assez grand. Le minimum de $\lambda^{(k+1)}$ sur le polyèdre convexe $\mathfrak{G}_{(N)}$ est atteint à un point b, où les égalités ont lieu dans au moins $N+1$ des conditions

$$(25) \qquad \begin{cases} b_n \geqq 0, & 0 \leqq n \leqq N, \\ \lambda^{(i)}(b) = c_i, & 1 \leqq i \leqq m, \\ \lambda^{(i)}(b) \leqq c_i, & m < i \leqq k+1. \end{cases}$$

Puisque $\mathfrak{G}'_{(N)}$ n'est pas vide, il s'ensuit que $\lambda^{(k+1)}(b) \leqq c_{k+1} - 1 < c_{k+1}$. Alors, au moins $N+1-k$ des b_n s'annulent. Remarquons que b est, en effet, un point extrême de $\mathfrak{F}''$. Car si

$$b = tA + (1-t)B, \qquad A,\ B \in \mathfrak{F}'', \quad 0 < t < 1,$$

on a

$$\lambda^{(k+1)}(b) = t\lambda^{(k+1)}(A) + (1-t)\lambda^{(k+1)}(B),$$

et A, $B \in \mathfrak{F}''_{(N)}$. Si $A \in \mathfrak{F}''_{(N)} - \mathfrak{G}_{(N)}$, alors $\lambda^{(k+1)}(A) > c_{k+1}$, tandis que si $B \in \mathfrak{G}_{(N)}$, on a $\lambda^{(k+1)}(\mathrm{B}) \leqq \lambda^{(k+1)}(b)$. Il en résulte que si $\mathrm{A} \in \mathfrak{f}''_{(\mathrm{N})} - \mathfrak{G}_{(\mathrm{N})}$, on a

$$t\lambda^{(k+1)}(\mathrm{A}) + (1-t)\lambda^{(k+1)}(\mathrm{B}) < tc_{k+1} + (1-t)\lambda^{(k+1)}(b) \leqq \lambda^{(k+1)}(b).$$

Par conséquent, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{G}_{(\mathrm{N})}$, de sorte que $\mathrm{A} = \mathrm{B} = b$.

Cette remarque pourrait avoir quelque intérêt, parce qu'en général, un ensemble fermé et convexe ne contient pas des points extrêmes s'il n'est pas borné.

Corollaire 14 *f*. — *Si la fonction linéaire $\lambda \in (m)$ atteint sa borne supérieure sur $\mathfrak{f}''$, alors elle l'atteint en un point extrême de $\mathfrak{f}''$.*

Démonstration. — Soit $\max\limits_{a \in \mathfrak{f}''} \lambda(a) = c$, et soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des points $a \in \mathfrak{f}''$ tels que $\lambda(a) = c$. D'après le corollaire 14 *e*, si $\mathfrak{G}$ n'est pas vide, il contient un point extrême. Le raisonnement du théorème 1 montre que chaque point extrême de $\mathfrak{G}$ est aussi un point extrême de $\mathfrak{f}''$.

Corollaire 14 *g*. — *Si $\mathfrak{f}''$ est non vide et borné, alors il est l'enveloppe convexe de l'ensemble* S *de ses points extrêmes, ceci veut dire qu'il est le plus petit ensemble fermé et convexe qui contient* S.

Démonstration. — Considérons d'abord l'ensemble $\mathfrak{f}$. Soit $a \in \mathfrak{f}$. Dans la démonstration du théorème 14, nous avons construit une suite d'éléments $a^{(\mathrm{N})}$ tels que

$$a^{(\mathrm{N})} \in \mathfrak{f}_{\mathrm{N}} \quad \text{pour} \quad \mathrm{N} > \mathrm{N}_0$$

et

$$\begin{aligned} \| a - a^{(\mathrm{N})} \| &= \left\| \sum_{i=1}^{k} [c_i - \mathrm{K}^{(i)}(b)]\,\delta^{(i)} + b - \sum_{i=1}^{k} [c_i - \mathrm{K}^{(i)}(b^{(\mathrm{N})})]\,\delta^{(i)} - b^{(\mathrm{N})} \right\| \\ &\leqq \left[1 + \sum_{i=1}^{k} \| \mathrm{K}^{(i)} \| \right] \| b - b^{(\mathrm{N})} \| \to 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $a^{(\mathrm{N})}$ tend vers a.

Nous revenons maintenant au cas général de l'ensemble $\mathfrak{f}''$. Soit a un point arbitraire de $\mathfrak{f}''$, et soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des points b de a tels que

$$\lambda^{(i)}(b) = \lambda^{(i)}(a), \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

$$\lambda^{(k+1)}(b) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lambda^{(k+1)}(a).$$

Alors la remarque ci-dessus montre l'existence d'une suite $a^{(\mathrm{N})} \in \mathfrak{G}_{\mathrm{N}} \subset \mathfrak{f}''_{\mathrm{N}}$ telle que $\| a^{(\mathrm{N})} - a \| \to 0$.

Mais $\mathfrak{f}''_{\mathrm{N}}$ est un polyèdre convexe, et est donc l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrêmes (Bonnesen-Fenchel [9], p. 15). En vertu du corollaire 14 *d*, chaque point extrême de $\mathfrak{f}''_{\mathrm{N}}$ appartient à S, de sorte que a est un point d'accumulation des points $a^{(N)}$ dans l'enveloppe convexe de S, ce qui est la conclusion désirée.

Corollaire 14 *h*. — *Si $\mathfrak{L}''$ est non vide et borné, alors la borne supérieure d'une fonction linéaire $\lambda \in (m)$ sur $\mathfrak{L}''$ coïncide avec sa borne supérieure sur* S. *l'ensemble des points extrêmes de $\mathfrak{L}''$.*

Nous cherchons maintenant des conditions suffisantes pour que la borne supérieure de λ sur $\mathfrak{L}''$ soit effectivement atteinte. Dans le cas d'un espace à un nombre fini de dimensions, cette question est triviale, parce qu'un ensemble borné et fermé y est compact. Dans le cas général d'un espace de Banach, il n'y a pas de propriété analogue et simple; mais dans l'espace conjugué d'un espace de Banach, tout ensemble borné et faiblement fermé est faiblement compact (*voir* Banach [5], p. 123). (Pour certains espaces c'est un théorème classique de Helly [35].) On peut obtenir ainsi des théorèmes sur l'existence des solutions de problèmes extrémaux dans l'espace (l), le conjugué de (c_0), tandis qu'il serait assez difficile d'obtenir de pareils résultats pour un espace comme (c_0).

Notons le résultat de Banach [5], p. 131, qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction linéaire $\lambda \in (m)$ soit faiblement continue sur (l) est que $\lambda \in (c_0)$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Le théorème 13 et son corollaire sont aussi utiles dans l'étude de ces problèmes.

Théorème 15. — *Soit $\mathfrak{L}''$ borné et non vide. Soit $\lambda^{(i)} \in (c_0)$ pour $1 \leqq i \leqq m$, soit $\lambda^{(i)}$ semi-continue inférieurement sur $\mathfrak{A}$ relatif à la topologie faible pour $m < i \leqq k$, et soit λ semi-continue supérieurement sur $\mathfrak{A}$ par rapport à la topologie faible. Alors λ atteint son maximum sur $\mathfrak{L}''$ en un point extrême, au moins.*

Démonstration. — Les hypothèses entraînent que $\mathfrak{L}''$ est faiblement compact, de sorte qu'un théorème classique montre que λ atteint son maximum sur $\mathfrak{L}''$. Alors elle l'atteint sur S, vu le corollaire 14 *f*.

Corollaire 15 *a*. — *Si $\mathfrak{L}''$ est non vide, si $\lambda^{(i)} \in (c_0)$ pour $1 \leqq i \leqq m$, si $\lambda^{(i)}$ est semi-continue inférieurement sur $\mathfrak{A}$ par rapport à la topologie faible pour $m < i \leqq k$, $\lambda = \{\lambda_n\} \in (m)$, et si $\lambda_n \geqq h > 0$ pour tout n, alors λ atteint son minimum sur $\mathfrak{L}''$ à un point extrême de $\mathfrak{L}''$, au moins.*

Démonstration. — Soit $a^{(0)} \in \mathfrak{L}''$, $c_{k+1} = \lambda(a^{(0)}) + 1$. Soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des points $a \in \mathfrak{L}''$ tels que

$$\lambda(a) \leqq c_{k+1}.$$

Si $a \in \mathfrak{G}$, alors $\|a\| \leqq h^{-1}\lambda(a) \leqq h^{-1}c_{k+1}$, d'où il suit que $\mathfrak{G}$ est borné. D'après le théorème 13, λ est semi-continue inférieurement sur $\mathfrak{A}$ par rapport à la topologie faible, de sorte que $-\lambda$ atteint son maximum sur $\mathfrak{G}$, vu le théorème 15. La fonction λ atteint donc son minimum sur $\mathfrak{G}$, ce qui est aussi son minimum sur $\mathfrak{f}''$. La conclusion découle maintenant du corollaire 14 *f*.

Le théorème simple qui suit est parfois utile.

THÉORÈME 16. — *Soit $\mathfrak{f}''(c)$ l'ensemble des points $a \in \mathfrak{A}$ tels que*

$$(26) \qquad \begin{cases} \lambda^{(i)}(a) = c_i, & 1 \leqq i \leqq m, \\ \lambda^{(i)}(a) \leqq c_i, & m < i < k, \\ \lambda^{(k)}(a) \leqq c. \end{cases}$$

Si le minimum de λ sur $\mathfrak{f}''(c_k)$ est atteint en $a^{(0)}$ et si $\lambda^{(k)}(a^{(0)}) < c_k$, alors il est atteint en $a^{(0)}$ sur $\mathfrak{f}''(c)$ pour tout $c \geqq \lambda^{(k)}(a^{(0)})$.

Démonstration. — Si $c' \leqq c''$, alors $\mathfrak{f}''(c') \subset \mathfrak{f}''(c'')$; d'où l'on déduit que la conclusion est triviale pour $c \leqq c_k$. On peut donc supposer que $c > c_k$. Soit $a \in \mathfrak{f}''(c) - \mathfrak{f}''(c_k)$, et posons $b = ta^{(0)} + (1-t)a$, où

$$t = \frac{\lambda^{(k)}(a) - c_k}{\lambda^{(k)}(a) - \lambda^{(k)}(a^{(0)})}$$

est choisi de manière que $\lambda^{(k)}(b) = c_k$. Puisque $0 < t < 1$, on a $b \in \mathfrak{f}''(c_k)$, et

$$\lambda(a^{(0)}) \leqq \lambda(b) = t\lambda(a^{(0)}) + (1-t)\lambda(a),$$

et par conséquent

$$\lambda(a^{(0)}) \leqq \lambda(a).$$

Nous obtenons maintenant des généralisations des théorèmes 2 et 5 pour l'espace (l).

