BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS KOSZUL

# Homologie et cohomologie des algèbres de Lie

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 78 (1950), p. 65-127

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__65_0>

# HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE;

PAR M. JEAN-LOUIS KOSZUL.

## INTRODUCTION.

Les questions traitées dans ce travail tirent leur origine des Mémoires de M. Élie Cartan sur la topologie des espaces de groupes et des espaces homogènes [1] (*). En s'appuyant sur des théorèmes établis par M. de Rham, M. É. Cartan y a montré notamment que les nombres de Betti d'un espace homogène compact peuvent, en principe, se calculer directement à partir des algèbres de Lie du groupe transitif et du sous-groupe laissant un point invariant. Ces résultats ouvraient une voie d'accès purement algébrique aux invariants d'homologie des espaces homogènes, et en particulier aux nombres de Betti des groupes compacts.

En fait, les progrès considérables qui furent accomplis depuis dans ce domaine, principalement par MM. Hopf [2], Samelson [3] et Leray [4] (**), reposent sur des démonstrations essentiellement topologiques qui débordent souvent largement le cadre des espaces homogènes. Cependant, les travaux de MM. Eilenberg et Hochschild montraient plus récemment l'intérêt des théories cohomologiques que l'on peut greffer sur certaines structures algébriques. Dans cette direction, les résultats de M. E. Cartan conduisent à attacher à une algèbre de Lie *quelconque* des êtres algébriques de nature cohomologique qui, dans le cas d'une algèbre de Lie de groupe compact, coïncident avec les invariants de cohomologie topologique. Dans une publication de 1948, MM. Chevalley et Eilenberg ont développé cette théorie et ont montré ses applications à l'étude des représentations linéaires. Mon travail reprend certaines parties de leur Mémoire pour en donner un développement autonome. J'ai cherché en particulier à obtenir des résultats qui, appliqués au cas compact, redonnent les principaux théorèmes de Hopf et de Samelson. On verra qu'à cet égard, mes démonstrations se réduisent le plus souvent à reconstituer par des moyens algébriques une situation à laquelle conduisaient des considérations topologiques et à en tirer les conséquences en suivant de très près les voies tracées (§ 10, 13 et 17). Si cet objectif n'a pas été entière-

(*) On renvoie aux paragraphes du texte par des numéros entre parenthèses ( ) et à la bibliographie qui suit cette introduction par des numéros entre crochets [ ].

(**) Pour s'en tenir aux travaux les plus généraux ment atteint, j'ai par contre obtenu avec ces procédés algébriques d'autres résultats qui n'avaient pas été obtenus dans le cas compact par des méthodes topologiques (§ 11 et 18).

J'utilise presque exclusivement les tenseurs antisymétriques des algèbres de Lie et certaines propriétés des algèbres extérieures (§ 2) sont constamment appliquées au cours des démonstrations. Néanmoins, les formes quadratiques invariantes interviennent dans l'étude des classes de cohomologie de degré 3 d'une algèbre de Lie simple (§ 11). Le point de vue de la cohomologie a du être complété par celui de l'homologie qui, dans ces questions, dépasse de beaucoup le simple point de vue dual, du fait que l'espace des chaînes d'une algèbre de Lie possède une structure multiplicative (§ 4 et 8). Je montre du reste (§ 13) que dans le cas compact, cette structure multiplicative se rattache au produit de Pontrjagin dont on connaît le rôle dans l'étude topologique de ces problèmes. Pour tirer parti de cette structure, on est conduit à faire certaines restrictions quant à la nature des algèbres de Lie étudiées. Ainsi, les théorèmes de Hopf et de Samelson supposent vérifiées certaines conditions de semi-simplicité (§ 10).

La donnée d'une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ dans une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ conduit à définir une « algèbre de cohomologie relative » qui, dans le cas compact, est celle d'un espace homogène (§ 12) (*). J'étudie en particulier l'interdépendance de l'algèbre de cohomologie relative et des algèbres de cohomologie de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{b}$. Ce problème, semblable à celui que l'on rencontre dans l'étude des espaces fibrés, est abordé ici par un procédé analogue à celui qu'a introduit M. Leray dans sa *Théorie de l'anneau d'homologie d'une application* [4]. Il consiste à définir une suite d'algèbres qui, au départ, ne dépendent que de la cohomologie relative et de la cohomologie de $\mathfrak{b}$ et qui aboutissent par étapes à la cohomologie de $\mathfrak{a}$ (§ 14 et 15). Cette méthode est pleinement efficace lorsque la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est « non-homologue à zéro » et permet de retrouver les théorèmes de M. Samelson qui correspondent à ce cas (§ 17). Lorsqu'il n'en est plus ainsi, les résultats que l'on obtient (§ 18) permettent de déduire de la « position homologique de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$ » l'existence de certains générateurs de degré pair dans l'algèbre de cohomologie relative. Ces propriétés sont étroitement liées aux notions que l'on rencontre dans les travaux de M. Hirsch [6].

Une des imperfections de la théorie telle que je la présente est son impuissance à aborder les propriétés homologiques liées aux questions de rang. En particulier, il y aurait intérêt à obtenir une démonstration purement algébrique de l'égalité du rang et du nombre des classes de cohomologie primitives linéairement indépendantes qui a été démontrée pour les algèbres de Lie de groupes compacts.

J'exprime ma très grande reconnaissance à M. H. Cartan qui a présidé à l'élaboration de ce travail et en a revu les rédactions avec une inlassable patience. Sur bien des points, je lui suis redevable de fructueuses améliorations et si j'ai pu parfois échapper à des complications inutiles, c'est aussi à lui que le dois.

(*) On trouvera une récapitulation des propriétés homologiques des espaces homogènes obtenues antérieurement à 1940 dans H. Hopf et H. Samelson, *Ein Satz über die Wirkungsraüme geschlossener Liescher Gruppen* (*Comm. Math. Helv.*, t. 13, 1940, p. 240-251).

J'ai de plus bénéficié des conseils (et de l'exemple) de M. C. Chevalley qui m'a beaucoup aidé à situer ce travail dans le cadre algébrique où je l'expose ici. Je lui en exprime ma gratitude et remercie également MM. A. Denjoy, J. Leray et P. Dubreil qui ont bien voulu se joindre à M. Cartan pour constituer le jury auquel je soumets cette Thèse.

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] É. Cartan, *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos* (*Ann. Société Pol. de Math.*, vol. 8, 1929, p. 181-225).

[2] H. Hopf. *Ueber die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen* (*Ann. of Math.*, vol. 42, 1941, p. 22-52).

[3] H. Samelson, *Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten* (*Ann. of Math.*, vol. 42, 1941, p. 1091-1137).

[4] J. Leray, *L'anneau d'homologie d'une représentation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 1366-1368); *Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation* (*ibid.*, p. 1419-1422).

[5] C. Chevalley et S. Eilenberg, *Cohomology Theory of Lie groups and Lie algebras* (*Trans. of Amer, Math. Soc.*, vol. 63, 1948, p. 85-124).

[6] N. Bourbaki. *Algèbre multilinéaire*, Paris, 1948.

[7] G. Hirsch, *Un isomorphisme attaché aux structures fibrées* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 1328-1330).


## INDEX DES DÉFINITIONS.



# CHAPITRE I.

## Nomenclature et notions préliminaires.

**Notations.** — Soient V et V′ des espaces vectoriels sur un corps K (¹) et $\gamma$ une application linéaire de V dans V′. On désignera par $\gamma . e$ l'image par $\gamma$ d'un élément $e \in$ V. Si U est un sous-espace de V, $\gamma$.U désignera son image par $\gamma$ dans V′.

(¹) On n'envisagera que des espaces vectoriels de dimension finie. Sauf restriction explicite, le corps de base sera un corps commutatif dont on suppose seulement la caractéristique $\neq 2$.

Soit $\gamma'$ une application linéaire de $V'$ dans un espace vectoriel $V''$; on désignera par $\gamma'\gamma$ l'application linéaire composée de $\gamma$ et de $\gamma'$ qui applique un élément $e \in V$ en $\gamma'\gamma.e = \gamma'.(\gamma.e) \in V''$.

**1. Dérivations, antidérivations et algèbres graduées.** — Soit A une algèbre et soit $\omega$ un automorphisme involutif de A.

Une *dérivation* $\theta$ de A (relativement à $\omega$) est un endomorphisme linéaire de A tel que

$$\theta\omega - \omega\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta.(ab) = (\theta.a)b + a(\theta.b),$$

quels que soient $a$, $b \in A$.

Une *antidérivation* $\bar\theta$ de A (relativement à $\omega$) est un endomorphisme linéaire de A tel que

$$\bar\theta\omega + \omega\bar\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar\theta.(ab) = (\bar\theta.a)b + (\omega.a)(\bar\theta.b),$$

quels que soient $a$, $b \in A$.

Si A possède une unité $e$, on remarque (en posant $a = b = e$) que $e$ est un zéro de toutes les dérivations et antidérivations de A. On vérifie par ailleurs que

(1.1) *si* $\theta_1$ *et* $\theta_2$ *sont des dérivations de* A, *leur crochet* $[\theta_1, \theta_2] = \theta_1\theta_2 - \theta_2\theta_1$ *est encore une dérivation;*

(1.2) *le crochet d'une dérivation et d'une antidérivation de* A *est une antidérivation;*

(1.3) *si* $\bar\theta_1$ *et* $\bar\theta_2$ *sont des antidérivations de* A, *alors* $\bar\theta_1\bar\theta_2 + \bar\theta_2\bar\theta_1$ *est une dérivation;*

(1.4) *si* $\bar\theta$ *est une antidérivation, alors* $\bar\theta^2 = \bar\theta\,\bar\theta$ *est une dérivation.*

*Structure d'algèbre graduée* (²). — Une *algèbre graduée* est une algèbre A où l'on a défini une famille de sous-espaces $A^p$ (l'indice $p$ prenant toutes les valeurs entières $\geq 0$ et $\leq 0$) vérifiant les conditions : 1° l'espace de A est somme directe des sous-espaces $A^p$; 2° le produit d'un élément de $A^p$ par un élément de $A^q$ est dans $A^{p+q}$. Un élément de $A^p$ sera dit *de degré* $p$; on dira qu'il est *homogène* si l'on veut exprimer qu'il appartient à l'un des sous-espaces $A^p$ sans préciser lequel.

Les algèbres graduées qui interviendront dans la suite vérifieront généralement la loi de commutation

$$ab = (-1)^{pq}ba \tag{1.5}$$

pour $a$ et $b$ de degrés respectifs $p$ et $q$. Par ailleurs, on sera toujours dans le cas où $A^p = \{0\}$ pour tout $p < 0$.

Soient A et B deux algèbres sur un même corps K graduées respectivement par des sous-espaces $A^p$ et $B^p$. Leur *produit tensoriel* $A \otimes B$ est l'algèbre graduée obtenue en adoptant dans l'espace produit tensoriel (³) de A et de B.

(²) La notion d'algèbre graduée et différentes autres notions algébriques adaptées à l'étude de l'homologie ont été utilisées ces dernières années par MM. J. Leray, H. Cartan et nous même. On s'efforcera ici de respecter la nomenclature indiquée par H. Cartan, *Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe. Notions algébriques préliminaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948. p. 148-150).

1° le produit que définit la condition

(1.6) $$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{pq}(aa' \otimes bb'),$$

pour $a \in A$, $a' \in A^p$, $b \in B^q$ et $b' \in B$;

2° la structure graduée que définissent les sous-espaces

$$C^r = \sum^{p+q=r} A^p \otimes B^q \subset A \otimes B.$$

Grâce à ces conventions, si deux algèbres graduées vérifient la condition (1.5), leur produit tensoriel la vérifie aussi.

Lorsqu'il sera question de dérivations ou d'antidérivations d'une algèbre graduée A, il s'agira, sauf mention contraire, de dérivations ou d'antidérivations relatives à l'automorphisme involutif $\omega$ de A, tel que $\omega.u = (-1)^p u$ pour tout élément $u$ de degré $p$. *On notera $\bar{u}$ l'image de $u$ par $\omega$.*

**2. Quelques propriétés des algèbres extérieures.** — Soit E un espace vectoriel. On désigne par $\wedge(E)$ son algèbre extérieure et par $\wedge^p(E)$ le sous-espace de ses $p$-vecteurs (4); on pose $\wedge^p(E) = \{0\}$ pour $p < 0$. Les $\wedge^p(E)$ définissent dans $\wedge(E)$ une structure d'algèbre graduée vérifiant la condition (1.5); le produit extérieur aura pour symbole $\wedge$. On désigne par $E^*$ l'espace dual de E.

L'usage des algèbres extérieures conduit à faire un certain nombre d'*identifications* que l'on explicitera ici et qui resteront implicites dans la suite.

(2.1) *On identifie* $\wedge^1(E)$ *avec* E *et* $\wedge^0(E)$ *avec le corps de base* K dont l'unité devient ainsi l'unité de l'algèbre $\wedge(E)$ et sera notée I. Les éléments de $\wedge^0(E)$ seront appelés les scalaires de $\wedge(E)$.

(2.2) *L'espace de* $\wedge(E^*)$ *s'identifie au dual de l'espace de* $\wedge(E)$ (5); la fonction bilinéaire de dualité se définit par la condition

$$\langle x^1 \wedge \ldots x^i \wedge \ldots x^p, f^1 \wedge \ldots f^j \wedge \ldots f^p \rangle = \det \|\langle x^i, f^j \rangle\|,$$

lorsque $x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^p \in E$ et $f^1, \ldots, f^j, \ldots, f^p \in E^*$.

Soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces vectoriels sur un corps K. Toute application linéaire $\gamma : E_1 \to E_2$ se *prolonge* d'une manière et d'une seule en un *homomorphisme* de l'algèbre $\wedge(E_1)$ dans l'algèbre $\wedge(E_2)$. Cet homomorphisme que l'on désignera encore par $\gamma$ conserve les degrés (on dira en ce sens que c'est un *homomorphisme d'algèbres graduées*). Si $\gamma : E_1 \to E_2$ est un isomorphisme, alors son prolongement est aussi un isomorphisme. Par suite de l'identification (2.2),

(2.3) *l'application linéaire transposée du prolongement de* $\gamma$ *à* $\wedge(E_1)$ *est le prolongement à* $\wedge(E_2^*)$ *de l'application linéaire* ${}^t\gamma : E_2^* \to E_1^*$ *transposée de* $\gamma : E_1 \to E_2$.