THÉORÈME 17. — *Si $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, \lambda\}$ est c. r., et si λ atteint son maximum sur $\mathfrak{f}''$, alors le point où ce maximum est atteint est uniquement déterminé.*

Démonstration. — Supposons que le maximum de λ sur $\mathfrak{f}''$ est atteint en deux points distincts, $a^{(1)}$ et $a^{(2)}$. Il y a donc un entier ν tel que

$$a_\nu^{(1)} \neq a_\nu^{(2)}.$$

Soit $\mathfrak{G}_i (i = 1, 2)$, l'ensemble des $a \in \mathfrak{f}''$ tels que

$$\delta^{(\nu)}(a) = a_\nu^{(i)}.$$

Puisque λ atteint son maximum sur $\mathfrak{G}_i$, à savoir en $a^{(i)}$, alors il l'atteint en un point extrême $b^{(i)}$ de $\mathfrak{G}_i$, vu le corollaire 14 *f* et ces points, $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$, sont distincts. D'après le corollaire 14 *b*, on voit de suite qu'il existe un N tel que les points $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$ appartiennent à $\mathfrak{f}''_N$. Mais cet ensemble est un tronçon dans E_{N+1}, et $\{\delta^{(0)}, \ldots, \delta^{(N)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, \lambda\}$ *y* est c. r., de sorte que λ atteint son maximum sur $\mathfrak{f}''_N$ en un sommet unique, vu le théorème 2, ce qui est une contradiction.

THÉORÈME 18. — *Soient $\lambda^{(i)}(t) = \{\lambda_n^{(i)}(t)\}$ et $\lambda(t) = \{\lambda_n(t)\}$ des éléments de l'espace (m) pour $0 \leqq t \leqq 1$, et supposons que les fonctions $\lambda_n^{(j)}(t)$ et $\lambda_n(t)$ soient continues dans cet intervalle. Soit $c_0(t)$ continue pour $0 \leqq t \leqq 1$. Soit $\mathfrak{F}''(t)$ l'ensemble des éléments a de $\mathfrak{A}$ qui satisfont aux conditions*

$$(27) \qquad \begin{cases} \lambda^{(i)}(t, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(i)}(t) a_n = c_i(t), & 1 \leqq i \leqq m, \\ \lambda^{(i)}(t, a) \leqq c_i(t), & m < i \leqq k. \end{cases}$$

Faisons aussi l'hypothèse que $\mathfrak{F}''(t)$ est borné et que $\{\lambda^{(1)}(t), \ldots, \lambda^{(k)}(t), \lambda(t)\}$ est c. r. pour $0 \leqq t \leqq 1$. Soit σ un ensemble d'éléments $\delta^{(i)}$ et $\lambda^{(j)}(t)$, et soit $a^{(\sigma)}(t)$ le point où sont vérifiées les conditions

$$\delta^{(i)}[a^{(\sigma)}(t)] \neq 0, \qquad \lambda^{(j)}[t, a^{(\sigma)}(t)] \neq c_j(t),$$

pour les seuls éléments de σ. Nous supposons enfin que $a^{(\sigma)}(t)$ est uniquement déterminé et appartient à $\mathfrak{F}''(t)$ pour $0 \leqq t \leqq 1$, et que le maximum de $\lambda(0)$ sur $\mathfrak{F}''(0)$ est atteint au point $a^{(\sigma)}(0)$. Alors le maximum de $\lambda(t)$ sur $\mathfrak{F}''(t)$ est atteint en $a^{(\sigma)}(t)$ pour $0 \leqq t \leqq 1$.

Démonstration. — D'après les corollaires **14** *b* et **14** *f* et le théorème **17**, l'ensemble σ ne contient qu'un nombre fini des éléments $\delta^{(i)}$. Soit N_0 le plus grand entier i tel que $\delta^{(i)} \in \sigma$. Alors $a^{(\sigma)}(t) \in \mathfrak{F}_N(t)$ pour $N > N_0$, $0 \leqq t \leqq 1$. Puisque le système $\{\delta^{(0)}, \ldots, \delta^{(N)}, \lambda^{(1)}(t), \ldots, \lambda^{(k)}(t), \lambda(t)\}$ est c. r. pour $0 \leqq t \leqq 1$, on en conclut que le maximum de $\lambda(t)$ sur $\mathfrak{F}''_N(t)$ est atteint en $a^{(\sigma)}(t)$ et seulement en ce point pour $0 \leqq t \leqq 1$, vu le corollaire **5** *a*. Fixons la valeur de t d'une façon quelconque. Si $a \in \mathfrak{F}''(t)$, soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des points $b \in \mathfrak{A}$ tels que

$$\lambda^{(i)}(t, b) = \lambda^{(i)}(t, a), \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

et

$$\lambda(t, b) = \lambda(t, a).$$

Puisque $\mathfrak{G}$ n'est pas vide, il s'ensuit que $\mathfrak{G}_N$ n'est pas vide pour N assez grand. Soit $b \in \mathfrak{G}_N \subset \mathfrak{F}''_N(t)$. Alors

$$\lambda[t, a^{(\sigma)}(t)] \leqq \lambda(t, b) = \lambda(t, a),$$

d'où l'on déduit que $\lambda(t)$ atteint son maximum sur $\mathfrak{F}''(t)$ en $a^{(\sigma)}(t)$, et seulement en ce point, vu le théorème précédent.

Nous donnons maintenant un résultat concernant l'existence d'un élément de l'ensemble $\mathfrak{A}$ qui remplit une infinité de conditions.

THÉORÈME 19. — *Soit $\{\lambda^{(i)}\}$ une suite d'éléments de (c_0), soit $\{c_i\}$ une suite de constantes données, et soit $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}$. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des points $a \in \mathfrak{A}$ tels que*

$$\lambda^{(i)}(a) = c_i \quad \text{pour tout } i.$$

Alors $\mathfrak{F}''$ est non vide si, et seulement s'il contient un point où λ atteint son minimum.

Démonstration. — Supposons que $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, et soit $\mathfrak{F}^{(k)}$ l'ensemble des points qui satisfont aux k premières conditions ci-dessus. Alors $\mathfrak{F}^{(k)}$ n'est pas vide, quel que soit k, et contient donc, d'après le corollaire 15 a, un élément $a^{(k)}$ où λ atteint son maximum sur $\mathfrak{F}^{(k)}$. Si $b^{(0)} \in \mathfrak{F}$, alors $b^{(0)} \in \mathfrak{F}^{(k)}$ pour tout k, de sorte que

$$\lambda(a^{(k)}) \leqq \lambda(b^{(0)}) \quad \text{pour tout } k. \tag{28}$$

Or, la suite $\{a^{(k)}\}$ est bornée, ce qui entraîne qu'elle contient une sous-suite faiblement convergente vers une limite a'. Puisque toutes les fonctions $\lambda^{(i)}$ sont faiblement continues, il s'ensuit que $a' \in \mathfrak{F}^{(k)}$ pour tout k et, par conséquent, $a' \in \mathfrak{F}$. Si b est un point quelconque de $\mathfrak{F}$, il appartient aussi à $\mathfrak{F}^{(k)}$ pour tout k, de sorte que $\lambda(a^{(k)}) \leqq \lambda(b)$. Mais λ est semi-continu inférieurement par rapport à la topologie faible. On voit donc que $\lambda(a') \leqq \lambda(b)$, ce qui montre que λ atteint son minimum sur $\mathfrak{F}$ au point a'.

Un ensemble $\mathfrak{M} \subset (m)$ est appelé *total* (Banach [5], p. 42), si $\lambda(a) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{M}$ entraîne que le point $a = 0$.

Corollaire 19 a. — *En conservant les notations de la démonstration du théorème* 19, *si la suite* $\{\lambda^{(i)}\}$ *est totale, alors* $\mathfrak{F}$ *est non vide seulement lorsque* $\{\lambda(a^{(k)})\}$ *est bornée, et dans ce cas les points* $a^{(k)}$ *tendent faiblement vers l'élément unique de* $\mathfrak{F}$.

Démonstration. — Si $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, alors (28) montre que la suite $\{\lambda(a^{(k)})\}$ est bornée. Soit a l'élément unique de $\mathfrak{F}$. Si $\{a^{(k)}\}$ n'était pas faiblement convergente vers a, alors il y aurait un élément $\xi \in (c_0)$ tel que $\xi(a^{(k)})$ ne tendrait pas vers $\xi(a)$. Alors nous pourrions choisir une sous-suite des $a^{(k)}$ de façon que $\xi(a^{(k)})$ tendrait vers une limite différente de $\xi(a)$, et encore une sous-suite de ceux-là qui serait faiblement convergente vers une limite b. Vu la continuité faible de $\lambda^{(i)}$ et ξ, il s'ensuit que $b \in \mathfrak{F}$ et $\xi(a) \neq \xi(b)$, ce qui est impossible, puisque la suite $\{\lambda^{(i)}\}$ est totale. Nous voyons ainsi que $a^{(k)}$ tend faiblement vers a. Inversement, si $\{\lambda(a^{(k)})\}$ est bornée, alors $\{a^{(k)}\}$ est bornée, et possède une sous-suite faiblement convergente. La limite de cette sous-suite appartient à $\mathfrak{F}$, d'après le raisonnement ci-dessus, et par conséquent la suite entière $\{a^{(k)}\}$ tend faiblement vers ce point, d'après le début de cette démonstration.

IV. — Séries de fonctions appartenant à un système Tchebyscheffien ou Cartésien.

Nous donnons maintenant quelques applications de la théorie générale du chapitre précédent. Soit $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, un système T normalisé dans l'intervalle $(0, a]$, et supposons que pour $0 < x < a$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(a)} = 0. \tag{27}$$

Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$(28) \qquad f(x) = \Sigma\, a_n \varphi_n(x)$$

telles que

$$\|f\| = \Sigma\, |a_n|\, \varphi_n(a) < +\infty.$$

La transformation

$$\mathrm{T}(f) = \alpha = \{\alpha_n\}, \qquad \alpha_n = a_n \varphi_n(a),$$

engendre une correspondance biunivoque entre cette classe de fonctions et l'espace (l). Soit $\mathfrak{A}_1 = \mathrm{T}^{-1}(\mathfrak{A})$ l'ensemble des fonctions (28) aux coefficients non négatifs. Si $0 < x_1 < \ldots < x_k \leqq a$, et

$$\lambda^{(i)}(\alpha) = \lambda(\alpha, x_i) = f(x_i) = \sum \frac{\varphi_n(x_i)}{\varphi_n(a)} \alpha_n,$$

alors $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}\}$ est c. r. On a donc le

THÉORÈME 20. — *Supposons que :*

a. $\{\varphi_n\}$ *est n. c. T. dans* $(0, a]$;

b. $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$;

c. $c_1, \ldots, c_k$ *sont des constantes données;*

d. les ensembles $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{G}$ *constituent une partition des entiers* $1, \ldots, k$;

e. $\mathfrak{F}$ *est l'ensemble des fonctions dans* $\mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$(29) \qquad \begin{cases} f(x_i) = c_i, & i \in \mathfrak{E}, \\ f(x_i) \leqq c_i, & i \in \mathfrak{L}, \\ f(x_i) \geqq c_i, & i \in \mathfrak{G}. \end{cases}$$

Alors il existe un φ-nôme unique P *dans* $\mathfrak{F}$, *dont au plus* k *coefficients s'annulent, pour lequel la fonction* $\lambda(\alpha, a) = f(a)$ *atteint son minimum sur* $\mathfrak{F}$.

Si $0 < x_0 < a$, $x_0 \neq x_i (i = 1, \ldots, k)$ et $c \geqq \mathrm{P}(a)$, et $\mathfrak{F}_1$ est l'ensemble des f dans $\mathfrak{F}$ telles que

$$f(a) \leqq c,$$

alors il y a un φ-nôme unique Q dans $\mathfrak{F}_1$, dont au plus $k+1$ coefficients ne s'annulent pas, pour lequel $\lambda(\alpha, x_0) = f(x_0)$ atteint son maximum sur $\mathfrak{F}_1$. Il en est de même pour le minimum de $f(x_0)$ pour $f \in \mathfrak{F}_1$.

Ceci résulte immédiatement des théorèmes 15 et 17, et des corollaires 14*b* et 15*a*.

Le φ-nôme P, dont l'existence et l'unicité sont énoncées dans le théorème 20, sera appelé la *fonction principale* (abrégée f. p.) de $\mathfrak{F}$; lorsque nous désirerons signaler sa dépendance du point a, nous l'appellerons la f. p. de $\mathfrak{F}$ au point a.

Corollaire 20a. — *Dans les conditions du théorème* 20, *soit* $\mathfrak{B}$ *l'ensemble des entiers* j *dans* $(1, k)$ *tels que* $P(x_i) = c_i$, *et soit* $\mathfrak{F}_2$ *l'ensemble des* $f \in \mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x_i) = c_i, & i \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B}, \\ f(x_i) \leqq c_i, & i \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}. \\ f(x_i) \geqq c_i, & i \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}. \end{array}\right. \tag{30}$$

Alors P *est aussi la f. p. de* $\mathfrak{F}_2$.

C'est une conséquence du théorème 16. On voit ainsi que le nombre des coefficients non nuls de P ne dépasse pas le nombre d'entiers dans $\mathfrak{B}$.

Le théorème suivant montre la portée du principe de déformation.

Théorème 21. — *En conservant toujours les suppositions et les notations du théorème* 20 *et du corollaire* 20a, *si*

$$0 < x'_1 < \ldots < x'_k < a, \qquad c'_i = P(x'_i)\,(i = 1, \ldots, k),$$

et si $\mathfrak{F}'$ *est l'ensemble des* $f \in \mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x'_i) = c'_i, & i \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B}, \\ f(x'_i) \leqq c'_i, & i \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}, \\ f(x'_i) \geqq c'_i, & i \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}, \end{array}\right. \tag{31}$$

alors P *est aussi la f. p. de* $\mathfrak{F}'$ *au point* a.

Démonstration. — Soit $x''_i = \min(x_i, x'_i)$, $c''_i = P(x''_i)$, $1 \leqq i \leqq k$. Soient

$$\begin{aligned} L^{(i)}(\alpha, t) &= f(x_i), \qquad 2 \leqq i \leqq k, \\ L^{(1)}(\alpha, t) &= f[x_1 + t(x''_1 - x_1)], \\ L(\alpha, t) &= f(a), \\ c_i(t) &= c_i, \qquad 2 \leqq i \leqq k, \\ c_1(t) &= P[x_1 + t(x''_1 - x_1)]. \end{aligned}$$

D'après le principe de déformation (le théorème 18), la fonction P est la f. p. de $\mathfrak{F}(t)$, ensemble des $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que

$$\begin{array}{ll} L^{(i)}(\alpha, t) = c_i(t), & i \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B}, \\ L^{(i)}(\alpha, t) \leqq c_i(t), & i \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}, \\ L^{(i)}(\alpha, t) \geqq c_i(t), & i \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}, \end{array}$$

pour $0 \leqq t \leqq 1$. En particulier, P l'est pour $t = 1$, c'est-à-dire que P réalise le minimum de $f(a)$ sur l'ensemble $\mathfrak{F}(1)$ des $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que

$$\begin{array}{lcll} f(x_i) & = & c_i, & i \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B} - \{1\}, \\ f(x_i) & \leqq & c_i, & i \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B} - \{1\}, \\ f(x_i) & \geqq & c_i, & i \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B} - \{1\}, \\ f(x''_1) & \left\{\begin{array}{c} = \\ \leqq \\ \geqq \end{array}\right\} & c''_1, & \end{array}$$

selon que I appartient à $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ ou $\mathfrak{G}$. Cette dernière condition peut être omise si $\mathrm{I} \notin \mathfrak{B}$. De la même façon, on montre pas à pas que P est la f. p. de $\mathfrak{F}''$, ensemble des $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que

$$\begin{aligned} f(x''_i) &= c''_i, & i &\in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}, \\ f(x''_i) &\leqq c''_i, & i &\in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}. \\ f(x''_i) &\geqq c''_i, & i &\in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

En appliquant ce procédé d'une manière symétrique, on arrivera à la conclusion désirée.

Corollaire 21 *a*. — *Dans les mêmes conditions*, P *est la f. p. de* $\mathfrak{F}$ *au point* a_1 *pour* $x_k < a_1 < a$.

Démonstration. — Soit $f_0 \in \mathfrak{F}$, $f_0(a_1) = c_0$. Il y a donc un φ-nôme f_1 dont au plus $k + 2$ coefficients s'annulent tel que

$$\begin{aligned} f_1(x_i) &= f_0(x_i), & 1 &\leqq i \leqq k. \\ f_1(a_1) &= f_0(a_1) = c_0, & f_1(a) &= f_0(a). \end{aligned}$$

Soit N_0 l'indice du dernier coefficient non nul de f_1 ou P, et soit $\mathfrak{F}_N$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{F}$ tels que $a_n = 0$ pour $n > N$. Alors f_1, $P \in \mathfrak{F}_N$ pour $N > N_0$.

Soient

$$\begin{aligned} L^{(i)}(\alpha, t) &= f(x_i), & 1 &\leqq i \leqq k. \\ L(\alpha, t) &= f[a + t(a_1 - a)]. \end{aligned}$$

Alors $\{L^{(1)}, \ldots, L^{(k)}, L\}$ est c. r. pour $0 \leqq t \leqq 1$, et les hypothèses du théorème **12** sont vérifiées. Par conséquent, le minimum de $L(\alpha, 1)$ sur $\mathfrak{F}_N$ est atteint par la seule fonction P. On a donc

$$P(a_1) < f_1(a_1) = c_0 = f_0(a_1),$$

sauf si $f_1 = P$. Mais dans ce cas, $f_0(a) = f_1(a) = P(a)$, d'où l'on déduit que $f_0 = P$.

Corollaire 21 *b*. — *Si* $\{\varphi_n\}$ *est n. c. T. sur* $(0, a]$, *et si* $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$, *et si* $\mathfrak{F}$ *est l'ensemble des* $f \in \mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$f(x_i) = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

et si P *est la f. p. de* $\mathfrak{F}$, *alors, quelle que soit la fonction* $g \in \mathfrak{A}_1$, *la différence* $g - P$ *n'admet qu'au plus* k *zéros dans* $(0, a]$, *sauf si elle s'annule identiquement*.

Démonstration. — Si $g - P$ s'annule aux points x'_i, $0 < x'_1 < \ldots < x'_{k+1} \leqq a$, alors g appartient à l'ensemble $\mathfrak{F}'$ des $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que

$$f(x'_i) = c'_i = P(x'_i), \qquad 1 \leqq i \leqq k.$$

Mais le minimum de $f(x'_{k+1})$ sur $\mathcal{F}'$ est atteint seulement par la fonction P, d'après le corollaire 21*b*, et $g(x'_{k+1}) = P(x'_{k+1})$, ce qui entraîne que $g \equiv P$.

Corollaire 21*c*. — *Dans les conditions du corollaire* 21*b*, P *réalise le minimum de* $f(x)$ *pour* $f \in \mathcal{F}$ *dans les intervalles* $(x_k, a]$, (x_{k-2}, x_{k-1}), ..., *et le maximum dans les intervalles* (x_{k-1}, x_k), (x_{k-3}, x_{k-2}), ...

Démonstration. — Soit $x_0 = 0$, $x_{k+1} = a$. Pour $k = 1$, la f. p. de $\mathcal{F}$ est, tout simplement, $c_1 \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(x_1)}$, et l'énoncé est trivial, car la fonction $\frac{f}{\varphi_0}$ est croissante, quelle que soit $f \in \mathfrak{A}_1$. Supposons que le corollaire est vrai pour $k-1$, et posons $0 \leqq r < k$, $s = k - r$.

Soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que

$$(32) \qquad f(x_i) = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k \qquad (i \neq s),$$

$$(33) \qquad (-1)^r [f(x_s) - c_s] \geqq 0,$$

et soit P_1 la f. p. de $\mathcal{F}'$. Si $P_1(x_s) \neq c_s$, alors P_1 est la f. p. de l'ensemble $\mathcal{F}''$ défini par les conditions (32). Mais nous avons supposé que le corollaire est vrai pour $k-1$, d'où il s'ensuit que P_1 réalise le minimum de $(-1)^r f(x)$ pour $f \in \mathcal{F}''$ et $x_{s-1} < x < x_{s+1}$. On en conclut que

$$(-1)^r P_1(x_s) \leqq (-1)^r P(x_s) = (-1)^r c_s,$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur P_1, à savoir que $(-1)^r P(x_s) > (-1)^r c_s$. Par conséquent $P_1(x_s) = c_s$, de sorte que $P_1 \in \mathcal{F}$, et $P(a) \leqq P_1(a)$. Mais $P \in \mathcal{F}'$, d'où $P_1(a) \leqq P(a)$. Alors $P_1(a) = P(a)$, et l'on en déduit que $P_1 = P$, d'après l'unicité de la f. p.