---

(3) *Cf.* N. BOURBAKI [6]. p. 3-5.

(4) Pour tout ce qui concerne les algèbres extérieures, on se reportera à l'Ouvrage de N. Bourbaki [6] dont on respectera ici les notations.

(5) *Cf.* BOURBAKI [6], p. 101.

Soit E un espace vectoriel somme directe de deux sous-espaces $E_1$ et $E_2$. Les isomorphismes identiques de $E_1$ et $E_2$ dans E se prolongent en des isomorphismes $\nu_1 : \wedge(E_1) \to \wedge(E)$ et $\nu_2 : \wedge(E_2) \to \wedge(E)$. L'application linéaire du produit tensoriel $\wedge(E_1) \otimes \wedge(E_2)$ dans $\wedge(E)$ qui transforme un élément

$$u \otimes v \in \wedge(E_1) \otimes \wedge(E_2) \quad \text{en} \quad (\nu_1 . u) \wedge (\nu_2 . v)$$

est un *isomorphisme* de l'algèbre graduée $\wedge(E_1) \otimes \wedge(E_2)$ *sur* l'algèbre graduée $\wedge(E)$, grâce auquel

(2.4) $\wedge(E_1 + E_2)$ *s'identifie à* $\wedge(E_1) \otimes \wedge(E_2)$.

De même,

(2.4′) $\wedge(E_1^* + E_2^*)$ *s'identifie à* $\wedge(E_1^*) \otimes \wedge(E_2^*)$.

Compte tenu de (2.2), on peut définir une relation de dualité entre les espaces $\wedge(E_1) \otimes \wedge(E_2)$ et $\wedge(E_1^*) \otimes \wedge(E_2^*)$ en posant

$$\langle u \otimes v, a \otimes b \rangle = \langle u, a \rangle \langle v, b \rangle$$

pour $u \in \wedge(E_1)$, $v \in \wedge(E_2)$, $a \in \wedge(E_1^*)$ et $b \in \wedge(E_2^*)$. La dualité des espaces $\wedge(E_1 + E_2)$ et $\wedge(E_1^* + E_2^*)$ qu'on obtient ainsi est celle qui résulte par ailleurs de (2.2) et de l'identification évidente de $E_1^* + E_2^*$ avec $(E_1 + E_2)^*$.

Avec l'identification (2.4), on a

(2.5) $\nu_1 . u = u \otimes 1$ pour tout $u \in \wedge(E_1)$.

Par suite, si $a \in \wedge(E_1^*)$ et $b \in \wedge(E_2^*)$, on a d'après (2.4)

(2.5′) $${}^t\nu_1 . (a \otimes b) = b_0 a,$$

où $b_0$ désigne la composante scalaire de $b$ et ${}^t\nu_1$ le transposé de $\nu_1$.

On aura par la suite à utiliser une propriété caractéristique de la structure multiplicative que l'identification (2.2) définit dans l'espace dual d'une algèbre extérieure :

Lemme. 2.1. — *Soit* $\varphi$ *l'isomorphisme de* $\wedge(E)$ *dans* $\wedge(E + E)$ *qui prolonge l'isomorphisme de* E *sur la diagonale de* E + E. *Son transposé* ${}^t\varphi$ *transforme un élément* $a \otimes b$ *de* $\wedge(E^*) \otimes \wedge(E^*)$ *en* $a \wedge b$.

*Démonstration.* — D'après (2.3), ${}^t\varphi : \wedge(E^*) \otimes \wedge(E^*) \to \wedge(E^*)$ est un homomorphisme d'algèbres; on a donc

$${}^t\varphi . (a \otimes b) = {}^t\varphi . ((a \otimes I) \wedge (I \otimes b)) = {}^t\varphi . ((a \otimes I)) \wedge ({}^t\varphi . (I \otimes b)).$$

En composant $\varphi$ avec les projections de E + E sur les sous-espaces composants E, on obtient l'isomorphisme identique de E. Compte tenu de (2.5), on en déduit que

$${}^t\varphi . (a \otimes I) = a \quad \text{et} \quad {}^t\varphi . (I \otimes b) = b.$$

Par suite, on a bien

$${}^t\varphi . (a \otimes b) = a \wedge b.$$

*Les dérivations prolongeant des endomorphismes.* — Soit $\eta$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Il existe une dérivation et une seule de l'algèbre graduée $\wedge(\mathrm{E})$ qui coïncide avec $\eta$ sur $\mathrm{E}=\wedge^1(\mathrm{E})$. Elle se définit par la formule

$$(2.6) \qquad \eta'.(x^1\wedge\ldots x^i\wedge\ldots x^p) = \sum_{i=1}^{i=p} x^1\wedge\ldots(\eta.x^i)\wedge\ldots x^p,$$

lorsque $x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^p \in \mathrm{E}$.

Par suite de l'identification (2.2),

(2.7) *l'endomorphisme linéaire transposé de la dérivation $\eta'$ qui prolonge $\eta$ est la dérivation de $\wedge(\mathrm{E}^*)$ qui prolonge l'endomorphisme ${}^t\eta$ de $\mathrm{E}^*$ transposé de $\eta$.*

En effet, si $x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^p \in \mathrm{E}$ et $f^1, \ldots, f^i, \ldots, f^p \in \mathrm{E}^*$, on a, en désignant par $\Delta^{ij}$ le mineur relatif à la ligne $i$ et à la colonne $j$ de $\det \| \langle x^i. f^j \rangle \|$,

$$\langle x^1\wedge\ldots x^i\wedge\ldots x^p,\ {}^t(\eta').(f^1\wedge\ldots f^j\wedge\ldots f^p)\rangle = \langle \eta'.(x^1\wedge\ldots x^i\wedge\ldots x^p), f^1\wedge\ldots f^j\wedge\ldots f^p\rangle$$
$$= \sum_{i,j}\langle \eta.x^i, f^j\rangle \Delta^{ij} = \sum_{i,j}\langle x^i, {}^t\eta.f^j\rangle \Delta^{ij} = \sum_{j}\langle x^1\wedge\ldots x^i\wedge\ldots x^p, f^1\wedge\ldots({}^t\eta.f^j), \ldots f^p\rangle.$$

Si $n$ est la dimension de E, alors $\wedge^n(\mathrm{E})$ a pour dimension 1.

(2.8) *Pour tout $u \in \wedge^n(\mathrm{E})$, on a $\eta'.u = \lambda u$ où $\lambda$ désigne la trace de l'endomorphisme $\eta$ de* E.

En effet, si $\{x^i\}$ $(1 \leq i \leq n)$ est une base de E et $\{f^j\}$ $(1 \leq j \leq n)$ la base duale de $\mathrm{E}^*$, c'est-à-dire la base de $\mathrm{E}^*$ définie par les conditions $\langle x^i, f^j\rangle = \delta^{ij}$ (indice de Kronecker), on a

$$\langle x^1\wedge\ldots, x^i\wedge\ldots x^n, f^1\wedge\ldots f^j\wedge\ldots f^n\rangle = 1$$

et

$$\langle \eta'.(x^1\wedge\ldots x^i\wedge\ldots x^n), f^1\wedge\ldots f^j\wedge\ldots f^n\rangle = \sum_{i=1}^{i=n}\langle x^1\wedge\ldots(\eta.x^i)\wedge\ldots x^n, f^1\wedge\ldots f^j\wedge\ldots f^n\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n}\langle \eta.x^i, f^i\rangle = \textit{trace de } \eta.$$

*Les endomorphismes définis par le produit intérieur.* — Soit E un espace vectoriel; on désignera par $\varepsilon(u)$ l'endomorphisme linéaire de $\wedge(\mathrm{E})$ adjoint à l'élément $u \in \wedge(\mathrm{E})$, c'est-à-dire l'endomorphisme qui transforme tout $v \in \wedge(\mathrm{E})$ en $\varepsilon(u).v = u \wedge v$. Le transposé de $\varepsilon(u)$ qui, d'après (2.2), est un endomorphisme linéaire de $\wedge(\mathrm{E}^*)$ sera désigné par $\iota(u)$. L'image par $\iota(u)$ d'un $a \in \wedge(\mathrm{E}^*)$ est le *produit intérieur* gauche ([6]) de $u$ et de $a$. Si $u$ et $a$ sont de degrés respectifs $p$ et $q$, $\iota(u).a$ est alors de degré $q-p$; en particulier, si $p=q$, alors

$$\iota(u).a = \langle u, a\rangle \in \wedge^0(\mathrm{E}).$$

Notons que, par suite de l'associativité du produit extérieur, on a

$$\varepsilon(u)\varepsilon(v) = \varepsilon(u \wedge v)$$

et par conséquent $\iota(u \wedge v) = \iota(v)\,\iota(u)$ quels que soient $u, v \in \wedge(\mathrm{E})$.

---

([6]) *Cf.* Bourbaki [6], p. 105.

Lorsque $u \in \mathrm{E}$, l'endomorphisme $\iota(u)$ s'explicite simplement. Supposons que $f^1, \ldots, f^j, \ldots, f^p \in \mathrm{E}$ et que $y \in \mathrm{E}$. Pour tout élément $v \in \wedge^{p-1}(\mathrm{E})$ décomposable en $v = x^2 \wedge \ldots x^i \wedge \ldots x^p$, on a, en posant $x^1 = y$,

$$\langle v, \iota(y).(f^1 \wedge \ldots f^j \wedge \ldots f^p) \rangle = \det \| \langle x^i, f^j \rangle \|.$$

En développant ce déterminant par rapport aux éléments de la ligne $i = 1$, on obtient [7]

$$\langle v, \iota(y).(f^1 \wedge \ldots f^j \wedge \ldots f^p) \rangle = \sum_{j=1}^{j=p} (-1)^{j+1} \langle x^1, f^j \rangle \langle v, f^1 \wedge \ldots \hat{f}^j \ldots f^p \rangle.$$

Il en résulte que

$$\text{(2.9)} \qquad \iota(y).(f^1 \wedge \ldots f^j \wedge \ldots f^p) = \sum_j (-1)^{j+1} \langle y, f^j \rangle f^1 \wedge \ldots \hat{f}^j \wedge \ldots f^p.$$

Puisque $\iota(y)$ abaisse le degré d'une unité, on a

$$\iota(y)\omega + \omega\, \iota(y) = 0;$$

avec la relation (2,9), ceci prouve que $\iota(y)$ *est une antidérivation de l'algèbre graduée* $\wedge(\mathrm{E}^*)$.

Soient $\mathrm{V}^*$ un sous-espace de $\mathrm{E}^*$ et ${}^t\gamma$ l'application linéaire de E sur le dual V de $\mathrm{V}^*$ transposée de l'isomorphisme identique $\gamma : \mathrm{V}^* \to \mathrm{E}^*$. Puisque $\gamma$ se prolonge en un homomorphisme ${}^t\gamma : \wedge(\mathrm{E}) \to \wedge(\mathrm{V})$, on a, pour tout $u \in \wedge(\mathrm{E})$,

$${}^t\gamma\, \varepsilon(u) = \varepsilon({}^t\gamma . u){}^t\gamma$$

et donc, en passant aux transposés,

$$\iota(u)\gamma = \gamma\, \iota({}^t\gamma . u).$$

Ceci montre que l'image de l'homomorphisme $\gamma : \wedge(\mathrm{V}^*) \to \wedge(\mathrm{E}^*)$ est stable par tous les endomorphismes $\iota(u)$. Or cette image est la sous-algèbre de $\wedge(\mathrm{E}^*)$ engendrée par l'unité et le sous-espace $\mathrm{V}^*$. On voit donc que :

(2.10) *Toute sous-algèbre de* $\wedge(\mathrm{E}^*)$ *qui est engendrée par l'unité et un sous-espace* $\mathrm{V}^* \subset \mathrm{E}^*$ *est stable par les endomorphismes* $\iota(u)(u \in \wedge(\mathrm{E}))$; *le sous-espace orthogonal à cette sous-algèbre est l'idéal de* $\wedge(\mathrm{E})$ *engendré par les éléments de* E *orthogonaux à* $\mathrm{V}^*$.

Réciproquement,

LEMME 2.2. — *Si* $\mathfrak{A}$ *est une sous-algèbre de* $\wedge(\mathrm{E}^*)$ *différente de* $\{0\}$ *et stable par les endomorphismes* $\iota(u)$ $(u \in \wedge(\mathrm{E}))$, *elle est engendrée par l'unité et un sous-espace de* $\mathrm{E}^*$.

*Démonstration.* — Soit $a \neq 0$ un élément de $\mathfrak{A}$ dont on désignera par $a_r$ la composante de degré $r$. Soit $p$ l'entier tel que $a_p \neq 0$ et $a_r = 0$ pour $r > p$. Il

[7] Le « chapeau » $\wedge$ sur $f$ indique que le facteur $f$ doit être omis.

existe un élément $u \in \wedge^p(\mathrm{E})$ tel que $\langle u, a_p\rangle = \mathrm{I}$. Puisque $\mathfrak{A}$ est stable par $\iota(u)$ et que $\iota(u).a_r$ est de degré $r-p$, on a

$$\iota(u).a = \iota(u).a_p = \langle u, a_p\rangle \in \mathfrak{A};$$

par conséquent, $\mathfrak{A}$ contient l'unité.