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{F}'''$ des $f \in \mathcal{F}''$ telles que $f(a) \leqq P(a)$, et soit Q la fonction pour laquelle le maximum de $(-1)^r f(x_s)$ pour $f \in \mathcal{F}'''$ est atteint. On sait, d'après le théorème 20 et le principe de déformation que Q est un φ-nôme uniquement déterminé, et qu'il réalise le maximum de $(-1)^r f(x)$ sur $\mathcal{F}'''$ pour $x_{s-1} < x < x_{s+1}$. On a donc

$$(-1)^r c_s = (-1)^r P(x_s) \leqq (-1)^r Q(x_s),$$

ce qui montre que $Q \in \mathcal{F}'$. Il s'ensuit que $P(a) \leqq Q(a)$, et alors $P(a) = Q(a)$. Mais nous avons montré que P est la f. p. de $\mathcal{F}'$, de sorte que le minimum de $f(a)$ sur $\mathcal{F}'$ n'est atteint que si $f = P$. Alors $Q = P$. Nous appliquons maintenant le principe de déformation en faisant prendre aux points x_{s+1}, ..., x_k, et a les positions x_s, ..., x_k. Le φ-nôme P réalise donc le maximum de $(-1)^r f(x)$ pour $x_{s-1} < x < x_s$ et $f \in \mathcal{F}^{\text{IV}}$, ensemble des $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que

$$f(x_i) = c_i, \qquad 1 \leqq i < k,$$
$$f(x_k) \leqq P(x_k) = c_k,$$

et, *a fortiori*, pour $f \in \mathcal{F}$.

Nous définissons l'*ordre* d'un φ-nôme P comme le nombre maximum de zéros de $f - P$ lorsque la fonction f parcourt l'ensemble $\mathfrak{A}_1 - \{P\}$, et nous désignerons l'ordre de P par $\omega(P)$. Par le *degré* d'un φ-nôme P nous entendons le plus grand entier N tel que le coefficient de φ_N dans P est différent de zéro. Nous définissons $\omega_N(P)$ comme le nombre maximum de zéros de $f - P$. Lorsque f parcourt les φ-nômes de degré $\leqq N$ dans $\mathfrak{A}_1 - \{P\}$. Maintenant nous pouvons donner au corollaire 21 *b* la forme suivante :

Corollaire 21 *d*. — *Dans les conditions du corollaire* 21 *b*, $\omega(P) \leqq k$, *Si* $\omega(P) < k$, *alors* P *est la seule fonction de* $\mathfrak{F}$.

La propriété d'une fonction que son ordre soit au plus k est beaucoup plus restrictive que celle d'avoir au plus k coefficients non nuls. On le prouve par le

Théorème 22. — *Si* $\{\varphi_n\}$, $0 \leqq n \leqq N$ *est un système* T *dans* $(0, a]$ *et* $P = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n$ *est un φ-nôme aux coefficients positifs, alors* $\omega_N(P) \geqq N$. *En effet, si* $0 < x_1 < \ldots < x_N < a$, *on peut construire un φ-nôme* Q *aux coefficients positifs tel que* $Q - P$ *change de signe lorsque le point* x *passe par chacune des valeurs* x.

Démonstration. — Posons

$$R(x) = D_{0,1,\ldots,N}(x_1, \ldots, x_N, x) = D_{0,1,\ldots,N-1}(x_1, \ldots x_N)\varphi_N(x) + \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n(x),$$

et soit $Q = P + tR$, où t est arbitraire si $D_{0,1,\ldots,N-1}(x_1, \ldots, x_N) = 0$, mais $\operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} D_{0,1,\ldots,N-1}(x_1, \ldots, x_N)$ dans le cas contraire. Alors, pour des valeurs assez petites de t les coefficients de Q sont positifs, et Q remplit les conditions de l'énoncé ci-dessus.

Corollaire 22 *a*. — *Si* $\{\varphi_n\}$ *est c. T. dans* $(0, a]$, *et* P *est un φ-nôme de degré* N *dont* k *coefficients sont non nuls et positifs, alors* $\omega_{N+1}(P) \geqq k$. *Si* $k < N + 1$, $\omega_N(P) \geqq k$.

Démonstration. — Si $P = \sum_{j=1}^{k} a_j \varphi_{n_j}$, $a_j > 0$ pour $1 \leqq j \leqq k$, alors le théorème 22 s'applique au système $\{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}, \varphi_{N+1}\}$. Si $k < N + 1$, il y a un entier $n < N$ tel que $n \neq n_j$, $1 \leqq j \leqq k$. Nous pouvons donc faire la même construction que celle dans la démonstration précédente avec $R(x) = D_{n, n_1, \ldots, n_k}(x, x_1, \ldots, x_k)$.

Si $\{\varphi_n\}$ est cartésien dans $(0, a]$, alors la règle de signe de Descartes nous donne une borne supérieure pour l'ordre d'un φ-nôme. La « réciproque » suivante de cette règle montre que cette borne supérieure est en vérité égale à l'ordre.

THÉORÈME 23. — *Si* $\{\varphi_n\}$ *est cartésien dans* $(0, a]$, *et* P *est un* φ*-nôme dans* $\mathfrak{A}_1$, *alors* $\omega_N(P)$ *est égal au nombre maximum de variations des signes des coefficients de* $Q - P$ *lorsque* Q *parcourt les* φ*-nômes de degré* $\leq N$ *qui sont contenus dans* $\mathfrak{A}_1$. *Si* $N > \deg P$, *alors* $\omega_N(P) = \omega(P)$.

Démonstration. — Soient

$$P = \sum_{\nu=1}^{r} P_\nu, \qquad P_\nu = \sum_{n=\alpha_\nu+1}^{\alpha_\nu+k_\nu} a_n \varphi_n,$$

où $a_n > 0$ pour $\alpha_\nu < n \leq \alpha_\nu + k_\nu$, et $\alpha_\nu + k_\nu < \alpha_{\nu+1}$ pour $1 \leq \nu < r$. Nous ferons la démonstration dans le cas où $N > \alpha_r + k_r = \deg P$; les modifications exigées par le cas où $N \leq \deg P$ seront évidentes, mais un peu plus compliquées dans leurs détails.

Soit

$$\beta_\nu = \begin{cases} k_1 & \text{si } \nu = 1, \quad \alpha_1 = -1, \\ k_\nu + \dfrac{1-(-1)^{k_\nu}}{2} & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Alors $\omega = \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu$ est le nombre maximum de variations des signes des coefficients de $Q - P$ pour $Q \in \mathfrak{A}_1$; même si Q est restreint aux φ-nômes de degré $\leq N$. On en conclut $\omega_N(P) \leq \omega(P) \leq \omega$; notre tâche sera achevée si nous pouvons trouver un φ-nôme $Q \in \mathfrak{A}_1$ de degré N tel que $Q - P$ possède ω zéros.

Soit $\mathfrak{N}$ la suite qui contient l'entier N et les entiers n tels que

$$\alpha_\nu + 1 + k_\nu - \beta_\nu \leq n \leq \alpha_\nu + k_\nu, \qquad 1 \leq \nu \leq r,$$

et soient $n_1, \ldots, n_\omega$, N les entiers dans l'ensemble $\mathfrak{N}$ rangés par grandeur croissante. Soit $0 < x_1 < \ldots < x_\omega < a$, où les x_i sont des points arbitrairement choisis dans l'intervalle $(0, a)$, soit

$$R(x) = \frac{D_{N, n_\omega, \ldots, n_1}(x, x_1, \ldots, x_\omega)}{D_{n_\omega, \ldots, n_1}(x_1, \ldots, x_\omega)} = \varphi_N(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{N} b_n \varphi_n$$

et posons $Q = P + tR$.

Alors $Q - P$ s'annule aux points $x_1, \ldots, x_\omega$, et $Q \in \mathfrak{A}_1$ lorsque t est positif et assez petit. Car si $\alpha_\nu + 1 \leq n \leq \alpha_\nu + k_\nu$, le coefficient de φ_n dans Q est égal à $a_n + tb_n$ et $a_n > 0$. Si $n = N$, le coefficient de φ_n est égal à t. Si $n = \alpha_\nu$, le signe du coefficient de φ_n est

$$(-1)^{\sum_{\tau \geq \nu} \beta_\tau} = +1,$$

et tous les autres coefficients de Q sont égaux à zéro.

On tire de cette démonstration un peu plus.

Corollaire 23 *a*. — *Si* $P = \Sigma a_n \varphi_n$ *est un* φ*-nôme aux coefficients non négatifs, et* $\omega_N(P) = k$, *et* $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$, *alors il y a un* φ*-nôme* $Q = \sum_{n=0}^{N} b_n \varphi_n$ *dans* $\mathfrak{A}_1$, *avec* $b_N > 0$, *tel que* $Q - P$ *s'annule et change de signe précisément aux points* $x_1, \ldots, x_k$.

Les propriétés suivantes des φ-nômes sont souvent utiles.

Théorème 24. — *Si* $\{\varphi_n\}$ *est n. c. T. dans* $(0, a]$ *et* P *est un* φ*-nôme dans* $\mathfrak{A}_1$ *d'ordre* k, *et si* $\mathfrak{F}$ *est l'ensemble des* $f \in \mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$f(x_i) = P(x_i), \qquad 1 \leq i \leq k,$$

où $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$, *alors* P *réalise, ou le maximum, ou le minimum de* $f(a)$ *pour* $f \in \mathfrak{F}$.

Démonstration. — Supposons que $f_0 \in \mathfrak{F}$, $f_0 \not\equiv P$. Alors $f_0(a) \neq P(a)$. Supposons, pour fixer les idées, que $f_0(a) > P(a)$, et choisissons une fonction arbitraire f de $\mathfrak{F}$. Pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction $tf + (1-t)f_0$ appartient à $\mathfrak{F}$ et, d'après le corollaire 14 *c*, $tf + (1-t)f_0 \not\equiv P$ pour $0 \leq t < 1$. On en déduit que $tf(a) + (1-t)f_0(a) \neq P(a)$ pour $0 \leq t < 1$, et $tf(a) + (1-t)f_0(a) > P(a)$ pour $t = 0$. Il s'ensuit que $f(a) \geqq P(a)$, et l'égalité n'a lieu que si $f \equiv P$.

Corollaire 24 *a*. — *Si* $\{\varphi_n\}$ *est n. c. T. dans* $(0, a]$ *et* $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$, *et si* $\mathfrak{F}$ *est l'ensemble des* $f \in \mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$f(x_i) = c_i, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

alors $\mathfrak{F}$ *contient au plus deux* φ*-nômes d'ordre* $\leq k$. [*Si* (27) *a lieu, alors* $\mathfrak{F}$ *en contient au moins un, s'il n'est pas vide*].

Corollaire 24 *b*. — *Dans les hypothèses du théorème* 24, *si* (27) *est verifié, alors* P *réalise le minimum de* $f(a)$ *sur* $\mathfrak{F}$.

Démonstration. — Soit $P = \Sigma a_n \varphi_n$, où $a_n > 0$ pour $n = n_1, \ldots, n_r$, et $a_n = 0$ pour les autres valeurs de n. On a $r \leq k$, par le corollaire 22 *a*. Si $r < k$, et si $f_1 = \Sigma b_n \varphi_n$ est une fonction dans $\mathfrak{A}_1$ telle que $f_1 - P$ s'annule exactement k fois dans l'intervalle $(0, a)$, alors $b_n > 0$ pour au moins $k - r$ valeurs de n différentes de $n_1, \ldots, n_r$, d'après l'hypothèse que $\{\varphi_n\}$ est complètement tschebyscheffien. On voit donc que $f_2 = \dfrac{f_1 + P}{2}$ est une fonction dans $\mathfrak{A}_1$ telle que $f_2 - P$ possède précisément k zéros dans $(0, a)$ et dont au moins k coefficients sont positifs.

Dans tous les cas, il y a donc une fonction f dans $\mathfrak{A}_1$ telle que $f - P$ admet k racines dans $(0, a)$ et dont au moins k coefficients sont positifs. Soit $f = \Sigma b_n \varphi_n$, et soit $b_n > 0$ pour $n = n_1, \ldots, n_k$. Si $N > \max(n_1, \ldots, n_k) = N_0$, soit

$$R_N(x) = \frac{D_{n_1,\ldots,n_k,N}(x_1, \ldots, x_k, x)}{\sqrt{\varphi_N(x_k)\varphi_N(a)}\, D_{n_1,\ldots,n_k}(x_1, \ldots, x_k)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi_N(x_k)\varphi_N(a)}} \left[\varphi_N(x) + \sum_{n=0}^{N_0} c_n \varphi_n(x) \right],$$

où $f - P$ s'annule aux points x_i, $1 \leqq i \leqq k$ et $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$. On a maintenant $c_n = 0$ pour $n \neq n_1, \ldots, n_k$, et pour $n = n_j$,

$$|c_n| = \frac{D_{n_1,\ldots,n_{j-1},n_{j+1},\ldots,n_k,N}(x_1, \ldots, x_k)}{D_{n_1,\ldots,n_k}(x_1, \ldots, x_k)} \leqq K \varphi_N(x_k),$$

où K est une certaine constante positive. Par conséquent, le module du coefficient de φ_n dans R_N est

$$\frac{|c_n|}{\sqrt{\varphi_N(x_k)\varphi_N(a)}} \leqq K \sqrt{\frac{\varphi_N(x_k)}{\varphi_N(a)}} \to 0.$$

Ceci montre que $f + R_N \in \mathfrak{A}_1$ pour des valeurs assez grandes de l'entier N. On a aussi

$$R_N(a) \geqq \sqrt{\frac{\varphi_N(a)}{\varphi_N(x_k)}} \left[1 - \sum_{n=0}^{N_0} \frac{|c_n|\,|\varphi_n(a)|}{\varphi_N(a)} \right] \geqq \sqrt{\frac{\varphi_N(a)}{\varphi_N(x_k)}} \left[1 - K_1 \frac{\varphi_N(x_k)}{\varphi_N(a)} \right],$$

d'où il résulte que $R_N(a) \to +\infty$. Puisque $R_N(x_i) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq k$, on a ainsi construit des fonctions F dans $\mathfrak{A}_1$ telles que

$$F(x_i) = P(x_i), \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

et telles que $F(a)$ est aussi grand qu'on veut.

Corollaire 24 c. — *Dans les hypothèses du corollaire 24 a, si (27) est vérifié, alors $\mathfrak{F}$ contient au plus un φ-nôme d'ordre $\leqq k$. Pour que $\mathfrak{F}$ soit non vide, il faut et il suffit qu'il contienne précisément un φ-nôme d'ordre $\leqq k$. Ce φ-nôme est la f. p. de $\mathfrak{F}$.*

Remarquons que, si l'ordre de la f. p. de $\mathfrak{F}$ est inférieur à k, alors $\mathfrak{F}$ ne contient que cette seule fonction.

Théorème 25. — *Si $\{\varphi_n\}$ est cartésien dans $(0, a]$, et si $\{P_n\}$ est une suite faiblement convergente de φ-nômes dans $\mathfrak{A}_1$ (cf. p. 39), alors*

$$\omega\left(\lim_{n\to\infty} P_n\right) \leqq \liminf_{n\to\infty} \omega(P_n).$$

Démonstration. — Soit $P = \lim P_n$, soit $\omega(P) = k$, et soit $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$. Il y a donc un φ-nôme Q dans $\mathfrak{A}_1$ telle que $Q - P$ change de signe lorsque x

passe par chaque point x_i. Soit $0 < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_k < x_k$. A partir d'une certaine valeur de n, on a

$$\operatorname{sgn}[Q(y_i) - P_n(y_i)] = \operatorname{sgn}[Q(y_i) - P(y_i)],$$
$$\operatorname{sgn}[Q(a) - P_n(a)] = \operatorname{sgn}[Q(a) - P(a)].$$

Il s'ensuit que $Q - P_n$ admet au moins un zéro dans chacun des intervalles (y_i, y_{i+1}), $1 \leqq i \leqq k-1$, et (y_k, a), ce qui montre que $\omega(P_n) \geqq k$. On modifiera facilement cette démonstration si P est une fonction dans $\mathfrak{A}_1$ d'ordre infini.

Théorème 26. — *Si* $\{\varphi_n\}$ *est cartésien dans* $(0, a]$ *et si* $P = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n$, $a_N > 0$, *est la f. p. de* $\mathfrak{F}$, *ensemble des* f *dans* $\mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$f(x_i) = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

où $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$, *alors* $\mathfrak{F}$ *ne contient pas de* φ*-nômes de degré inférieur à* N.

Démonstration. — Si $\mathfrak{F}$ contenait un φ-nôme Q de degré $<$ N, alors le nombre de variations de signe des coefficients de $P - Q$ serait au plus égal à $\omega(P) - 1$, ce qui contredirait la supposition que $P - Q$ possède k zéros dans $(0, a)$.

Corollaire 26 *a*. — *Dans les mêmes hypothèses, soit* $\mathfrak{F}^{(j)}$ *l'ensemble des* f *dans* $\mathfrak{A}_1$ *telles que*

$$f(x_i) = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k \qquad (i \neq j),$$

soit $\mathfrak{F}_\nu^{(j)}$ *l'ensemble des* φ*-nômes de degré* $\leqq \nu$ *contenus dans* $\mathfrak{F}^{(j)}$, *et soit* m_ν *le maximum de* $(-1)^{k-j} f(x_j)$ *pour* $f \in \mathfrak{F}_\nu^{(j)}$. *Si* $\mathfrak{F}_{N-1}^{(j)}$ *n'est pas vide, alors*

$$m_{N-1} < (-1)^{k-j} c_j \leqq m_N.$$

Démonstration. — Il est trivial que $(-1)^{k-j} c_j \leqq m_N$. Soit R la f. p. de $\mathfrak{F}^{(j)}$. Alors, d'après le théorème 26, le degré de R est au plus égal à $N - 1$, et par le corollaire 22 *b*, le φ-nôme R réalise le minimum de $(-1)^{k-j} f(x_j)$ pour $f \in \mathfrak{F}^{(j)}$. Il s'ensuit que

$$(-1)^{k-j} c_j \geqq (-1)^{k-j} R(x_j).$$

Si $(-1)^{k-j} c_j \leqq m_{N-1}$, soit Q un φ-nôme dans $\mathfrak{F}_{N-1}^{(j)}$ tel que $(-1)^{k-j} Q(x_j) = m_{N-}$, Alors, on peut déterminer une valeur de t telle que $0 \leqq t \leqq 1$ et $tQ + (1-t)R \in \mathfrak{F}$. ce qui est contraire au théorème 26.

Corollaire 26 *b*. — *En conservant les notations du corollaire 26 a, on conclut que le degré de la f. p. de* $\mathfrak{F}$ *est le plus petit entier* N *tel que*

$$(-1)^{k-j} c_j \geqq m_N.$$

Le théorème 26 et ses corollaires sont très utiles, parce qu'ils nous permettent de ramener le problème à déterminer la f. p. d'un ensemble $\mathfrak{F}$ au problème analogue avec une condition de moins.

Il sera instructif de déterminer la f. p. de $\mathfrak{F}$ explicitement pour des petites valeurs de k. Nous supposons que le système $\{\varphi_n\}$ est normalisé et cartésien dans $(0, a]$ et que $0 < x_1 < \ldots < x_k < a$, et considérons l'ensemble des fonctions $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que

$$(34)\qquad f(x_i) = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k.$$

Le cas $k = 2$. — Puisque l'ordre de la f. p. de $\mathfrak{F}$ est au plus égal à 2, alors elle doit être de la forme $P = a_n\varphi_n + a_{n+1}\varphi_{n+1}$, où $a_n > 0$, $a_{n+1} \geqq 0$. Nous trouvons que

$$(35)\qquad \frac{\varphi_n(x_2)}{\varphi_n(x_1)} \leqq \frac{c_2}{c_1} < \frac{\varphi_{n+1}(x_2)}{\varphi_{n+1}(x_1)},$$

condition qui détermine l'entier n, et les coefficients sont déterminés par (34). Ceci conduit au

Théorème 27. — *Si* $f \in \mathfrak{A}_1$, $0 < x_1 < x_2 \leqq a$, *et*

$$P(x) = \frac{f(x_1)D_{n,n+1}(x, x_2) + f(x_2)D_{n,n+1}(x_1, x)}{D_{n,n+1}(x_1, x_2)},$$

où n est l'entier déterminé par

$$\frac{\varphi_n(x_2)}{\varphi_n(x_1)} \leqq \frac{f(x_2)}{f(x_1)} < \frac{\varphi_{n+1}(x_2)}{\varphi_{n+1}(x_1)},$$

alors $f(x) \leqq P(x)$ *dans* (x_1, x_2) *et* $f(x) \geqq P(x)$ *dans* $(0, x_1)$ *et* $(x_2, a]$.

Si l'égalité a lieu pour une valeur de x différente de x_1, x_2, *alors elle a lieu identiquement. Si l'on considère* $\frac{f}{\varphi_n}$ *comme une fonction de* $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$, *alors la courbe se trouve au-dessous de la corde dans* (x_1, x_2) *et au-dessus de la corde dans les intervalles contigus.*

Il ne s'agit pas d'une propriété de convexité, parce que l'entier n dépend des points x_1 et x_2.