Posons $\mathrm{V}^* = \mathfrak{A} \cap \wedge^1(\mathrm{E}^*)$, et désignons par $\mathfrak{A}'$ la sous-algèbre $\wedge(\mathrm{E}^*)$ engendrée par l'unité et le sous-espace $\mathrm{V}^*$. On a $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. Inversement montrons que tout élément $b$ de $\mathfrak{A}$ est dans $\mathfrak{A}'$. Dans le cas contraire $b$ posséderait des composantes homogènes étrangères à $\mathfrak{A}'$. En supposant l'entier $q$ choisi de telle sorte que la composante $b_r$ de degré $r$ soit dans $\mathfrak{A}'$ pour $r \geqq q$ ([8]) et que $b_q \in \mathfrak{A}'$, on aurait $\sum^{r\leq q} b_r$ et donc, $\sum^{r\leq q} \iota(u).b_r \in \mathfrak{A}$ quel que soit $u \in \wedge^{q-1}(\mathrm{E})$. Or

$$\iota(u).b_r \in \wedge^{r-p+1}(\mathrm{E}),$$

donc $\iota(u).b_r = 0$ pour $r < q - 1$ et $\iota(u).b_{q-1} = \langle u, b_{q-1}\rangle \in \mathfrak{A}$. On aurait donc

$$\iota(u).b_q \in \mathfrak{A} \cap \wedge^1(\mathrm{E}^*) = \mathrm{V}^*.$$

Par suite,

$$\langle u \wedge x, b_q\rangle = \langle x, \iota(u).b_q\rangle = 0$$

pour tout $x$ appartenant au sous-espace $\mathrm{V}'$ de E orthogonal à $\mathrm{V}^*$. Ceci prouverait que $b_q$ est orthogonal à l'idéal de $\wedge(\mathrm{E})$ engendré par $\mathrm{V}'$, donc, d'après (2.10), que $b_q \in \mathfrak{A}'$, contrairement à l'hypothèse.

## PREMIERE PARTIE.

### L'algèbre de cohomologie attachée à une algèbre de Lie.

## CHAPITRE II.

### Propriétés générales.

3. **Définitions** ([9]). — Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique différente de 2. On désignera provisoirement par E l'espace vectoriel des éléments de $\mathfrak{a}$ et par $\mathrm{ad}(x)$ l'endomorphisme de E adjoint à un élément $x \in \mathrm{E}$ qui transforme tout $y \in \mathrm{E}$ en $\mathrm{ad}(x).y = [x, y]$. Soit $\theta(x)$ la *dérivation* de l'algèbre extérieure $\wedge(\mathrm{E})$ qui prolonge $\mathrm{ad}(x)$. On désignera par $\theta^*(x)$ le transposé de $-\theta(x)$; c'est une *dérivation* de $\wedge(\mathrm{E}^*)$ (2.7).

Soit $\partial$ l'endomorphisme linéaire de $\wedge(\mathrm{E})$ tel que $\partial.\wedge^p(\mathrm{E}) = \{0\}$ pour $p \leqq 1$ et

$$(3.1)\qquad \partial.(x^1\wedge\ldots x^i\wedge\ldots x^j\wedge\ldots x^p) = \sum^{i<j}(-1)^{i+j+1}[x^i, x^j]\wedge x^1\wedge\ldots\hat{x}^i\wedge\ldots\hat{x}^j\wedge\ldots x^p$$

---

([8]) On a $b_r = 0$ pour $r$ assez grand.

([9]) Une algèbre de Lie est une algèbre anticommutative qui vérifie l'identité de Jacobi. La notion de cohomologie telle qu'elle est définie ici est équivalente à celle qu'ont introduite Chevalley et Eilenberg 5 .

lorsque $p > 1$ et $x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^j, \ldots, x^p \in E$. Le second membre de (3.1) étant fonction alternée des $x^1, x^2, \ldots, x^p$, il définit bien, pour tout $p > 1$, une application linéaire de $\wedge^p(E)$ dans $\wedge^{p-1}(E)$ et donc, par linéarité, un endomorphisme de $\wedge(E)$ qui abaisse le degré d'une unité.

On peut exprimer $\partial$ au moyen des dérivations $\theta(x)$. Soient en effet $\{y^s\}(s=1, 2, \ldots. n)$ une base de E, ($n$ étant la dimension de l'algèbre $\mathfrak{a}$) et $\{g^k\}(k=1, 2, \ldots, n)$ la base duale de E. Si $x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^j, \ldots, x^p \in E$, alors, d'après (2.9).

$$\sum_{s=1}^{s=n} \theta(y^s)\,\iota(g^s).(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots x^p)$$

$$= \sum_{s=1}^{s=n} \sum^{i} (-1)^{i+1} \langle x^i, g^s \rangle\, \theta(y^s).(x^1 \wedge \ldots \hat{x}^i \wedge \ldots x^p)$$

$$= 2 \sum_{s=1}^{s=n} \sum^{i<j} (-1)^{i+j+1} \langle x^i, g^s \rangle [y^s, x^j] \wedge x^1 \wedge \ldots \hat{x}^i \wedge \ldots \hat{x}^j \wedge \ldots x^p.$$

Or,

$$\sum_{s=1}^{s=n} \langle x^i, g^s \rangle y^s = x^i;$$

on obtient donc,

$$\sum_{s=1}^{s=n} \theta(y^s)\,\iota(g^s).(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots x^p) = 2\,\partial.(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots x^p).$$

Tous les éléments de $\wedge(E)$ décomposables en produit d'éléments de E sont donc des zéros de l'endomorphisme $2\partial - \sum^{s} \theta(y)\,\iota(g^s)$. Cet endomorphisme est donc nul sur tous les sous-espaces $\wedge^p(E)$ d'indice $p > 0$; comme il est par ailleurs nul sur $\wedge^0(E)$, il en résulte que

$$2\,\partial = \sum_{s=1}^{s=n} \theta(y^s)\,\iota(g^s). \tag{3.2}$$

Soit $\delta$ le transposé de $-\partial$. C'est un endomorphisme linéaire de $\wedge(E^*)$ qui élève le degré d'une unité; par suite

$$\delta\omega + \omega\,\delta = 0. \tag{3.3}$$

D'après (3.2), on a, en passant aux transposés

$$2\,\delta = \sum_{s=1}^{s=n} \varepsilon(g^s)\,\theta^*(y^s). \tag{3.4}$$

Or, quels que soient $a$, $b \in \wedge(E^*)$, $g \in E^*$ et $y \in E$, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon(g)\,\theta^*(y).(a \wedge b) &= g \wedge (\theta^*(y).a) \wedge b + g \wedge a \wedge (\theta^*(y).b) \\ &= (\varepsilon(g)\,\theta^*(y).a) \wedge b + \bar{a} \wedge (\varepsilon(g)\,\theta^*(y).b),\end{aligned}$$

car $\theta^*(y)$ est une dérivation. Puisque le corps de base est supposé de caractéristique $\neq 2$, il en résulte que

$$(3.5) \qquad \delta.(a \wedge b) = (\delta.a) \wedge b + \bar{a} \wedge (\delta.b).$$

Les relations (3.3) et (3.5) montrent que $\delta$ est une *antidérivation* de $\wedge(E^*)$. Par conséquent (1.4), $\delta^2$ est une dérivation de $\wedge(E^*)$ qui élève le degré de deux unités et applique en particulier $\wedge^1(E^*)$ dans $\wedge^3(E^*)$. Supposons $x^1$, $x^2$, $x^3 \in E$ et $f \in E^*$; en vertu de (3.1) et de l'identité de Jacobi, on a

$$\begin{aligned}\langle x^1 \wedge x^2 \wedge x^3, \delta^2.f \rangle &= \langle \partial^2.(x^1 \wedge x^2 \wedge x^3), f \rangle \\ &= \langle [[x^1, x^2], x^3] + [[x^2, x^3], x^1] + [[x^3, x^1], x^2], f \rangle = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\delta_2$ est nul sur $E^*$ et donc, puisque c'est une dérivation, que

$$(3.6) \qquad \delta^2 = 0.$$

Les relations (3.3), (3.5) et (3.6) prouvent que l'algèbre graduée $\wedge(E^*)$ munie de la loi externe $\delta$ est une *algèbre différentielle graduée* ([10]) que l'on désignera par $C^*(\mathfrak{a})$; $\delta$ en est l'*opérateur différentiel*. Les éléments de $C^*(\mathfrak{a})$ seront appelés des *cochaînes* de $\mathfrak{a}$ et des *p-cochaînes* s'ils sont dans le sous-espace $C^p(\mathfrak{a}) = \wedge^p(E^*)$. Les zéros de $\delta$ seront appelés des *cocycles* de $\mathfrak{a}$. L'*algèbre de cohomologie* de $C^*(\mathfrak{a})$ [quotient de la sous-algèbre des cocycles par $\delta.C^*(\mathfrak{a})$] sera appelée l'*algèbre de cohomologie* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ et notée $H^*(\mathfrak{a})$. Le produit y aura pour symbole $\smile$. Les classes de cohomologie des $p$-cocycles de $\mathfrak{a}$ constituent des sous-espaces $H^p(\mathfrak{a})$ qui définissent dans $H^*(\mathfrak{a})$ une structure d'algèbre graduée.

De la même manière, $\wedge(E)$ munie de la loi externe $\partial$ sera désignée par $C(\mathfrak{a})$; ses éléments seront appelés des *chaînes* de $\mathfrak{a}$ et des *p-chaînes* s'ils sont dans $C_p(\mathfrak{a}) = \wedge^p(E)$. Les zéros de $\partial$ seront appelés des *cycles* de $\mathfrak{a}$. On définit de la manière habituelle des classes d'homologie dont l'espace sera désigné par $H(\mathfrak{a})$ et appelé *espace d'homologie* de $\mathfrak{a}$. On notera que, exception faite de cas triviaux, l'*opérateur différentiel* $\partial$ n'est pas une antidérivation de $\wedge(E)$; la structure multiplicative de $C(\mathfrak{a})$ ne se retrouve donc pas, en général, dans $H(\mathfrak{a})$ (*cf.* Chap. IV).

La dualité des espaces $C(\mathfrak{a})$ et $C^*(\mathfrak{a})$ se traduit par la dualité de $H(\mathfrak{a})$ et de l'espace de $H^*(\mathfrak{a})$. Le sous-espace $H_p(\mathfrak{a}) \subset H(\mathfrak{a})$ orthogonal à $\sum^{p \neq q} H^q(\mathfrak{a})$ est constitué par les classes d'homologie des $p$-cycles de $\mathfrak{a}$; $H(\mathfrak{a})$ est somme directe des $H_p(\mathfrak{a})$. On désignera indistinctement par I la classe d'homologie ou la classe

([10]) Plus précisément, c'est une « algèbre différentielle graduée normale »; *cf.* H. Cartan, *loc. cit.*, note ([2]).

de cohomologie du scalaire unité qui, d'après (2.1), peut être considéré comme un o-cycle ou comme un o-cocycle de $\mathfrak{a}$. La classe de cohomologie $1$ est l'unité de l'algèbre $H^*(\mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe G (le corps de base étant alors celui des réels), on peut identifier $C^*(\mathfrak{a})$ avec l'algèbre des formes différentielles extérieures de l'espace G invariantes par les translations à gauche de G. L'opérateur $\delta$ coïncide alors avec l'opérateur de différentiation extérieure et $H^*(\mathfrak{a})$ est isomorphe à l'anneau de cohomologie à coefficients réels de l'espace G ([11]). Dans ce cadre, les dérivations $\theta^*(x)$ s'interprètent comme les transformations infinitésimales du groupe des translations à droite.

Revenant au cas général, on va exprimer les dérivations $\theta(x)$ et $\theta^*(x)$ au moyen des opérateurs $\partial$ et $\delta$. Quel que soit $x \in \mathfrak{a}$, on a

$$\theta^*(x) = \iota(x)\delta + \delta\,\iota(x). \tag{3.7}$$

En effet, l'égalité a lieu sur $E^*$, car, quels que soient $y \in E$ et $f \in E^*$, on a

$$\begin{aligned}\langle y,\ \iota(x)\delta.f\rangle &= \langle x \wedge y;\ \delta.f\rangle = -\langle \partial.(x \wedge y), f\rangle \\ &= -\langle [x, y], f\rangle = -\langle \theta(x).y, f\rangle = \langle y,\ \theta^*(x).f\rangle,\end{aligned}$$

et par ailleurs,

$$\langle y,\ \delta\,\iota(x).f\rangle = -\langle \partial.y,\ \iota(x).f\rangle = 0,$$

puisque $\partial.\wedge^1(E) = \{0\}$. D'après (2.9), $\iota(x)$ est une antidérivation de $\wedge(E^*)$ ainsi que $\delta$; par suite, (1.3), $\iota(x)\delta + \delta\,\iota(x)$ est une dérivation de $\wedge(E^*)$. Puisque les deux membres de (3.7) sont des dérivations, leur égalité sur $E^*$ entraîne bien leur égalité sur $\wedge(E^*)$.

On obtient une expression analogue pour $\theta(x) = -{}^t\theta^*(x)$ en égalant les transposés des deux membres de (3.7) :

$$\theta(x) = \varepsilon(x)\partial + \partial\,\varepsilon(x). \tag{3.7'}$$

*Homomorphismes d'algèbres de Lie.* — Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie sur un même corps de base et $\varphi$ un homomorphisme de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$. En désignant encore par $\varphi$ l'homomorphisme d'algèbres extérieures qui prolonge $\varphi$ à $C(\mathfrak{b})$ (*cf.* § 2), on a, d'après (3.1),

$$\varphi\,\partial = \partial\,\varphi \tag{3.8}$$

et donc, si ${}^t\varphi : C^*(\mathfrak{a}) \to C^*(\mathfrak{b})$ est l'homomorphisme transposé de $\varphi$,

$${}^t\varphi\,\delta = \delta\,{}^t\varphi \quad ([12]). \tag{3.8'}$$

Par suite, $\varphi$ induit une *application linéaire* $\tilde{\varphi} : H(\mathfrak{b}) \to H(\mathfrak{a})$ des espaces d'homologie. L'application linéaire transposée ${}^t\tilde{\varphi} : H^*(\mathfrak{a}) \to H^*(\mathfrak{b})$ est induite par l'*homomorphisme* ${}^t\varphi$; c'est donc un *homomorphisme* des algèbres de cohomologie.

---

([11]) Pour tout ce qui concerne l'interprétation topologique des résultats dans le cas où $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact, on se reportera au Mémoire de Chevalley et Eilenberg [5].

([12]) On désigne par le même symbole $\delta$ (ou $\partial$) les opérateurs différentiels attachés à différentes algèbres de Lie.