Il est évident que la théorie précédente est valable aussi lorsque $\{\varphi_n\}$ est une suite qui s'étend dans les deux sens, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Cette extension se fait facilement moyennant le théorème 14, qui ramène les problèmes du type considéré aux problèmes analogues pour des sous-systèmes finis.

En particulier, si $\varphi_n(x) = x^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, le théorème 27 se réduit à une inégalité de Carlson [14]. (*Cf.* aussi Robinson [56].) Il semble que Carlson ne s'est pas aperçu que son résultat est contenu dans le travail de Bernstein [8], sans doute parce que Bernstein n'a pas énoncé cette application explicitement.

Si nous considérons $\mathfrak{F}_N$, ensemble des φ-nômes de degré $\leqq N$ contenus dans $\mathfrak{F}$, alors nous trouvons précisément deux φ-nômes P avec $\omega_N(P) \leqq 2$. Ce sont les fonctions indiquées par $P_{n,n+1}$ et $P_{0,N}$ à la page 25, où n est déterminé par (35). Nous avons déjà vu que $P_{n,n+1}$ réalise le minimum de $f(a)$ pour $f \in \mathfrak{F}_N$. Il s'ensuit que $P_{0,N}$ en réalise le maximum. Nous obtenons ainsi une autre démonstration du corollaire 12 *c*. L'interprétation géométrique est que si f est un φ-nôme de degré $\leqq N$, alors $\frac{f}{\varphi_0}$ est une fonction concave de $\frac{\varphi_N}{\varphi_0}$.

Le cas $k = 3$. — Un φ-nôme d'ordre $\leqq 3$ doit être de la forme $a_0\varphi_0 + a_n\varphi_n + a_{n+1}\varphi_{n+1}$. Nous nous servons des notations du théorème 26 et ses corollaires. R étant la f. p. de $\mathfrak{F}^{(3)}$, on a $c_3 \geqq R(x_3)$ si $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, et si $c_3 > R(x_3)$, alors la f. p. de $\mathfrak{F}$ est d'ordre 3, de sorte que $a_0 > 0$, $a_n > 0$, $a_{n+1} \geqq 0$ et $n \geqq 1$. Soit m_N le maximum de $f(x_3)$ pour $f \in \mathfrak{F}_N^{(3)}$. Alors

$$m_N = P_{0,N}(x_3) = \frac{c_2 D_{0,N}(x_1, x_3) - c_1 D_{0,N}(x_2, x_3)}{D_{0,N}(x_1, x_2)},$$

et n est l'entier déterminé par

$$m_n < c_3 \leqq m_{n+1}.$$

Cela démontre le

THÉORÈME 28. — *Si $f \in \mathfrak{A}_1$, $0 < x_1 < x_2 < x_3 \leqq a$, et*

$$P(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_n(x_1) & \varphi_{n+1}(x_1) & f(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_n(x_2) & \varphi_{n+1}(x_2) & f(x_2) \\ \varphi_0(x_3) & \varphi_n(x_3) & \varphi_{n+1}(x_3) & f(x_3) \\ \varphi_0(x) & \varphi_n(x) & \varphi_{n+1}(x) & 0 \end{vmatrix}}{D_{0,n,n+1}(x_1, x_2, x_3)},$$

où n est déteminé par

$$(36) \qquad D(f, \varphi_0, \varphi_n)(x_1, x_2, x_3) > 0 \geqq D(f, \varphi_0, \varphi_{n+1})(x_1, x_2, x_3),$$

alors $f(x) \geqq P(x)$ dans (x_1, x_2) et $(x_3, a]$, tandis que $f(x) \leqq P(x)$ dans $(0, x_1)$ et (x_2, x_3). Si l'on a l'égalité en un point x différent de x_1, x_2, x_3, alors on l'a identiquement.

Cette inégalité peut s'écrire sous la forme

$$D(\varphi_0, \varphi_n, \varphi_{n+1}, f)(x_1, x_2, x_3, x) \begin{cases} \geqq 0 & \text{dans } (x_1, x_2) \text{ et } (x_3, a], \\ \leqq 0 & \text{dans } (0, x_1) \text{ et } (x_2, x_3). \end{cases}$$

D'une manière semblable nous pouvons déterminer explicitement la f. p. de $\mathfrak{F}$ pour $k = 4$ et $k = 5$, mais les conditions analogues à (36) deviennent bientôt peu maniables.

Si $\varphi_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, alors $\mathfrak{A}_1$ est la classe des fonctions absolument monotones dans l'intervalle $[0, a]$. Nous obtenons ainsi le

COROLLAIRE 28 *a*. — *Soit f une fonction absolument monotone dans l'intervalle $[0, a]$ et $0 < x_1 < x_2 < x_3 \leqq a$. Posons*

$$P(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x^n & x^{n+1} & 0 \\ 1 & x_1^n & x_1^{n+1} & f(x_1) \\ 1 & x_2^n & x_2^{n+1} & f(x_2) \\ 1 & x_3^n & x_3^{n+1} & f(x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1^n & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2^n & x_2^{n+1} \\ 1 & x_3^n & x_3^{n+1} \end{vmatrix}},$$

où n est déterminé par

$$\frac{f(x_2)(x_3^n-x_1^n)-f(x_1)(x_3^n-x_2^n)}{x_2^n-x_1^n}<f(x_3)\leqq\frac{f(x_2)(x_3^{n+1}-x_1^{n+1})-f(x_1)(x_3^{n+1}-x_2^{n+1})}{x_2^{n+1}-x_1^{n+1}}.$$

Alors $f(x)\geqq P(x)$ *dans* (x_1, x_2) *et* $(x_3, a]$, *et* $f(x)\leqq P(x)$ *dans* $(0, x_1)$ *et* (x_2, x_3). *Si l'égalité est valable pour une valeur de* $x\neq x_1, x_2, x_3$, *alors elle l'est identiquement.*

Cet énoncé devient particulièrement simple, si x_1, x_2 et x_3 forment une progression géométrique.

Corollaire 28 *b*. — *Soit* $\rho>1$ *et* $0<\rho^2 x_1\leqq a$, *et soit f absolument monotone dans* $[0, a]$. *Définissons* $P(x)$ *comme auparavant avec* $x_2=\rho x_1$, $x_3=\rho^2 x_1$, *et déterminons n par*

$$\rho^n<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}\leqq\rho^{n+1}.$$

Alors les conclusions du corollaire précédent ont lieu.

Corollaire 28 *c*. — *Si f est absolument monotone dans* $[0, \rho^3 x]$, *où* $\rho>1$ *et*

$$\rho^n<\frac{f(\rho^2 x)-f(\rho x)}{f(\rho x)-f(x)}\leqq\rho^{n+1},$$

alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & f(x) \\ 1 & \rho^n & \rho^{n+1} & f(\rho x) \\ 1 & \rho^{2n} & \rho^{2n+2} & f(\rho^2 x) \\ 1 & \rho^{3n} & \rho^{3n+3} & f(\rho^3 x) \end{vmatrix}\geqq 0.$$

Si les valeurs de $f(x)$, $f(\rho x)$ *et* $f(\rho^2 x)$ *sont données, cette inégalité détermine la plus petite valeur possible de* $f(\rho^3 x)$.

Si F est analytique dans $|z|\leqq a$, alors la moyenne quadratique

$$M_2(r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

possède la propriété que $M_2(r)^2$ est une fonction absolument monotone de r^2 pour $0\leqq r^2\leqq a^2$. Le théorème 27 nous donne le meilleur théorème possible de trois cercles, et les corollaires 28 *a*, 28 *b*, 28 *c* donnent des théorèmes de quatre cercles. De la même manière, nous tirons de nos résultats antérieurs la forme générale d'un théorème de k cercles, et au moyen de cette méthode nous pouvons obtenir explicitement les inégalités cherchées aussi pour $k=5$ et $k=6$. Dans l'appendice nous montrerons comment on peut déduire de ces résultats des inégalités correspondantes pour le maximum du module. Les dernières inégalités ne seront pas, évidemment, les meilleures possibles. Les travaux suivant traitent aussi du théorème de trois cercles : Hadamard [28], Hardy [31], Collingwood [17], Teichmüller [64], Carlson [14], Robinson [55] et [56], et Heins [33] et [34].

Pour les fonctions presque périodiques et analytiques dans une bande, dont les exposants appartiennent à une suite donnée, les résultats ci-dessus nous donnent des théorèmes de k lignes pour la moyenne quadratique, qui précisent les résultats bien connus de Dœtsch [20] et de Thorin [65] pour $k = 3$.

En utilisant le théorème 25 nous pouvons étudier sans difficulté le cas où quelques-uns des points donnés coïncident. Nous n'entrerons pas pourtant dans les détails. Ces résultats comprennent le contenu essentiel des théorèmes de Bernstein concernant les fonctions absolument monotones dans un intervalle fini. Il est curieux de remarquer que ses méthodes sont les plus simples lorsque tous les points $x_1, \ldots, x_k$ se confondent, tandis que nos méthodes le sont dans le cas extrême contraire.

Signalons que tous les problèmes extrémaux traités par les méthodes de Bernstein ont comme solutions des φ-nômes d'ordre $\leqq k$. Mais un ensemble $\mathfrak{F}$ tel que celui des fonctions $f \in \mathfrak{A}_1$ telles que $f(x_i) = c_i$, $1 \leqq i \leqq k$, possède plusieurs points extrêmes ou « sommets », tandis qu'il ne contient qu'un seul φ-nôme d'ordre $\leqq k$, d'après le corollaire 24 *c*. Les problèmes traités par Bernstein correspondent donc aux hyperplans d'appui à un sommet particulier de $\mathfrak{F}$, tandis que nos méthodes semblent être applicables aux problèmes plus généraux. Le corollaire 11 *c* est un exemple simple et naturel d'un problème extrémal dont la solution est un φ-nôme d'ordre 2 avec $k = 1$, et il est probable qu'un tel problème serait plus difficile à aborder par les méthodes de Bernstein.

L'analogue pour la moyenne quadratique du problème de Hadamard [29] (*cf.* aussi Gorny [27], Cartan [15], Kolmogoroff [39], Bang [6], et Rodov [57]) sur l'allure des dérivées successives d'une fonction donnée peut être résolu pour quelques classes de fonctions, par exemple les fonctions périodiques ou les fonctions presque périodiques dont les exposants appartiennent à une suite donnée. Nous réservons ces questions pour un autre travail.

De nouveaux phénomènes se présentent lorsque nous appliquons nos méthodes aux fonctions absolument monotones de plusieurs variables. Une fonction f est appelée absolument monotone dans un domaine D, si f et toutes ses dérivées sont non négatives dans D. Pour que la fonction $f(x, y)$ soit absolument monotone dans le rectangle R : $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, il faut et il suffit que f puisse être développée dans une série de puissances, $\Sigma a_{mn} x^m y^n$ aux coefficients non négatifs. C'est une extension facile d'un théorème de Bernstein [7] (p. 190).

Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des fonctions f absolument monotones dans R : $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, telles que

$$L_i(f) = f(x_i, y_i) = c_i, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

où (x_i, y_i) sont k points intérieurs donnés de R. Alors d'après le théorème 15, le minimum de $L(f) = f(1, 1)$ sur $\mathfrak{F}$ est atteint pour un polynome P dont au plus k coefficients s'annulent. Cette fonction extrémale est uniquement déterminée si $(L_1, \ldots, L_k, L)$ est c. r.

Prenons $k=2$ et examinons les conditions pour que (L_1, L_2, L) soit c. r. D'après (3), p. 4, nous trouvons que les conditions nécessaires et suffisantes sont :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_i^{m_1} y_i^{n_1} & x_i^{m_2} y_i^{n_2} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (i=1, 2), \tag{37}$$

$$\begin{vmatrix} x_1^{m_1} y_1^{n_1} & x_1^{m_2} y_1^{n_2} \\ x_2^{m_1} y_2^{n_1} & x_2^{m_2} y_2^{n_2} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{38}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^{m_1} y_1^{n_1} & x_1^{m_2} y_1^{n_2} & x_1^{m_3} y_1^{n_3} \\ x_2^{m_1} y_2^{n_1} & x_2^{m_2} y_2^{n_2} & x_2^{m_3} y_2^{n_3} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{39}$$

où (m_1, n_1), (m_2, n_2) et (m_3, n_3) sont des points distincts aux coordonnées entières dans le premier quadrant. Les conditions (37) et (38) signifient que $\frac{\log y_1}{\log x_1}$, $\frac{\log y_2}{\log x_2}$, et $\frac{\log \frac{y_2}{y_1}}{\log \frac{x_2}{x_1}}$ sont irrationnels. Le point (x_1, y_1) étant donné tel que $\frac{\log y_1}{\log x_1}$ est irrationnel, alors ces conditions disent que le point (x_2, y_2) ne se trouve sur aucune courbe d'un ensemble dénombrable de courbes algébriques. Puisque chacune de ces courbes est de mesure zéro dans le plan, l'ensemble des points (x_2, y_2) pour lesquels (L_1, L_2, L) n'est pas complètement régulier est partout dense, mais de mesure zéro. Le polynome extrémal est certainement unique si (x_2, y_2) n'appartient pas à cet ensemble exceptionnel. Nous ne savons pas si le minimum de $f(1, 1)$ sur $\mathfrak{F}$ est jamais atteint pour plus d'un polynome, parce que la condition de régularité complète est suffisante, mais n'est pas nécessaire, pour l'unicité. Remarquons qu'il y a des problèmes analogues simples où les dérivées sont données en plusieurs points, et où la fonction extrémale n'est pas unique précisément lorsque la condition de régularité complète est en défaut. Remarquons aussi que le principe de déformation ne s'applique pas ici, au moins directement, parce que $\frac{\log y_2}{\log x_2}$ et $\frac{\log \frac{y_2}{y_1}}{\log \frac{x_2}{x_1}}$ doivent être irrationnels, et doivent donc rester constantes au cours d'une déformation continue ; mais dans ce cas, si (x_1, y_1) est fixé, l'autre point (x_2, y_2) l'est aussi.

Nos études préliminaires indiquent que les développements des nombres irrationnels considérés ci-dessus comme fractions continues jouent un rôle important dans la détermination explicite des fonctions extrémales. Dans le cas des fonctions absolument monotones de plus de deux variables, il semble nécessaire d'utiliser l'une des généralisations de l'algorithme des fractions continues ; mais nous ne savons encore laquelle convient.

Nous espérons étudier dans un autre travail les problèmes non résolus que nous avons rencontrés au cours de ce chapitre.

V. — Une généralisation aux espaces de Banach.

Dans ce chapitre nous introduirons quelques conceptions de la théorie générale des espaces de Banach qui seront utiles dans la suite, et nous généraliserons une partie des résultats des chapitres précédents. Les généralisations dont il s'agit ici ne sont pas très profondes, mais elles pourraient posséder quelque intérêt en elles-mêmes. Les résultats, lorsqu'ils sont interprétés dans l'espace (l), ne comprennent pas tout à fait ceux du Chapitre III, car il ne semble pas exister un théorème général comme le théorème 14 sans quelque hypothèse additionnelle sur les fonctions $L_1, \ldots, L_k$. Dans les chapitres suivants nous généraliserons les résultats des Chapitres III et IV d'une autre manière, qui nous semble être plus significative; en particulier, le théorème 14 s'étend aux espaces de Banach, qu'envisagent les Chapitres VI et VII.

Soit E un espace de Banach, et soit E^* l'espace conjugué. Un ensemble non vide K de E^* est *régulièrement convexe* si, quel que soit l'élément f_0 de $E^* - K$, il existe un x_0 dans E tel que

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0).$$

Cette notion a été introduite par Krein et Šmulian [42]. Pour apprécier la signification de cette propriété, il faut se reporter au théorème de Mazur [45], d'après lequel si K est un ensemble fermé et convexe dans un espace de Banach E et si $x_0 \in E - K$, alors il y a un f_0 dans E^* tel que

$$m = \sup_{x \in K} f_0(x) < f_0(x_0).$$

Si $m < m_1 < f_0(x_0)$, alors l'hyperplan $f_0(x) = m_1$ sépare x_0 de K. Si l'on appplique le théorème de Mazur à un ensemble fermé et convexe K dans l'espace conjugué E^* d'un espace E de Banach, on trouve que si $f_0 \in E^* - K$, alors f_0 peut être séparé de K par un hyperplan de la forme $L(f) = \text{const.}$, où L appartient à E^{**}. L'ensemble K est régulièrement conxexe si cette séparation peut toujours s'accomplir au moyen d'un hyperplan qui correspond à un élément de *l'espace* E, c'est-à-dire un hyperplan de la forme $f(x_0) = \text{const.}$ On voit ainsi que cette notion ne s'applique qu'aux espaces qui sont les conjugués d'autres. Dans le cas spécial où E est réflexif (*cf.* Hahn [30], c'est-à-dire que $E = E^{**}$, la convexité régulière se confond essentiellement avec la convexité ordinaire. Il en est ainsi en particulier si E est uniformément convexe; les espaces L^p, $1 < p < \infty$, en sont des exemples. Pour d'autres renseignements sur les relations entre ces notions nous citons les travaux de Clarkson [16], Day [18], Pettis [50], Milman [46], Krein et Šmulian [42], Šmulian et Gantmacher [60], Krein et Milman [41]. Les théorèmes suivants sont connus :

THÉORÈME 29. — *Pour qu'un ensemble* $K \subset E^*$ *soit régulièrement convexe, il faut et il suffit qu'il soit convexe et faiblement fermé* (Krein et Šmulian [41], th. 10).

THÉORÈME 30. — *Pour qu'un ensemble* $K \subset E^*$ *soit régulièrement convexe, il faut et il suffit qu'il soit convexe et que l'intersection de* K *avec chaque sphère fermée soit faiblement compacte* (*Ibid.*, th. 11).

Ces théorèmes sont démontrés par Krein et Šmulian sous l'hypothèse que E est séparable, mais on montre au moyen de modifications triviales de leurs démonstrations (*cf.* Alaoglu [1]) que cette restriction est superflue.

THÉORÈME 31. — *Si* $K \subset E^*$ *est borné et régulièrement convexe, alors il contient au moins un point extrême. En effet,* K *est l'enveloppe régulièrement convexe de l'ensemble de ses points extrêmes* (Krein et Šmulian [41]).

THÉORÈME 32. — *Si* $L \in E^{**}$ *et* $L(f)$ *est faiblement continue, alors* $L \in E$, *c'est-à-dire qu'il y a un* $x_0 \in E$ *tel que* $L(f) = f(x_0)$ *quel que soit* $f \in E^*$ (Banach [3], p. 131; Alaoglu [1]).

Évidemment, l'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles régulièrement convexes est aussi régulièrement convexe si elle n'est pas vide. Il est trivial d'ailleurs que pour un point $x_0 \in E$ est une constante arbitraire m, l'ensemble des $f \in E^*$ tels que $f(x_0) \leqq m$ l'est aussi. D'une façon plus générale, si K est régulièrement convexe, $L \in E^{**}$, et L est semi-continue inférieurement sur K dans la topologie faible, alors l'ensemble K_1 des $f \in K$ tels que $L(f) \leqq m$ est régulièrement convexe. Les sphères fermées dans E^* fournissent une autre classe d'ensembles régulièrement convexes.

Les théorèmes suivants éclaircissent l'importance des ensembles régulièrement convexes dans l'étude des problèmes extrémaux. On se sert de leur propriété locale d'être faiblement compact (th. 30) pour démontrer que la valeur extrême est atteinte, puis le théorème 31 montre que cette valeur est atteinte en un point extrême.

THÉORÈME 33. — *Soit* $K \subset E^*$ *un ensemble borné et régulièrement convexe, et soit* G *une fonction convexe et semi-continue supérieurement sur* K *dans la topologie faible. Alors* $G(f)$ *atteint son maximum sur* K *en un point extrême de* K.

Démonstration. — Soit m la borne supérieure de $G(f)$ sur K, et soit $K(a)$ l'ensemble des $f \in K$ tels que $G(f) \geqq a$. Alors, si $a < m$, $K(a)$ est faiblement fermé et non vide. Puisque K est faiblement compact, ces ensembles ont une intersection non vide $K(m)$, c'est-à-dire que $G(f)$ atteint son maximum sur K. Mais l'ensemble $K(m)$ est régulièrement convexe et borné, de sorte qu'il possède au moins un point extrême f_0. Si f_0 n'était pas un point extrême de K, alors il y aurait des éléments $f_1, f_2 \in K$ et un nombre t tels que

$$f_0 = tf_1 + (1-t)f_2, \qquad 0 < t < 1, \qquad f_1 \neq f_0, \qquad f_2 \neq f_0.$$

On aurait donc

$$m = G(f_0) \leqq t\,G(f_1) + (1-t)\,G(f_2) \leqq tm + (1-t)m = m,$$

d'où $G(f_1) = G(f_2) = m$ et $f_1, f_2 \in K(m)$, ce qui contredit le fait que f_0 est un point extrême de $K(m)$.

Corollaire 32 *a.* — *Quel que soit $x \in E$, $f(x)$ atteint son maximum sur* K *en un point extrême de* K.