On vérifie enfin aisément que, quel que soit $y \in \mathfrak{b}$.

$$\varphi\,\theta(y) = \theta(\varphi . y)\varphi. \tag{3.9}$$

**4. Éléments invariants. Propriétés de l'opérateur différentiel des chaînes.** — On conserve les notations du paragraphe précédent. Quels que soient $x, y \in \mathfrak{a}$, on a

$$\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}([x, y]),$$

d'après l'identité de Jacobi. Par suite, $\theta(x)\,\theta(y) - \theta(y)\,\theta(x)$ [qui est une dérivation d'après (1.1)] coïncide sur E, et donc sur $\wedge$(E), avec la dérivation $\theta([x, y])$ :

$$\theta(x)\,\theta(y) - \theta(y)\,\theta(x) = \theta([x, y]). \tag{4.1}$$

On a de même, quels que soient $x, y \in \mathfrak{a}$,

$$\theta^*(x)\,\theta^*(y) - \theta^*(y)\,\theta^*(x) = \theta^*([x, y]). \tag{4.1'}$$

Les dérivations $\theta(x)$ et $\theta^*(x)$ réalisent donc des *représentations linéaires* de l'algèbre Lie $\mathfrak{a}$ dans les espaces C($\mathfrak{a}$) et C*($\mathfrak{a}$).

*Définition.* — Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; une chaîne (respectivement une cochaîne) de $\mathfrak{a}$ sera dite *invariante par* $\mathfrak{b}$ si c'est un zéro de toutes les dérivations $\theta(x)$ ($\theta^*(x)$) lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b}$. Les chaînes ou cochaînes invariantes par $\mathfrak{a}$ (considérée comme sa propre sous-algèbre) seront simplement qualifiées d'*invariantes*. On dira qu'un sous-espace de C($\mathfrak{a}$) [resp. C*($\mathfrak{a}$)] est *stable par* $\mathfrak{b}$ s'il est stable par toutes les dérivations $\theta(x)$ [$\theta^*(x)$] lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b}$.

Les chaînes de $\mathfrak{a}$ invariantes par $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ constituent une *sous-algèbre* de l'algèbre extérieure C($\mathfrak{a}$) car les $\theta(x)$ sont des dérivations. Cette sous-algèbre est stable par l'opérateur $\partial$ car, des relations (3.6) et (3.7'), on déduit que

$$\theta(x)\,\partial = \partial\,\theta(x) \tag{4.2}$$

quel que soit $x \in \mathfrak{a}$ (13).

Les sous-espaces de cochaînes de $\mathfrak{a}$ invariantes par des sous-algèbres de $\mathfrak{a}$ possèdent des propriétés analogues.

De l'expression (3.4) de $\delta$ résulte le

THÉORÈME 4.1. — *Toute cochaîne invariante est un cocycle.*

On a observé que $\partial$ n'était pas une antidérivation de l'algèbre des chaînes. Vis-à-vis de certains couples de chaînes, cet opérateur se comporte néanmoins comme une antidérivation :

---

(13) Les dérivations $\theta(x)$ sont donc des « chain transformations » au sens de Eilenberg [cf. *Singular Homology Theory* (*Ann. of. Math.*, vol. 45, 1944, p. 411)]. L'expression (3.7') montre qu'elles sont « chain homotopic » à l'endomorphisme nul.

LEMME 4.1. — *Soient* $\{x^i\}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *une base de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *et* $\{f^i\}$ *la base duale de ses* 1*-cochaînes. Pour toute chaîne u de* $\mathfrak{a}$ *on a*

$$(4.3) \qquad \partial\varepsilon(u) - \varepsilon(\overline{u})\partial - \varepsilon(\partial.u) - \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon(\iota(f^i).u)\,\theta(x^i) = 0.$$

*Démonstration.* — En désignant par $\alpha(u)$ le premier membre de (4.3) et en tenant compte de la relation $\theta(x) = \varepsilon(x)\,\partial + \partial\,\varepsilon(x)$, on a

$$\alpha(x \wedge u) + \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon(\iota(f^i).(x \wedge u))\theta(x^i) = -\varepsilon(x)(\partial\,\varepsilon(u) - \varepsilon(\overline{u})\,\partial - \varepsilon(\partial.u)) + \theta(x)\,\varepsilon(u) - \varepsilon(\theta(x).u)$$

quels que soient $x \in \mathfrak{a}$ et $u \in C(\mathfrak{a})$. Pour toute valeur de $i$, $\iota(f^i)$ est une antidérivation et par suite

$$\iota(f^i).(x \wedge u) = \langle x, f^i \rangle u - x \wedge (\iota(f^i).u)$$

par ailleurs,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \langle x, f^i \rangle x^i = x.$$

On obtient donc

$$\alpha(x \wedge u) = -\varepsilon(x)\,\alpha(u) + \theta(x)\,\varepsilon(u) - \varepsilon(u)\,\theta(x) - \varepsilon(\theta(x).u).$$

Or $\theta(x)$ est une dérivation; par conséquent, $\alpha(x \wedge u) = -\varepsilon(x)\,\alpha(u)$. Puisque l'algèbre des chaînes de $\mathfrak{a}$ est engendrée par l'unité et les éléments de $\mathfrak{a}$, ceci prouve que l'ensemble des chaînes $u$ telles que $\alpha(u) = 0$; constitue un *idéal* de $C(\mathfrak{a})$. Or on a trivialement $\alpha(I) = 0$; par suite cet idéal coïncide avec $C(\mathfrak{a})$.

De la relation (4.3) résulte immédiatement que

(4.4) *Si* $v$ *est une chaîne invariante de* $\mathfrak{a}$, *alors*

$$\partial.(u \wedge v) = (\partial.u) \wedge v + \overline{u} \wedge (\partial.v)$$

*pour toute chaîne u de* $\mathfrak{a}$.

Ceci montre en particulier que la restriction de $\partial$ à la sous-algèbre des chaînes invariantes est une antidérivation. On observera que la relation (4.4) reste exacte si l'on y intervertit les chaînes $u$ et $v$.

Le Lemme 4.1 sera renforcé par le

LEMME 4.2. — *Soient* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *et* $\varphi$ *l'isomorphisme qui prolonge l'isomorphisme identique de* $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathfrak{a}$. *Si* $\{y^i\}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ *est une base de* $\mathfrak{b}$ *et si* $\{g^i\}$ *est la base duale de ses* 1*-cochaînes, alors, pour toute chaîne* $v$ *de* $\mathfrak{b}$, *on a*

$$(4.5) \qquad \partial\varepsilon(\varphi.v) - \varepsilon(\varphi.\overline{v})\partial - \varepsilon(\partial\varphi.v) = \sum_{i=1}^{i=m} \varepsilon(\varphi\iota(g^i).v)\theta\,(\varphi.y^i),$$

$$(4.6) \qquad \iota(\varphi.v)\delta - \delta\iota(\varphi.\overline{v}) - \iota(\partial\varphi.v) = \sum_{i=1}^{i=m} \iota(\varphi\iota(g^i).v)\theta^*(\varphi.y^i).$$

*Démonstration*. — Soit $\{x^i\}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ une base de $\mathfrak{a}$ telle que $x^i = \varphi.y^i$ pour $1 \leqq i \leqq m$ et soit $\{f^i\}$ la base duale des 1-cochaînes de $\mathfrak{a}$; on a ${}^t\varphi.f^i = g^i$ pour $1 \leqq i \leqq m$ et ${}^t\varphi.f^i = 0$ pour $m < i \leqq n$. D'autre part, $\iota(f^i)\varphi = \varphi\iota({}^t\varphi.f^i)$ pour tout $i$, car ${}^t\varphi$ est un homomorphisme. Avec ces bases, et pour $u = \varphi.v$, la relation (4.3) donne donc (4.5). Puisque les $\theta(\varphi.y^i)$ sont des dérivations, le second membre de (4.5) se met sous la forme

$$\sum_{i=n}^{i=m} [\theta(\varphi.y^i)\varepsilon(\varphi\iota(g^i).v) - \varepsilon(\theta(\varphi.y^i)\varphi\iota(g^i).v)].$$

Or, pour tout $i$,

$$\theta(\varphi.y^i)\varphi = \varphi\theta(y^i)$$

et d'autre part (3.2),

$$\sum_{i=1}^{i=m} \theta(y^i)\iota(g^i).v = 2\partial.v.$$

On obtient donc la relation

$$\partial\varepsilon(\varphi.v) - \varepsilon(\varphi.\bar{v})\partial + \varepsilon(\partial\varphi.v) = \sum_{i=1}^{i=m} \theta(\varphi.y^i)\varepsilon(\varphi\iota(g^i).v),$$

dont on déduit (4.6) en prenant les transposés des deux membres.

Puisque les images des dérivations $\theta(\varphi.y^i)$ sont orthogonales à toutes les cochaînes de $\mathfrak{a}$ invariantes par $\mathfrak{b}$, on voit que, avec les hypothèses du lemme 4.2,

(4.7) *Quelles que soient* $u \in C(\mathfrak{a})$ *et* $v \in C(\mathfrak{b})$, *la chaîne*

$$\partial.((\varphi.v)\wedge u) - (\varphi.\bar{v})\wedge(\partial.u) + (\partial\varphi.v)\wedge u$$

*est orthogonale aux cochaînes de* $\mathfrak{a}$ *invariantes par* $\mathfrak{b}$

Les propriétés précédentes qui permettent d'exploiter la structure multiplicative de l'espace des chaînes joueront un rôle essentiel dans la suite.

**5. La cohomologie du produit direct de deux algèbres de Lie.** — Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie sur un même corps de base. On désignera par $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ leur produit direct, c'est-à-dire l'algèbre de Lie dont l'espace est somme directe des espaces de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{b}$ et dont la loi de composition est définie par

$$[(x\times y), (x'\times y')] = [x, x']\times[y, y'],$$

lorsque $x, x' \in \mathfrak{a}$ et $y, y' \in \mathfrak{b}$. Ainsi qu'on l'a remarqué plus haut (2.4), l'algèbre extérieure $C(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$ des chaînes de $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ s'identifie au produit tensoriel des algèbres graduées $C(\mathfrak{a})$ et $C(\mathfrak{b})$. De même, $C^*(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$ s'identifie à $C^*(\mathfrak{a})\otimes C^*(\mathfrak{b})$.

Soit $\mu$ l'homomorphisme de $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{a}$ tel que $\mu.(x\times y) = x$ quel que soit $x\times y \in \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$. Il lui correspond un isomorphisme ${}^t\mu : C^*(\mathfrak{a}) \to C^*(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$ qui commute avec $\delta$ (3.8′) et transforme toute cochaîne $a$ de $\mathfrak{a}$ en ${}^t\mu.a = a\otimes \mathrm{I}$ (2.5). On a donc

$$\delta.(a\otimes \mathrm{I}) = (\delta.a)\otimes \mathrm{I}.$$

De même.

$$\delta.(\mathrm{I} \otimes b) = \mathrm{I} \otimes (\delta.b)$$

pour toute cochaîne $b$ de $\mathfrak{b}$. Puisque $\delta$ est une antidérivation, il résulte de (1.6) que

$$\delta.(a \otimes b) = \delta.((a \otimes \mathrm{I}) \wedge (\mathrm{I} \otimes b)) = (\delta.(a \otimes \mathrm{I})) \wedge (\mathrm{I} \otimes b) + (\overline{a \otimes \mathrm{I}}) \wedge (\delta.(\mathrm{I} \otimes b)).$$

Or $\overline{a \otimes \mathrm{I}} = \overline{a} \otimes \mathrm{I}$; on a donc

$$(5.1) \qquad \delta.(a \otimes b) = (\delta.a) \otimes b + \overline{a} \otimes (\delta.b),$$

quels que soient $a \in C^\star(\mathfrak{a})$ et $b \in C^\star(\mathfrak{b})$.

Par dualité, on exprime de même l'opérateur différentiel des chaînes de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ au moyen des opérateurs différentiels des chaînes de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{b}$ :

$$(5.2) \qquad \partial.(u \otimes v) = (\partial.u) \otimes v + \overline{u} \otimes (\partial.v),$$

quels que soient $u \in C(\mathfrak{a})$ et $v \in C(\mathfrak{b})$.

Associons à un cocycle $a$ de $\mathfrak{a}$ et un cocycle $b$ de $\mathfrak{b}$ la cochaîne $a \otimes b$ de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. La relation (5.1) montre que $a \otimes b$ est un cocycle dont la classe de cohomologie ne dépend que des classes de cohomologie des cocycles $a$ et $b$. On définit ainsi une application linéaire de l'espace $H^\star(\mathfrak{a}) \otimes H^\star(\mathfrak{b})$ dans $H^\star(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$. Cette application est visiblement compatible avec les structures d'algèbres graduées de ces espaces. On vérifie par le même raisonnement que celui qui conduit au classique théorème de Künneth que c'est un *isomorphisme* de $H^\star(\mathfrak{a}) \otimes H^\star(\mathfrak{b})$ *sur* $H^\star(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ grâce auquel on pourra *identifier* dans la suite ces deux algèbres. Ceci conduit par dualité à *identifier* $H(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ et $H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{b})$. La classe d'homologie du produit tensoriel d'un cycle $u$ de $\mathfrak{a}$ et d'un cycle $v$ de $\mathfrak{b}$ est ainsi le produit tensoriel des classes d'homologie de $u$ et de $v$.

## CHAPITRE III.

### Propriétés homologiques des algèbres de Lie unimodulaires.

6. **Le 1-cocycle défini par la trace des endomorphismes adjoints.** — Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie et $J(\mathfrak{a})$ la sous-algèbre de ses chaînes invariantes qui est graduée par les sous-espaces $J(\mathfrak{a}) \cap C_p(\mathfrak{a})$. D'après (4.5), la restriction de l'opérateur $\partial$ à $J(\mathfrak{a})$ est une *anti-dérivation* de cette algèbre. On va expliciter cette restriction. Les dérivations $\theta^\star(y)$ vérifient la relation de commutation

$$\theta^\star(y)\varepsilon(g) - \varepsilon(g)\theta^\star(y) = \varepsilon(\theta^\star(y).g),$$

(où $g$ désigne une cochaîne de $\mathfrak{a}$) qui n'est autre que la traduction, en termes d'endomorphismes, de la définition d'une dérivation. L'expression (3.4) de $\delta$ peut donc se mettre sous la forme

$$2\delta = \sum^{s} \theta^\star(y^s)\varepsilon(g^s) - \sum^{s} \varepsilon(\theta^\star(y^s).g^s),$$

les sommations portant sur l'indice $s$ d'une base $\{y^s\}$ de $\mathfrak{a} = C_1(\mathfrak{a})$ et de la base duale $\{g^s\}$ de $C^1(\mathfrak{a})$. On désignera par $f_t$ la 1-cochaîne $\sum\limits^s \theta^*(y^s).g^s$. En passant aux transposés, on obtient

$$(6.1) \qquad 2\partial = \sum^s \iota(g^s)\theta(y^s) - \iota(f_t).$$

Sur $J(\mathfrak{a})$, on a donc $2\partial = -\iota(f_t)$ (qui est bien une antidérivation *cf.* § 2).

La 1-cochaîne $f_t$ ne dépend évidemment pas du choix de la base $\{y^s\}$. Pour tout $x \in \mathfrak{a}$, on a

$$\langle x, f_t\rangle = \sum^s \langle x. \theta^*(y^s).g^s\rangle = -\sum^s \langle \theta(y^s).x, g^s\rangle = \sum^s \langle [x, y^s], g^s\rangle = \textit{trace de } \mathrm{ad}(x).$$

Une algèbre de Lie sera dite ***unimodulaire*** si ses endomorphismes adjoints sont de trace 0, c'est-à-dire, si $f_t = 0$. De la relation (6.1) résulte le

THÉORÈME 6.1. — *Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie unimodulaire, ses chaînes invariantes sont des cycles.*

Notons que $f_t$ est une *cochaîne invariante*. En effet, si $x, y \in \mathfrak{a}$, on a

$$\langle x, \theta^*(y).f_t\rangle = \langle [x, y], f_t\rangle = \text{trace de } \mathrm{ad}([x, y]) = 0,$$

puisque

$$\mathrm{ad}([x, y]) = \mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(x).$$

D'après le théorème 4.1, $f_t$ est donc un *cocycle* de $\mathfrak{a}$.

Soit $n$ la dimension de $\mathfrak{a}$. Puisque les $\theta(x)$ sont les dérivations de l'algèbre extérieure $C(\mathfrak{a})$ qui prolongent les endomorphismes adjoints, on a [d'après (2.8)],

$$\theta(x).u = (\text{trace de } \mathrm{ad}(x)).u$$

pour toute $n$-chaîne $u$ de $\mathfrak{a}$ [14]. En conséquence,

(6.2) *pour qu'une algèbre de Lie de dimension $n$ soit unimodulaire, il faut et il suffit que ses $n$-chaînes soient invariantes.*

D'après le théorème 6.1, si $\mathfrak{a}$ est unimodulaire et de dimension $n$, ses $n$-chaînes sont donc des cycles. Réciproquement, si $\mathfrak{a}$ est de dimension $n$ et si ses $n$-chaînes sont des cycles, ce sont des cycles invariants. Pour tout $x \in \mathfrak{a}$, on a en effet

$$\varepsilon(x).C_n(\mathfrak{a}) \subset C_{n+1}(\mathfrak{a}) = \{0\}$$

et par suite

$$\theta(x).C_n(\mathfrak{a}) = (\varepsilon(x)\partial + \partial\varepsilon(x)).C_n(\mathfrak{a}) = \{0\}.$$

En conséquence,

(6.3) *pour qu'une algèbre de Lie de dimension $n$ soit unimodulaire, il faut et il suffit que ses $n$-chaînes soient des cycles.*

---

[14] Les $n$-chaînes (ainsi que les $n$-cochaînes) constituent un sous-espace de dimension 1.

Les $n$-cycles ne pouvant être homologues à zéro sans être nuls, on voit qu'une autre condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{a}$ soit unimodulaire est que $H_n(\mathfrak{a})$ ait pour dimension 1.

Puisque les restrictions des $\theta^*(x)$ à $C^n(\mathfrak{a})$ sont les transposées des restrictions des $-\theta(x)$ à $C_n(\mathfrak{a})$, on déduit de (6.2) que

(6.4) *pour qu'une algèbre de Lie de dimension n soit unimodulaire il faut et il suffit que ses n-cochaînes soient invariantes* ([15]).

7. **La dualité de Poincaré.** — Lorsque $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact G, le théorème de dualité de Poincaré pour les variétés orientables s'applique à la cohomologie de G et donc à $H^*(\mathfrak{a})$. On montrera dans la suite que les propriétés de $H^*(\mathfrak{a})$ qui en résultent sont encore vérifiées lorsque, plus généralement, l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est supposée unimodulaire.

Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie de dimension $n$. On définit un isomorphisme $\rho$ de l'espace $C^*(\mathfrak{a})$ sur l'espace $C(\mathfrak{a})$ en choisissant une $n$-chaîne $w$ non nulle et en posant $\rho.a = \iota(a).w \in C(\mathfrak{a})$ pour toute cochaîne $a$ de $\mathfrak{a}$. L'image par $\rho$ d'une $p$-cochaîne est une $(n-p)$-chaîne de $\mathfrak{a}$. Puisque $\delta$ est une antidérivation, on a $\delta\varepsilon(a) - \varepsilon(\bar{a})\delta = \varepsilon(\delta.a)$ et donc, en passant aux transposés, $\iota(a)\partial - \partial\iota(\bar{a}) = -\iota(\delta.a)$. Supposons $\mathfrak{a}$ unimodulaire, d'après (6.3) on a alors $\partial.w = 0$ et par suite $\partial\iota(\bar{a}).w = \iota(\delta.a).w$, c'est-à-dire que

$$\partial\rho\omega = \rho\delta. \tag{7.1}$$

L'isomorphisme $\rho$ induit donc un *isomorphisme* $\tilde{\rho}$ de l'espace $H^*(\mathfrak{a})$ sur $H(\mathfrak{a})$ qui applique la classe de cohomologie d'un $p$-cocycle $a$ sur la classe d'homologie du $(n-p)$-cycle $\iota(a).w$.

Par ailleurs, tout idéal engendré par un élément de $H^*(\mathfrak{a})$ différent de 0 contient le sous-espace (de dimension 1) $H^n(\mathfrak{a})$. Supposons en effet que l'idéal à droite engendré par la classe de cohomologie de $a$ ne contienne pas $H^n(\mathfrak{a})$. Pour tout $(n-p)$-cocycle $b$, le $n$-cocycle $a\wedge b$ est alors cohomologue à zéro. Or, $\mathfrak{a}$ étant unimodulaire, $H^n(\mathfrak{a}) \cong C^n(\mathfrak{a})$; par suite $a\wedge b = 0$. On a donc

$$\langle \rho.a, b\rangle = \langle \iota(a).w, b\rangle = \langle w, a\wedge b\rangle = 0$$

pour tout $(n-p)$-cocycle $b$. La $(n-p)$-chaîne $\rho.a$ qui, d'après (7.1) est un $(n-p)$-cycle est donc orthogonale à tous les $(n-p)$-cocycles, c'est-à-dire qu'elle est homologue à zéro. La même relation (7.1) montre alors que $a$ est cohomologue à zéro. On aboutirait à la même conclusion en envisageant des idéaux à gauche et en partant d'un cocycle $a$ non homogène.

En résumé :

THÉORÈME 7.1. — *Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie unimodulaire de dimension $n$, il existe un isomorphisme de l'espace $H^*(\mathfrak{a})$ sur $H(\mathfrak{a})$ qui applique chaque*

---

([15]) Si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe G, le corps de base étant alors celui des réels, les $n$-cochaînes de $\mathfrak{a}$ s'interprètent comme les mesures de Haar invariantes à gauche de G. Dire qu'elles sont *invariantes* revient donc à dire que les mesures de Haar invariantes à gauche sont invariantes à droite, c'est-à-dire que le *groupe* G est *unimodulaire*.

*sous-espace* $H^p(\mathfrak{a})$ *sur le sous-espace* $H_{n-p}(\mathfrak{a})$. *Tout idéal différent de* $\{0\}$ *dans* $H^*(\mathfrak{a})$ *contient le sous-espace* $H^n(\mathfrak{a})$.

Remarquons enfin que, si $\mathfrak{a}$ est unimodulaire, alors

$$\theta(x)\rho = \rho\theta^*(x) \tag{7.2}$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}$. En effet, pour $x \in \mathfrak{a}$ et $a \in C^*(\mathfrak{a})$, on a

$$\rho\theta^*(x).a = \iota(\theta^*(x).a).w.$$

Or, $\theta^*(x)$ étant une dérivation, on a

$$\varepsilon(\theta^*(x).a) = \theta^*(x)\varepsilon(a) - \varepsilon(a)\theta^*(x)$$

et donc, en passant aux transposés

$$\iota(\theta^*(x).a) = \theta(x)\iota(a) - \iota(a)\theta(x).$$

Par conséquent,

$$\rho\theta^*(x).a = -\iota(a)\theta(x).w + \theta(x)\iota(a).w.$$

Puisque $\mathfrak{a}$ est unimodulaire, on a $\theta(x).w = 0$ d'après (6.2) et par suite

$$\rho\theta^*(x).a = \theta(x)\,\iota(a).w = \theta(x)\rho.a.$$

Cette relation montre que $\rho$ applique le sous-espace des $p$-cochaînes invariantes sur le sous-espace des $(n-p)$-chaînes invariantes de $\mathfrak{a}$.

## CHAPITRE IV.

### Propriétés homologiques en rapport avec des hypothèses de semi-simplicité.

**8. Structure multiplicative dans l'espace d'homologie.** — On étudiera dans ce paragraphe l'homologie des algèbres de Lie satisfaisant à la condition :

(P) *Toute classe d'homologie contient au moins un cycle invariant.*

Comme on le montrera dans le paragraphe suivant, cette condition est en particulier satisfaite par les algèbres de Lie semi-simples et les algèbres de Lie des groupes compacts.

(8.1) *Toute algèbre de Lie satisfaisant à la condition* (P) *est unimodulaire.*

En effet, tout 1-cycle invariant d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est un élément du centre de $\mathfrak{a}$. Il est donc orthogonal au 1-cocycle $f_t$ défini par la trace des endomorphismes adjoints (*cf.* § 6). Si donc $\mathfrak{a}$ satisfait à la condition (P), le 1-cocycle $f_t$ est orthogonal à tous les 1-cycles de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire à $C_1(\mathfrak{a})$; on a donc $f_t = 0$, ce qui prouve que $\mathfrak{a}$ est unimodulaire.

(8.2) *Si l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *satisfait à la condition* (P), *toute classe de cohomologie de* $\mathfrak{a}$ *contient au moins un cocycle invariant* [16].

---

[16] Cette propriété est moins restrictive que la propriété exprimée par la condition (P) : *si par exemple* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie non unimodulaire de dimension* 2, *toute classe de cohomologie de* $\mathfrak{a}$ *contient un cocycle invariant.*

En effet, puisque $\mathfrak{a}$ est unimodulaire, l'isomorphisme $\rho : C^*(\mathfrak{a}) \to C(\mathfrak{a})$ introduit au paragraphe 7 applique [d'après (7.1)] une classe de cohomologie $\mathbf{a}$ de $\mathfrak{a}$ sur la classe d'homologie $\tilde{\rho}.\mathbf{a}$. D'après (7.2), l'image inverse d'un cycle invariant de la classe $\tilde{\rho}.\mathbf{a}$ est un cocycle invariant de la classe $\mathbf{a}$.

Lemme 8. 1. — *Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie satisfaisant à la condition* (P) *et soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux classes d'homologie de $\mathfrak{a}$. Il existe des cycles $u$ et $v$ appartenant respectivement aux classes $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et tels que la chaîne $u \wedge v$ soit un cycle. La classe d'homologie de ce cycle ne dépend que des classes d'homologie de $u$ et $v$.*

*Démonstration.* — Choisissons d'abord pour $u$ et $v$ des cycles invariants. Alors, d'après (4.4), $u \wedge v$ est bien un cycle de $\mathfrak{a}$. Soient $u'$ et $v'$ des cycles homologues respectivement à $u$ et $v$, c'est-à-dire de la forme $u' = u + \partial.u''$, $v' = v + \partial.v''$. On a

$$u' \wedge v' = (u + \partial.u'')(v + \partial.v'') = u \wedge v + (\partial.u'') \wedge v + u' \wedge (\partial.v'').$$

D'après le lemme 4.1,

$$\partial.(u'' \wedge v) = (\partial.u'') \wedge v + \bar{u}'' \wedge (\partial.v) = (\partial.u'') \wedge v,$$

car $v$ est un *cycle invariant* (par $\mathfrak{a}$).

Par ailleurs, d'après (4.7), la chaîne

$$w = \partial.(\bar{u}' \wedge v'') + (\partial.\bar{u}') \wedge v'' - u' \wedge (\partial.v'')$$

est orthogonale aux cochaînes invariantes de $\mathfrak{a}$. Or $\bar{u}'$ est, comme $u'$, un cycle de $\mathfrak{a}$; on a donc

$$w = \partial.(\bar{u}' \wedge v'') - u' \wedge (\partial.v'').$$

On obtient finalement

$$u' \wedge v' - u \wedge v - \partial.(u'' \wedge v) - \partial.(\bar{u}' \wedge v'') = - w.$$

Si $u'$ et $v'$ ont été choisis de telle sorte que $u' \wedge v'$ soit un cycle, la chaîne $w$ est alors un cycle. Or elle est orthogonale à toutes les cochaînes invariantes : d'après (8.2) c'est donc un cycle homologue à zéro. Par suite $u' \wedge v'$ est homologue à $u \wedge v$, ce qui achève la démonstration.

Ce résultat permet de définir, lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ satisfait à la condition (P), le *produit* $\mathbf{u} \smile \mathbf{v}$ *de deux classes d'homologie* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *de* $\mathfrak{a}$ : *c'est la classe d'homologie du produit de deux cycles $u$ et $v$ appartenant respectivement aux classes* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *et choisis de telle sorte que $u \wedge v$ soit un cycle.* Ce produit définit dans l'espace d'homologie $H(\mathfrak{a})$ une structure d'algèbre. Cette *algèbre d'homologie* que l'on désignera par $H_*(\mathfrak{a})$ est graduée par les sous-espaces $H_p(\mathfrak{a})$ et vérifie la loi de commutation (1.5). Elle possède une unité qui est la classe d'homologie du scalaire unité.