Passons maintenant à l'étude des points extrêmes de certains ensembles spéciaux.

Un sous-ensemble $\mathfrak{F}$ de E^* est appelé *total* si $f(x)$ ne s'annule pas pour tout $f \in \mathfrak{F}$, à moins que x ne soit égal à zéro. $\mathfrak{F}$ est dit *fondamental* si $\mathfrak{F}$ est total, et si f n'appartient pas à l'enveloppe linéaire et faiblement fermée de $\mathfrak{F} - \{f\}$, quel que soit l'élément f de $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire si aucun f dans $\mathfrak{F}$ n'est la limite faible de combinaisons linéaires d'autres éléments de $\mathfrak{F}$. Cela revient à dire (*cf.* Banach [5], p. 122) qu'à chaque $f \in \mathfrak{F}$ correspond un $x_f \in E$ tel que

$$g(x_f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } g \in \mathfrak{F},\ g \neq f, \\ 1 & \text{pour } g = f. \end{cases}$$

L'ensemble $\mathfrak{F}'$ des éléments x_f est donc biorthogonal à $\mathfrak{F}$, et la correspondance $f \leftrightarrow x_f$ est biunivoque.

Soit $\mathfrak{F}$ un sous-ensemble total de E^* et soit φ une fonction réelle définie sur $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-ensemble fini de E^* contenant a éléments, et soit ψ une fonction réelle définie sur $\mathfrak{M}$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\varphi, \mathfrak{M}, \psi)$ des $x \in E$ tels que

$$f(x) \geqq \varphi(f) \qquad \text{pour } f \in \mathfrak{F}, \tag{40}$$

$$g(x) = \psi(g) \qquad \text{pour } g \in \mathfrak{M}. \tag{41}$$

Évidemment $\mathfrak{X}$ est convexe et fermé.

Théorème 34. — *Soit x_0 un point extrême de $\mathfrak{X}$, soit $\mathfrak{F}''$ un ensemble de b éléments de $\mathfrak{F}$, soit $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} - \mathfrak{F}''$, et soit c la dimension du sous-espace linéaire fermé E_1 de E composé des $y \in E$ tels que*

$$f(y) = 0$$

pour tous les $f \in \mathfrak{F}'$.

Alors $c \leqq b$ et $f(x_0) = \varphi(f)$ pour tous les $f \in \mathfrak{F}''$, sauf au plus $b + a - c$ exceptions.

Démonstration. — Soient $y_1, \ldots, y_r$ des éléments linéairement indépendants de E_1, et soient $f_1, \ldots, f_b$ les éléments de $\mathfrak{F}''$. Si le rang de la matrice $[f_i(y_j)]$ est moindre que r, alors il y a des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, tels que

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_r^2 \neq 0,$$

et

$$\sum_{j=1} \alpha_j f_i(y_j) = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq b.$$

Alors $f\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_j\right) = 0$ pour tous les f dans $\mathfrak{F}$, de sorte que $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_j = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent, le rang de la matrice $[f_i(y_j)]$ est égal à r; évidemment, il ne dépasse pas b. Donc $r \leqq b$, ce qui entraîne que $c \leqq b$.

Soit maintenant $y_1, \ldots, y_c$ une base de E_1. Soit E_c l'espace affine à c dimensions, et soit P l'ensemble des points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_c)$ dans E_c tels que

$$x_0 + \sum_{j=1}^{c} \alpha_j y_j \in \mathfrak{X}.$$

Alors P est caractérisé par les conditions

$$\sum_{j=1}^{c} \alpha_j f_i(y_j) \geqq \varphi(f_i) - f_i(x_0), \qquad 1 \leqq i \leqq b, \tag{42}$$

$$\sum_{j=1}^{c} \alpha g_j(y_j) = 0, \qquad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{M}. \tag{43}$$

Ceci montre que P est un tronçon dans E_c, et l'origine est un sommet de P, parce que x_0 est un point extrême de $\mathfrak{X}$. Il s'ensuit qu'au moins c égalités ont lieu pour $\alpha_1 = \ldots = \alpha_c = 0$, et $\varphi(f_i) = f_i(x_0)$ pour $1 \leqq i \leqq b$, avec au plus $b - (c - a)$ exceptions.

Supposons maintenant que $\mathfrak{J}$ est un ensemble fondamental dans E^*, et soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des sous-ensembles de E^* tels que $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N} \neq 0$. Supposons aussi que nous ayons deux fonctions, l'une, φ, définie sur $\mathfrak{F} = \mathfrak{J} \cup \mathfrak{N}$, et l'autre, ψ, définie sur $\mathfrak{M}$. Soient $f_1, \ldots, f_b$, un choix arbitraire de b éléments distinct, de $\mathfrak{J}$. Alors la dimension du sous-espace linéaire et fermé E_1, composé des $x \in E$ tels que $f(x) = 0$ pour tous les $f \in \mathfrak{J} - \{f_1, \ldots, f_b\}$, est précisément égale à b. Car si $x \in E_1$, posons

$$x' = \sum_{i=1}^{b} f_i(x) x_i,$$

en écrivant x_i pour x_{f_i}, $1 \leqq i \leqq b$. Il s'ensuit que $f(x' - x) = 0$ pour tous les $f \in \mathfrak{J}$, de sorte que $x' = x$. Et réciproquement, une combinaison linéaire quelconque des points $x_1, \ldots, x_b$ appartient à E_1.

Corollaire 34 *a*. — *Si* $\mathfrak{F} = \mathfrak{J} \cup \mathfrak{N}$, *où* $\mathfrak{J}$ *est fondamental et* $\mathfrak{N}$ *comprend* k *éléments, alors dans les mêmes conditions qu'auparavant,* (40) *a lieu avec au plus* $a + k$ *exceptions.*

Théorème 35. — *Sous l'hypothèse du corollaire* 34 *a*, *soit* $\mathfrak{J}' \subset E$ *l'ensemble biorthogonal à* $\mathfrak{J}$ *comme ci-dessus. Supposons que pour chaque sous-ensemble fini* $\{f_1, \ldots, f_c\}$ *de* $\mathfrak{J}$ *où* $c \leqq a + k$ *et chaque ensemble* $\{g_1, \ldots, g_c\}$ *d'éléments distincts de* $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$, *le déterminant* $\det[g_i(x_{f_j})] \neq 0$.

Alors les points extrêmes de $\mathfrak{X}$ sont précisément les points x_0 pour lesquels (40) *a lieu avec au plus $a+k$ exceptions.*

Démonstration. — Le corollaire 34 *a* met en évidence que cette condition est nécessaire pour que x_0 soit un point extrême de $\mathfrak{X}$. Il reste donc à montrer que la condition est suffisante.

Supposons que $x_0 \in \mathfrak{X}$ et que (40) est vérifiée avec au plus $a+k$ exceptions. Si x_0 n'était pas un point extrême de $\mathfrak{X}$, il existerait des points y_0, $z_0 \in \mathfrak{X}$ et λ tels que

$$x_0 = \lambda y_0 + (1-\lambda) z_0, \qquad 0 < \lambda < 1, \qquad x_0 \neq y_0, \qquad x_0 \neq z_0.$$

Si $f \in \mathfrak{F}$ n'est pas exceptionnel pour x_0, alors

$$\varphi(f) = f(x_0) = \lambda f(y_0) + (1-\lambda) f(z_0) \geqq \lambda \varphi(f) + (1-\lambda)\varphi(f) = \varphi(f),$$

de sorte que

$$f(y_0) = f(z_0) = \varphi(f).$$

Soit $\mathfrak{F}''$ l'ensemble des éléments exceptionnels de $\mathfrak{J}$, s'il en existe, soit $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} - \mathfrak{F}''$ et $\mathfrak{F}'' = \{f_1, \ldots, f_b\}$. Soient

$$y_0 - x_0 = \sum_{i=1}^{b} \alpha_i x_i, \qquad z_0 - x_0 = \sum_{i=1}^{b} \beta_i x_i, \qquad x_i = x_{f_i},$$

et soient $g_1, \ldots, g_c$ les éléments non exceptionnels de $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$.

On a donc

$$\sum_{i=1}^{b} \alpha_i g_j(x_i) = \sum_{i=1}^{b} \beta_i g_j(x_i) = 0, \qquad 1 \leqq j \leqq c.$$

Alors le nombre des éléments exceptionnels de $\mathfrak{N}$ est égal à $k-(c-a) = k+a-c$, d'où $b \leqq c$. Les b premières équations ci-dessus forment un ensemble d'équations linéaires et homogènes avec b inconnues, dont le déterminant est différent de zéro, ce qui entraîne que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_b = \beta_1 = \ldots = \beta_b = 0$, et $y_0 = z_0 = x_0$.

Corollaire 35 *a*. — *Soit $\mathfrak{J}$ un ensemble fondamental dans* E^{**}, *soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des sous-ensembles finis de* E^{**}, *et soit $n > 0$ le nombre des éléments de $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$. Soient φ et ψ des fonctions réelles sur $\mathfrak{F} = \mathfrak{J} \cup \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$, respectivement, et soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des $f \in E^*$ tels que*

$$F(f) \geqq \varphi(F) \tag{44}$$

pour tous les $F \in \mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des $f \in E^*$ tels que (44) *est vérifiée pour tous les $F \in \mathfrak{F}$ et tels que*

$$G(f) = \psi(G) \tag{45}$$

pour $G \in \mathfrak{M}$. Si les éléments de $\mathfrak{J} \cup \mathfrak{M}$ sont faiblement continus sur E^*, *et* *ceux de* $\mathfrak{U}$ *sont semi-continus supérieurement sur* $\mathfrak{A}$ *dans la topologie faible, et si* $\mathfrak{K}$ *est borné et non vide, alors* $\mathfrak{K}$ *contient un* f *tel que* $F(f) = \varphi(F)$ *pour tous les* $F \in \mathfrak{F}$, *sauf au plus n exceptions.*

Corollaire 35 *b*. — *Dans l'hypothèse du corollaire* 35 *a*, *si* $H(f)$ *est convexe et faiblement continue supérieurement sur* $\mathfrak{K}$, *alors* $H(f)$ *atteint sa borne supérieure sur* $\mathfrak{K}$ *en au moins un point* f *tel que* $F(f) = \varphi(F)$ *pour tous les* F, *sauf au plus n exceptions.*

Remarquons que, dans ce travail, nous nous occupons en premier lieu des problèmes où nous cherchons l'extrémum d'une fonction *linéaire* sur un ensemble convexe. Le théorème 33 et le corollaire 35 *b* laissent entrevoir une méthode pour traiter aussi une large classe de problèmes non linéaires du calcul des variations. Nous espérons étudier ce sujet dans un autre travail.

(*A suivre.*)