On montrera plus loin que, si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact, cette structure multiplicative de $H_*(\mathfrak{a})$ coïncide avec celle du produit de Pontrjagin (*cf.* § 13).

Théorème 8. 1. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux algèbres de Lie sur un même corps de base satisfaisant toutes deux à la condition* (P). *Si* $\varphi$ *est un homomorphisme de* $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathfrak{a}$, *l'application linéaire* $\tilde{\varphi}$ *des espaces d'homologie induite par* $\varphi$ *est un homomorphisme de l'algèbre* $H_*(\mathfrak{b})$ *dans l'algèbre* $H_*(\mathfrak{a})$.

*Démonstration.* — Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux classes d'homologie de $\mathfrak{b}$. Choisissons dans ces classes des cycles $u$ et $v$ tels que $u \wedge v$ soit encore un cycle. Par définition, la classe d'homologie de $u \wedge v$ est alors $\mathbf{u} \smile \mathbf{v}$. Par ailleurs, puisque $\varphi$ est un homomorphisme de $C(\mathfrak{b})$ dans $C(\mathfrak{a})$, on a

$$\varphi.(u \wedge v) = (\varphi.u) \wedge (\varphi.v).$$

D'après (3.8) les chaînes $\varphi.(u \wedge v)$, $\varphi.u$ et $\varphi.v$ sont des cycles. Elles appartiennent respectivement aux classes $\tilde{\varphi}.(\mathbf{u} \smile \mathbf{v})$, $\tilde{\varphi}.\mathbf{u}$ et $\tilde{\varphi}.\mathbf{v}$. On a donc bien

$$\tilde{\varphi}.(\mathbf{u} \smile \mathbf{v}) = (\tilde{\varphi}.\mathbf{u}) \smile (\tilde{\varphi}.\mathbf{v}).$$

Ce théorème jouera un rôle essentiel dans le paragraphe 10. On aura aussi à utiliser le

Lemme 8. 1. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux algèbres de Lie sur un même corps de base satisfaisant toutes deux à la condition* (P). *Leur produit direct satisfait encore à la condition* (P).

*Démonstration.* — Soit $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ un élément de $H(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{b})$, (*cf.* § 5), et soient $u$ et $v$ des cycles invariants appartenant respectivement aux classes d'homologies $\mathbf{u} \in H(\mathfrak{a})$ et $\mathbf{v} \in H(\mathfrak{b})$. Le produit tensoriel $u \otimes v$ est un cycle de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ d'après la relation (5.2). C'est même un cycle invariant car, pour tout $x \in \mathfrak{a}$,

$$\theta(x \times 0).(u \otimes v) = (\theta(x).u) \otimes v = 0$$

et de même, pour tout $y \in \mathfrak{b}$,

$$\theta(0 \times y).(u \otimes v) = u \otimes (\theta(y).v) = 0.$$

La classe d'homologie $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ contient donc un cycle invariant. Il en est de même de toutes les classes d'homologie de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ puisque l'espace $H(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ est engendré par les éléments de la forme $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$.

Avec les hypothèses du lemme précédent, les *algèbres d'homologie* $H_*(\mathfrak{a})$, $H_*(\mathfrak{b})$ et $H_*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ sont donc définies. On vérifie que la structure multiplicative de $H_*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ est celle qui résulte de son identification avec le produit tensoriel d'algèbres graduées $H_*(\mathfrak{a}) \otimes H_*(\mathfrak{b})$. En effet, si $u$, $u'$ et $v$, $v'$ sont respectivement des cycles invariants de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, $v$ et $u'$ étant de degrés respectifs $p$ et $q$, on a

$$(u \otimes v) \wedge (u' \otimes v') = (-1)^{pq} (u \wedge u') \otimes (v \wedge v').$$

Or, d'après (5.2), $u \otimes v$, $u' \otimes v'$ et $(u \wedge u') \otimes (v \wedge v')$ sont des cycles. On voit donc que, si $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ désignent respectivement les classes d'homologie de $u$, $u'$ $v$, $v'$,

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \smile (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{v}') = (-1)^{pq} (\mathbf{u} \smile \mathbf{u}') \otimes (\mathbf{v} \smile \mathbf{v}'). \tag{8.3}$$

**9. Les algèbres de Lie réductives.** — *Définitions.* — Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. Les dérivations $\theta(x)$ associées aux $x \in \mathfrak{b}$ réalisent une représentation linéaire de $\mathfrak{b}$ dans l'espace des chaînes de $\mathfrak{a}$. Si cette représentation est complètement réductible, on dira que $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre *réductive dans* $\mathfrak{a}$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ sera dite *réductive* si, considérée comme sa propre sous-algèbre, elle est réductive dans $\mathfrak{a}$.

Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ contenant $\mathfrak{b}$. Le prolongement $\varphi : C(\mathfrak{c}) \to C(\mathfrak{a})$ de l'isomorphisme identique de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{a}$ vérifie pour tout $x \in \mathfrak{b}$ la relation (3.9)

$$\varphi\,\theta(x) = \theta(\varphi.x)\varphi.$$

Puisque $\varphi$ est un isomorphisme, ceci prouve que l'image inverse par $\varphi$ d'un sous-espace de chaînes de $\mathfrak{a}$ stable par $\mathfrak{b}$ et irréductible est un sous-espace de chaînes de $\mathfrak{c}$ stable par $\mathfrak{b}$ et irréductible. Il en résulte que $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{c}$. En particulier,

(9.1) *Si* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre réductive dans* $\mathfrak{a}$, *c'est une algèbre réductive.*

Soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie d'un groupe compact, le corps de base étant alors celui des réels. On sait que $\mathfrak{a}$ est le produit direct d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple dont la forme bilinéaire fondamentale (— trace de $\mathrm{ad}(x)\ \mathrm{ad}(y)$) est définie positive. Il existe donc sur $\mathfrak{a}$ des produits scalaires invariants; on en obtient en composant la forme bilinéaire fondamentale de la composante semi-simple avec un produit scalaire arbitraire de la composante abélienne. A un tel produit scalaire correspond un isomorphisme de $C_1(\mathfrak{a})$ sur l'espace dual $C^1(\mathfrak{a})$ qui se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre extérieure $C(\mathfrak{a})$ sur l'algèbre extérieure duale $C^*(\mathfrak{a})$. Ce prolongement définit un produit scalaire invariant [par les dérivations $\theta(x)$] dans l'espace des chaînes de $\mathfrak{a}$. Par conséquent, si V est un sous-espace de $C(\mathfrak{a})$ stable par une sous-algèbre $\mathfrak{b}$, le sous-espace de $C(\mathfrak{a})$ orthogonal à V est un sous-espace supplémentaire de V et stable par $\mathfrak{b}$. La famille des endomorphismes linéaires $\theta(x)$ $(x \in \mathfrak{b})$ est donc complètement réductible. Par suite,

Théorème 9.1. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est l'algèbre de Lie d'un groupe compact, toute sous-algèbre de* $\mathfrak{a}$ *est réductive dans* $\mathfrak{a}$; *en particulier,* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre réductive.*

Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie réductive, les endomorphismes $\mathrm{ad}(x)$ qui sont les restrictions à $C_1(\mathfrak{a})$ des dérivations $\theta(x)$ réalisent une représentation linéaire complètement réductible de $\mathfrak{a}$. Les sous-espaces de $C_1(\mathfrak{a})$ stables par $\mathfrak{a}$ sont les idéaux de $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{a}'$ l'idéal dérivé de $\mathfrak{a}$ [17]. La complète réductibilité de la représentation $x \to \mathrm{ad}(x)$ entraîne que $\mathfrak{a}$ est produit direct de $\mathfrak{a}'$ et d'un idéal $\mathfrak{c}$ supplémentaire de $\mathfrak{a}'$ qui appartient évidemment au centre de $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{f}$ le radical de $\mathfrak{a}'$; c'est aussi un idéal de $\mathfrak{a}$ et il lui correspond donc un idéal supplémentaire dans $\mathfrak{a}$.

---

[17] Par idéal dérivé d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, on entend l'idéal que constitue le sous-espace engendré par $[x, y]$ lorsque $x$ et $y$ parcourent $\mathfrak{a}$.

Par suite l'idéal dérivé $\mathfrak{f}'$ de $\mathfrak{f}$ est l'intersection de $\mathfrak{f}$ avec l'idéal $\mathfrak{a}'$ dérivé de $\mathfrak{a}$. On a donc $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}$, ce qui entraîne $\mathfrak{f} = \{o\}$ puisque $\mathfrak{f}$ est résoluble. Par conséquent $\mathfrak{a}'$ est semi-simple et $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{a}$. Ainsi,

(9.2) *toute algèbre de Lie réductive est produit direct d'une algèbre de Lie semi-simple (c'est-à-dire de radical* $\{o\}$*) et d'une algèbre de Lie abélienne.*

Inversement,

(9.3) *si le corps de base est de caractéristique* o, *une algèbre de Lie qui est produit direct d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre abélienne est une algèbre de Lie réductive.*

En effet, les endomorphismes $\theta(x)$ réalisent, lorsque $x$ parcourt l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, une représentation linéaire de la composante semi-simple, car $\theta(x) = o$ lorsque $x$ est dans la composante abélienne. Puisque le corps de base est supposé de caractéristique o, toute représentation linéaire de cette composante semi-simple est complètement réductible ([18]).

Les propriétés homologiques liées à ces notions d'algèbres et de sous-algèbres réductives proviennent de ce que, si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$, on peut se limiter aux cochaînes de $\mathfrak{a}$ invariantes par $\mathfrak{b}$ pour calculer l'algèbre de cohomologie de $\mathfrak{a}$.

Lemme 9.1. — *Si* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre réductive dans* $\mathfrak{a}$ : 1° *l'espace des cochaînes de* $\mathfrak{a}$ *est somme directe du sous-espace des cochaînes invariantes par* $\mathfrak{b}$ *et du sous-espace engendré par* $\theta^*(x).C^*(\mathfrak{a})$ *lorsque* $x$ *parcourt* $\mathfrak{b}$; 2° *tout cocycle de* $\mathfrak{a}$ *invariant par* $\mathfrak{b}$ *et cohomologue à zéro est l'image par* $\delta$ *d'une cochaîne invariante par* $\mathfrak{b}$; 3° *toute classe de cohomologie de* $\mathfrak{a}$ *contient un cocycle invariant par* $\mathfrak{b}$ ([19]).

*Démonstration.* — Puisque la représentation linéaire $x \to \theta(x)$ de $\mathfrak{b}$ dans l'espace des chaînes de $\mathfrak{a}$ est complètement réductible, il en est de même de la représentation réalisée par les endomorphismes $\theta^*(x) = -{}^t\theta(x)$ lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b}$. Soit T le sous-espace des cochaînes de $\mathfrak{a}$ engendré par $\theta^*(x).C^*(\mathfrak{a})$ lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b}$. C'est un sous-espace stable par $\mathfrak{b}$; il existe donc un sous-espace $J \subset C^*(\mathfrak{a})$ stable par $\mathfrak{b}$ et supplémentaire de T. Toute cochaîne $a \in J$ est invariante par $\mathfrak{b}$, car, pour tout $x \in \mathfrak{b}$, on a

$$\theta^*(x).a \in T \cap J = \{o\}.$$

Inversement, toute cochaîne invariante par $\mathfrak{b}$ est dans J. Soit en effet N le sous-espace des cochaînes appartenant à T et invariantes par $\mathfrak{b}$. C'est un sous-espace stable par $\mathfrak{b}$ et il possède donc un supplémentaire dans $C^*(\mathfrak{a})$ également stable par $\mathfrak{b}$. Puisque $N \subset T$, ceci prouve que N est engendré par $\theta^*(x).N$ lorsque $x$

---

([18]) *Cf.* J. H. C. Whitehead, *Certain equations in the algebra of a semi-simple infinitesimal group* (*Quart. J. Math.*, Oxford, ser. 8, 1937, p. 220-237).

([19]) La démonstration de ce lemme est calquée sur celle du théorème 19.1 de Chevalley et Eilenberg [5].

parcourt $\mathfrak{b}$; or on a $\theta^*(x).N = \{o\}$ pour tout $x \in \mathfrak{b}$; par conséquent $N = \{o\}$. Ainsi, $C^*(\mathfrak{a})$ *est somme directe de* T *et du sous-espace* J *des cochaînes invariantes par* $\mathfrak{b}$. Ces sous-espaces T et J sont stables par $\delta$ car $\theta^*(x)\delta = \delta\theta^*(x)$ quel que soit $x \in \mathfrak{a}$. Par conséquent, *tout cocycle dans* J *cohomologue à zéro est dans* $\delta$.J. Soit par ailleurs D le sous-espace des cocycles appartenant à T. Il est stable par $\mathfrak{b}$ et il est donc engendré par $\theta^*(x)$.D lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b}$. Or, pour tout cocycle $a$ de $\mathfrak{a}$, on a

$$\theta^*(x).a = \delta\, \iota(x).a + \iota(x)\delta.a = \delta\, \iota(x).a.$$

Tous les éléments de D sont donc cohomologues à zéro. Puisque T et J sont stables par $\delta$, les composantes d'un cocycle dans ces deux sous-espaces sont encore des cocycles. On voit donc que *tout cocycle est cohomologue à sa composante dans* J, ce qui achève la démonstration.

Appliqué au cas où $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, c'est-à-dire au cas où $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie réductive, ce lemme conduit au

THÉORÈME 9.2. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie réductive, son algèbre de cohomologie est isomorphe à la sous-algèbre de ses cochaînes invariantes.*

Puisque toute cochaîne invariante est un cocycle (théorème 4.1), le lemme 9.1 montre en effet que toute classe de cohomologie de $\mathfrak{a}$ contient une cochaîne invariante et *une seule*.

D'après (9.2), si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie réductive, c'est une algèbre unimodulaire. L'isomorphisme $\rho : C^*(\mathfrak{a}) \to C(\mathfrak{a})$ introduit au paragraphe 7 vérifie donc les relations (7.1) et (7.2). Il en résulte que toute classe d'homologie de $\mathfrak{a}$ contient un cycle invariant et un seul. Compte tenu des résultats du paragraphe 8, on en déduit le

THÉORÈME 9.3. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie réductive, elle satisfait à la condition* (P); *son algèbre d'homologie est isomorphe à la sous-algèbre de ses chaînes invariantes.*

Soit $\varphi : C(\mathfrak{b}) \to C(\mathfrak{a})$ l'isomorphisme qui prolonge l'isomorphisme identique de la sous-algèbre $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$. Lorsque l'on suppose que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des algèbres réductives, le théorème 8.1 montre que $\tilde{\varphi} : H_*(\mathfrak{b}) \to H_*(\mathfrak{a})$ est un homomorphisme. Lorsque l'on ne fait plus de restriction sur $\mathfrak{a}$, l'algèbre $H_*(\mathfrak{a})$ n'est plus définie; néanmoins on a le

THÉORÈME 9.4. — *Si* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre réductive dans* $\mathfrak{a}$, *le sous-espace des zéros de* $\tilde{\varphi} : H_*(\mathfrak{b}) \to H(\mathfrak{a})$ *est un idéal bilatère.*

*Démonstration.* — Soient $\mathbf{v} \in H_*(\mathfrak{b})$ un zéro de $\tilde{\varphi}$ et $v$ un cycle dans la classe $\mathbf{v}$; il existe une chaîne $u$ de $\mathfrak{a}$ telle que $\varphi.v = \partial.u$. Soient d'autre part une classe quelconque $\mathbf{v}' \in H_*(\mathfrak{b})$ et $v'$ un cycle invariant dans la classe $\mathbf{v}'$. D'après (4.4), la chaîne $v' \wedge v$ est alors un cycle dans la classe $\mathbf{v}' \smile \mathbf{v}$. On a

$$\varphi.(v' \wedge v) = (\varphi.v') \wedge (\partial.u).$$

Or, d'après (4.7),

$$(\varphi.v')\wedge(\partial.u)-\partial.((\varphi.\bar{v}')\wedge u)-(\partial\varphi.\bar{v}')\wedge u=(\varphi.v')\wedge(\partial.u)-\partial.((\varphi.\bar{v})\wedge u)$$

est orthogonal à toutes les cochaînes de $\mathfrak{a}$ invariantes par $\mathfrak{b}$. Compte tenu du lemme 9.1, ceci prouve que $\varphi.(v'\wedge v)$ est homologue à zéro et donc que $\tilde{\varphi}.(\mathbf{v}'\smile\mathbf{v})=0$. Les zéros de $\tilde{\varphi}$ constituent donc un idéal, qui est bilatère car il contient visiblement les composantes homogènes de ses éléments.

## 10. Structure de l'algèbre de cohomologie d'une algèbre de Lie réductive.

On sait que l'anneau de cohomologie à coefficients réels d'un groupe de Lie compact est isomorphe à l'anneau de cohomologie d'un produit direct de sphères de dimensions impaires ([20]). Ce théorème de Hopf précise la structure de l'algèbre de cohomologie d'une algèbre de Lie de groupe compact. Le but de ce paragraphe est de démontrer que la cohomologie de toute algèbre de Lie réductive possède une structure analogue, du moins si le corps de base est de caractéristique o. On peut obtenir cette généralisation par un procédé transcendant utilisant le résultat de Hopf ([21]). On en donnera ici une démonstration algébrique directe. La seule particularité des algèbres de Lie réductives qui interviendra est la propriété (P) ([22]).

Soit G un groupe de Lie compact et soit $q$ l'application continue du produit direct $G\times G$ sur G définie par $q(\xi\times\xi')=\xi\xi'$ pour $\xi$, $\xi'\in G$. A cette application correspond un homomorphisme $\chi^{-}$ de l'anneau de cohomologie de G dans celui de $G\times G$ dont les propriétés sont à la base de la démonstration de Hopf. On utilisera dans la suite une situation algébrique analogue obtenue en partant de l'isomorphisme d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ sur la diagonale de $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$; si $\mathfrak{a}$ est réductive, il lui correspond un *homomorphisme de l'algèbre d'homologie de* $\mathfrak{a}$ *dans l'algèbre d'homologie de* $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ qui possède des propriétés semblables à celles de $\chi^{-}$ et permet d'aboutir par des raisonnements très voisins de ceux de Hopf.

*Notion d'élément primitif* ([23]). — Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie quelconque. On désignera par $D^*(\mathfrak{a})$ le sous-espace de $H^*(\mathfrak{a})$ engendré par les éléments de la forme $\mathbf{a}\smile\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant des éléments de degré $>0$ dans $H^*(\mathfrak{a})$. C'est un idéal bilatère de $H^*(\mathfrak{a})$ qui est somme directe des intersections $D^p(\mathfrak{a})=D^*(\mathfrak{a})\cap H^p(\mathfrak{a})$. Un élément de l'espace d'homologie $H(\mathfrak{a})$ sera dit *primitif* s'il est orthogonal à $D^*(\mathfrak{a})$ *et au sous-espace* $H^0(\mathfrak{a})$. Les éléments primitifs constituent un sous-espace $P(\mathfrak{a})$ qui est somme directe des intersections $P_q(\mathfrak{a})=P(\mathfrak{a})\cap H_q(\mathfrak{a})$; on a

$$P_0(\mathfrak{a})=\{0\}.$$

---

([20]) *Cf.* H. Hopf, [2], Satz I.

([21]) *Cf.* Chevalley-Eilenberg [5], theorem 18.1.

([22]) Les algèbres de Lie satisfaisant à la condition (P) que nous connaissons sont des algèbres de Lie réductives.

([23]) Les éléments primitifs définis ici correspondent aux classes d'homologie des cycles minimaux au sens de H. Hopf ([2], p. 48).

Si $\varphi$ est un homorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$, l'homomorphisme d'algèbres graduées ${}^t\tilde{\varphi} : H^*(\mathfrak{a}) \to H^*(\mathfrak{b})$ applique $D^*(\mathfrak{a})$ dans $D^*(\mathfrak{b})$. Par suite

$$(10.1) \qquad \tilde{\varphi}.P(\mathfrak{b}) \subset P(\mathfrak{a}).$$

Envisageons maintenant le produit direct de deux algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Comme on l'a vu au paragraphe 5,

$$H^*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = H^*(\mathfrak{a}) \otimes H^*(\mathfrak{b}).$$

Tout élément $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in H^*(\mathfrak{a}) \otimes H^*(\mathfrak{b})$ s'écrivant $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes I) \smile (1 \otimes \mathbf{b})$, on a

$$\sum^{p,q>0} H^p(\mathfrak{a}) \otimes H^q(\mathfrak{b}) \subset D^*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}).$$

Plus précisément,

$$D^*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \sum^{p,q>0} H^p(\mathfrak{a}) \otimes H^q(\mathfrak{b}) + D^*(\mathfrak{a}) \otimes I + I \otimes D^*(\mathfrak{b}).$$

Par conséquent, en identifiant $H(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ et $H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{b})$, on a

$$(10.2) \qquad P(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = P(\mathfrak{a}) \otimes I + I \otimes P(\mathfrak{b}).$$

Soient $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ le produit direct de deux algèbres de Lie isomorphes à $\mathfrak{a}$ et $\varphi$ l'isomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur la diagonale de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$, c'est-à-dire l'isomorphisme qui transforme un élément $x \in \mathfrak{a}$ en $x \times x \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$. Compte tenu de (10.1) et (10.2), on a

$$\tilde{\varphi}.\mathbf{u} \in P(\mathfrak{a}) \otimes I + I \otimes P(\mathfrak{a})$$

pour tout élément primitif $\mathbf{u} \in H(\mathfrak{a})$. Or, en composant $\varphi$ avec la projection canonique $\mu$ de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ sur la première composante de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ isomorphe à $\mathfrak{a}$, on obtient l'isomorphisme identique de $\mathfrak{a}$. Cette projection induit une application linéaire $\mu : H(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \to H(\mathfrak{a})$ qui, d'après (2.5'), transforme un élément $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}' \in H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{a})$ en $\mathbf{v}'_0 \mathbf{v}$ ($\mathbf{v}'_0$ désignant la composante de degré o de $\mathbf{v}'$). Puisque $P_0(\mathfrak{a}) = \{0\}$, ceci prouve que la composante de $\tilde{\varphi}.\mathbf{u}$ dans $P(\mathfrak{a}) \otimes I$ est $\mathbf{u} \otimes I$. On démontre de même que sa composante dans $I \otimes P(\mathfrak{a})$ est $I \otimes \mathbf{u}$. Ainsi,

Lemme 10.1. — *Si* $\mathbf{u}$ *est un élément primitif de* $H(\mathfrak{a})$, *alors*

$$(10.3) \qquad \tilde{\varphi}.\mathbf{u} = \mathbf{u} \otimes I + I \otimes \mathbf{u}.$$

On en déduit le

Théorème 10.1. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie réductive sur un corps de caractéristique* o, *tout élément primitif homogène de* $H_*(\mathfrak{a})$ *est de degré impair* [24].

*Démonstration.* — D'après le théorème 9.3, l'*algèbre* d'homologie $H_*(\mathfrak{a})$ est définie et il en est de même de l'algèbre $H_*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$ d'après le lemme 8.1. Soit $\mathbf{u}$

---

[24] Nous ne faisons que reproduire ici la démonstration de Hopf [2], p. 42.

un élément primitif homogène de $H_*(\mathfrak{a})$ différent de o. Son degré $s$ est $> 0$ car $P_0(\mathfrak{a}) = \{0\}$. Puisque $H_r(\mathfrak{a}) = \{0\}$ lorsque $r$ est supérieur à la dimension de $\mathfrak{a}$, il existe un entier $p > 1$ tel que $(\mathbf{u})^{p-1} \neq 0$ et $(\mathbf{u})^p = 0$ ([25]). Or le théorème 8.1 a montré que $\tilde{\varphi} : H_*(\mathfrak{a}) \to H_*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$ était un homomorphisme; compte tenu du lemme 10.1, on a donc

$$(\mathbf{u} \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes \mathbf{u})^p = (\tilde{\varphi}.\mathbf{u})^p = \tilde{\varphi}.(\mathbf{u})^p = 0.$$

En particulier la composante de $(\mathbf{u} \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes \mathbf{u})^p$ dans le sous-espace $H_*(\mathfrak{a}) \otimes H_s(\mathfrak{a})$ est nulle. Or, d'après la formule (8.3), si $s$ était pair, cette composante serait égale à $p(\mathbf{u})^{p-1} \otimes \mathbf{u}$. Puisque le corps de base est supposé de caractéristique o et que $\mathbf{u} \neq 0$, il en résulterait que $(\mathbf{u})^{p-1} = 0$ contrairement à la définition de $p$. Par conséquent $s$ est impair (et donc $p = 2$).

On supposera vérifiées dans la suite les conditions de ce théorème et l'on étudiera les propriétés que possèdent les éléments primitifs vis-à-vis de la structure multiplicative de $H_*(\mathfrak{a})$.

Lemme 10.2. — *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre graduée possédant une unité et vérifiant la loi de commutation* (1.5). *Si $\gamma$ est une application linéaire d'un espace vectoriel* V *dans le sous-espace engendré par les éléments de degré impair de $\mathcal{A}$, il existe un homomorphisme $\bar{\gamma} : \wedge(V) \to \mathcal{A}$ prolongeant $\gamma : V = \wedge^1(V) \to \mathcal{A}$.*

*Démonstration.* — Soit $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V ([26]). L'application linéaire $\gamma$ se prolonge en un homomorphisme $\gamma' : T(V) \to \mathcal{A}$ qui transforme l'unité de $T(V)$ en l'unité de $\mathcal{A}$ et un tenseur $e^1 \otimes e^2 \otimes \ldots e^p (e^1, e^2, \ldots, e^p \in V)$ en $(\gamma.e^1)(\gamma.e^2)\ldots(\gamma.e^p) \in \mathcal{A}$. Puisque, pour tout $e \in V$, les composantes de degré pair de $\gamma.e$ sont nulles, la relation (1.5) montre que

$$\gamma'.(e \otimes e) = ee = -ee = 0.$$

Par suite $\gamma'$ est nul sur l'idéal bilatère $N \subset T(V)$ qu'engendrent les tenseurs de la forme $e \otimes e$. Il en résulte que $\gamma'$ induit un homomorphisme $\bar{\gamma}$ du quotient $T(V)/N$, c'est-à-dire de l'algèbre extérieure $\wedge(V)$, sur la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par $\gamma.V$ et l'unité. La restriction de $\bar{\gamma}$ à $\wedge^1(V)$ coïncide avec $\gamma$.

En appliquant ceci à l'isomorphisme identique $\sigma$ du sous-espace $P(\mathfrak{a})$ dans $H_*(\mathfrak{a})$ on obtient un *homomorphisme* $\sigma$ de $\wedge(P(\mathfrak{a}))$ *sur la sous-algèbre de* $H_*(\mathfrak{a})$ *engendrée par l'unité et les éléments primitifs.*

Lemme 10.3. — *L'homomorphisme $\sigma : \wedge(P(\mathfrak{a})) \to H_*(\mathfrak{a})$ est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Soit $\{\mathbf{u}^i\}$ $(1 \leq i \leq l)$ une base de $P(\mathfrak{a})$ constituée par des éléments homogènes (donc de degrés impairs, d'après le théorème 10.1), les

([25]) On désigne par $(\mathbf{u})^p$ le produit $\mathbf{u} \smile \mathbf{u} \smile \ldots \mathbf{u}$ de $p$ facteurs égaux à $\mathbf{u}$.
([26]) *Cf.* Bourbaki [6], p. 50.

indices $i$ étant affectés de telle sorte que le degré de $\mathbf{u}^i$ ne dépasse pas le degré de $\mathbf{u}^{i+1}$. On va démonter que

$$\mathbf{u}^1 \smile \mathbf{u}^2 \smile \ldots \mathbf{u}^l = \bar{\sigma}.(\mathbf{u}^1 \wedge \mathbf{u}^2 \wedge \ldots \mathbf{u}^l) \neq 0,$$

ce qui prouvera le lemme puisque tout idéal de l'algèbre extérieure $\bigwedge(P(\mathfrak{a}))$ contient $\bigwedge^l(P(\mathfrak{a}))$ ou se réduit à $\{0\}$. Par définition, $\mathbf{u}^l \neq 0$; si donc l'on avait

$$\mathbf{u}^1 \smile \mathbf{u}^2 \smile \ldots \mathbf{u}^l = 0,$$

il existerait un entier $s \geqq 1$ et $< l$ tel que

$$\mathbf{u}^s \smile \mathbf{u}^{s+1} \smile \ldots \mathbf{u}^l = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{u}^{s+1} \smile \mathbf{u}^{s+2} \smile \ldots \mathbf{u}^l \neq 0.$$

Soit $p$ le degré de $\mathbf{u}^s$. Compte tenu de (10.3) et du fait que $\tilde{\varphi}$ est un homomorphisme, en annulant la composante de $\tilde{\varphi}.(\mathbf{u}^s \smile \mathbf{u}^{s+1} \smile \ldots \mathbf{u}^l) \in H_*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$ dans $H_p(\mathfrak{a}) \otimes H_*(\mathfrak{a})$, on obtiendrait

$$\Sigma(-1)^{s+i}\mathbf{u}^i \otimes (\mathbf{u}^s \smile \mathbf{u}^{s+1} \smile \ldots \hat{\mathbf{u}}^i \smile \ldots \mathbf{u}^l) = 0,$$

la somme étant étendue aux valeurs de $i \geqq s$ pour lesquelles $\mathbf{u}^i$ est de degré $p$. Puisque les $\mathbf{u}^i$ sont linéairement indépendants, il en réulterait que

$$\mathbf{u}^s \otimes (\mathbf{u}^{s+1} \smile \mathbf{u}^{s+2} \smile \ldots \mathbf{u}^l) = 0$$

et donc

$$\mathbf{u}^{s+1} \smile \mathbf{u}^{s+2} \smile \ldots \mathbf{u}^l = 0,$$

contrairement à l'hypothèse.

Lemme 10.4. — *L'isomorphisme $\sigma$ applique $\bigwedge(P(\mathfrak{a}))$ sur $H_*(\mathfrak{a})$.*

*Démonstration.* — Soit $\{\mathbf{a}^i\}$ une base minimale de générateurs homogènes de l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathfrak{a})$. Elle comporte pour tout entier $p$ un nombre d'éléments de degré $p$ égal à la dimension de $H^p(\mathfrak{a})/D^p(\mathfrak{a})$ c'est-à-dire égal à la dimension de $P_p(\mathfrak{a})$ pour $p > 0$ et égal à $1$ pour $p = 0$. D'après le théorème 10.1, la base $\{\mathbf{a}^i\}$ ne comporte, en plus de l'unité, que des générateurs de degré impair lesquels engendrent un sous-espace $V \subset H^*(\mathfrak{a})$ ayant même dimension que $P(\mathfrak{a})$. On peut donc définir un isomorphisme de $P(\mathfrak{a})$ sur $V$ qui, d'après le lemme 10.2, se prolonge en un homomorphisme de $\bigwedge(P(\mathfrak{a}))$ sur la sous-algèbre engendrée par $V$ et l'unité de $H^*(\mathfrak{a})$ c'est-à-dire *sur* $H^*(\mathfrak{a})$. Par suite, la dimension de $H_*(\mathfrak{a})$ qui est égale à la dimension de $H^*(\mathfrak{a})$ n'excède pas celle de $\bigwedge(P(\mathfrak{a}))$. Compte tenu du lemme 10.3, ceci prouve que l'isomorphisme $\sigma$ applique $\bigwedge(P(\mathfrak{a}))$ *sur* $H_*(\mathfrak{a})$.

Soient $P^*(\mathfrak{a})$ l'espace dual de $P(\mathfrak{a})$ et ${}^t\sigma$ l'isomorphisme de l'*espace* $H^*(\mathfrak{a})$ sur l'*espace* $\bigwedge(P^*(\mathfrak{a}))$ transposé de $\sigma$.

Lemme 10.5. — *L'isomorphisme ${}^t\sigma$ est un isomorphisme d'algèbres.*

*Démonstration.* — Soit

$$\gamma : \bigwedge(P(\mathfrak{a})) \to \bigwedge(P(\mathfrak{a})) \otimes \bigwedge(P(\mathfrak{a})),$$

l'isomorphisme prolongeant l'isomorphisme de $P(\mathfrak{a})$ sur la diagonale de

$$P(\mathfrak{a}) + P(\mathfrak{a}).$$

Soit $\sigma \otimes \sigma$ l'isomorphisme de $\wedge(P(\mathfrak{a})) \otimes \wedge(P(\mathfrak{a}))$ sur $H_*(\mathfrak{a}) \otimes H_*(\mathfrak{a})$ qui transforme un élément $e \otimes e'$ en $(\sigma.e) \otimes (\sigma.e')$. On a, pour tout $e \in P(\mathfrak{a})$,

$$(\sigma \otimes \sigma)\gamma.e = (\sigma.e) \otimes I + I \otimes (\sigma.e).$$

D'autre part (10.3),

$$\tilde{\varphi}\sigma.e = (\sigma.e) \otimes I + I \otimes (\sigma.e).$$

Il en résulte que $(\sigma \otimes \sigma)\gamma = \tilde{\varphi}\sigma$ et donc, en passant aux transposés, ${}^t\gamma{}^t(\sigma \otimes \sigma) = {}^t\sigma{}^t\tilde{\varphi}$. Or, si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H^*(\mathfrak{a})$, alors

$${}^t(\sigma \otimes \sigma).(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = ({}^t\sigma.\mathbf{a}) \otimes ({}^t\sigma.\mathbf{b})$$

et donc, d'après le lemme 2.1,

$${}^t\gamma{}^t(\sigma \otimes \sigma).(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = ({}^t\sigma.\mathbf{a}) \wedge ({}^t\sigma.\mathbf{b}).$$

Par ailleurs, si $a$ et $b$ sont des cocycles appartenant respectivement aux classes $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, ${}^t\tilde{\varphi}.(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$ est la classe du cocycle ${}^t\varphi.(a \otimes b)$. Mais $\varphi$ est le prolongement de l'isomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur la diagonale de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$. Par conséquent (lemme 2.1) ${}^t\varphi.(a \otimes b) = a \wedge b$. On a donc

$${}^t\tilde{\varphi}.(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \smile \mathbf{b}$$

et par suite

$${}^t\sigma.(\mathbf{a} \smile \mathbf{b}) = {}^t\sigma{}^t\varphi.(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = {}^t\gamma{}^t(\sigma \otimes \sigma).(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = ({}^t\sigma.\mathbf{a}) \wedge ({}^t\sigma.\mathbf{b}),$$

ce qui prouve le lemme.

En résumé,

THÉORÈME 10.2. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie réductive sur un corps de caractéristique* o, *l'application identique dans* $H_*(\mathfrak{a})$ *du sous-espace* $P(\mathfrak{a})$ *des éléments primitifs de* $H_*(\mathfrak{a})$ *se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre extérieure* $\wedge(P(\mathfrak{a}))$ *sur* $H_*(\mathfrak{a})$. *L'application linéaire transposée est un isomorphisme de l'algèbre* $H^*(\mathfrak{a})$ *sur l'algèbre extérieure duale* $\wedge(P^*(\mathfrak{a}))$ [27].

*Les éléments primitifs de l'algèbre de cohomologie.* — Soit $D(\mathfrak{a})$ le sous-espace de $H_*(\mathfrak{a})$ engendré par des éléments de la forme $\mathbf{u} \smile \mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ étant de degré $>$ o dans $H^*(\mathfrak{a})$. Un élément de $H^*(\mathfrak{a})$ sera dit *primitif* s'il est orthogonal à $D(\mathfrak{a})$ et au sous-espace $H_0(\mathfrak{a})$. On notera que cette définition repose sur la structure multiplicative de $H_*(\mathfrak{a})$ et suppose donc que $\mathfrak{a}$ vérifie la condition (P). Avec les hypothèses du théorème précédent, les éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{a})$ sont les éléments que l'isomorphisme ${}^t\sigma$ applique dans $P^*(\mathfrak{a})$. Toute base du sous-espace des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{a})$ constitue donc, avec l'unité, une base

---

(27) Ce résultat, combiné avec le théorème 10.1 et appliqué au cas d'une algèbre de Lie de groupe compact, donne le théorème de Hopf ([2], Satz I). Compte tenu de l'interprétation du produit de Pontrjagin qui sera donnée au paragraphe 13, il englobe un théorème de Samelson ([3], Satz I').

minimale de générateurs pour l'algèbre $H^*(\mathfrak{a})$. On identifiera désormais $H_*(\mathfrak{a})$ et $H^*(\mathfrak{a})$ avec les algèbres extérieures duales $\wedge(P(\mathfrak{a}))$ et $\wedge(P^*(\mathfrak{a}))$. Ceci revient à identifier $P^*(\mathfrak{a})$ avec le sous-espace des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{a})$.

THÉORÈME 10.3. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux algèbres de Lie réductives sur un corps de caractéristique* o. *Si* $\varphi$ *est un homomorphisme de* $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathfrak{a}$, *l'image de* $\tilde{\varphi} : H_*(\mathfrak{b}) \to H_*(\mathfrak{a})$ *est une sous-algèbre engendrée par l'unité et un sous-espace de* $P(\mathfrak{a})$; *l'image de* ${}^t\tilde{\varphi} : H^*(\mathfrak{a}) \to H^*(\mathfrak{b})$ *est une sous-algèbre engendrée par l'unité et un sous-espace de* $P^*(\mathfrak{b})$ ([28]).

En effet, d'après (10.1), $\tilde{\varphi}.P(\mathfrak{b}) \subset P(\mathfrak{a})$; puisque $H_*(\mathfrak{b}) = \wedge(P(\mathfrak{b}))$, ceci prouve la première partie du théorème. Puisque $\tilde{\varphi}$ est le prolongement à $\wedge P(\mathfrak{b})$ de sa restriction à $P(\mathfrak{b})$, on sait d'après (2.3) que ${}^t\tilde{\varphi}$ est le prolongement à $\wedge P^*(\mathfrak{a})$, de sa restricton à $P^*(\mathfrak{a})$ c'est-à-dire que ${}^t\tilde{\varphi}.P^*(\mathfrak{a}) \subset P^*(\mathfrak{b})$. Puisque $H^*(\mathfrak{a}) = \wedge(P^*(\mathfrak{a}))$ ceci prouve la seconde partie.

## 11. Les classes de cohomologie de degré 3.

— Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie et $Q(\mathfrak{a})$ l'espace des formes bilinéaires symétriques et invariantes de $\mathfrak{a}$. On étudiera dans ce paragraphe les rapports existant entre $Q(\mathfrak{a})$ et le sous-espace $H^3(\mathfrak{a})$ de l'algèbre de cohomologie de $\mathfrak{a}$. Si la forme bilinéaire $q(x, y)$ appartient à $Q(\mathfrak{a})$, c'est que

$$q(x, y) = q(y, x) \quad \text{et} \quad q([z, x], y) + q(x, [z, y]) = 0,$$

quels que soient $x, y, z \in \mathfrak{a}$. Par conséquent, la fonction $q([x, y], z)$ est une fonction linéaire alternée des variables $x, y, z \in \mathfrak{a}$. Il lui correspond donc une 3-cochaîne $c(q)$ de $\mathfrak{a}$ bien définie par la condition

$$(11.1) \qquad \langle x \wedge y \wedge z, c(q) \rangle = q([x, y], z),$$

quels que soient $x, y, z \in \mathfrak{a}$ ([29]).

La cochaîne $c(q)$ est invariante car, quels que soient $x, y, z, t \in \mathfrak{a}$, on a

$$\begin{aligned} \langle x \wedge y \wedge z, \theta^*(t).c(q) \rangle &= -\langle \theta(t).(x \wedge y \wedge z), c(q) \rangle \\ &= -q([[t, x], y], z) - q([x, [t, y]], z) - q([x, y], [t, z]) \\ &= -q([t, [x, y]], z) - q([x, y], [t, z]) = 0. \end{aligned}$$

(11.2) *Pour que l'application linéaire* $q \to c(q)$ *de l'espace* $Q(\mathfrak{a})$ *dans l'espace des* 3-*cochaînes invariantes soit un isomorphisme, il suffit que* $H^1(\mathfrak{a}) = \{0\}$.

En effet, d'après (3.1), pour qu'une 1-chaîne de $\mathfrak{a}$ (qui est toujours un cycle) soit homologue à zéro, il faut et il suffit qu'elle soit dans l'idéal dérivé $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{a}$. Par conséquent, pour que $H_1(\mathfrak{a}) = \{0\}$, ou encore pour que $H^1(\mathfrak{a}) = (H_1(\mathfrak{a}))^* = \{0\}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$. Si donc $H^1(\mathfrak{a}) = 0$ et si $c(q) = 0$, c'est-à-dire d'après (11.1) si $q([x, y], z) = 0$ quels que soient $x, y, z \in \mathfrak{a}$, on a bien $q(x, y) = 0$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

---

([28]) *Cf.* H. SAMELSON [3], Satz III.

([29]) *Cf.* CHEVALLEY-EILENBERG [5], p. 113.

Lemme 11.1. — *Pour que l'application linéaire $q \to c(q)$ soit un isomorphisme de $Q(\mathfrak{a})$ sur le sous-espace des 3-cochaînes invariantes, il suffit que* $H^2(\mathfrak{a}) = H^1(\mathfrak{a}) = \{0\}$.

*Démonstration.* — Soit $c$ une 3-cochaîne invariante de $\mathfrak{a}$. D'après le théorème 4.1, $\delta.c = 0$ donc

$$\delta\iota(x).c = \delta\iota(x).c + \iota(x)\delta.c = \theta^*(x).c = 0$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}$. Si l'on suppose $H^2(\mathfrak{a}) = \{0\}$, le 2-cocycle $\iota(x).c$ est cohomologue à zéro, c'est-à-dire qu'il existe une 1-cochaîne $f(x)$ telle que

$$\delta.f(x) = \iota(x).c,$$

Si l'on suppose de plus que $H^1(\mathfrak{a}) = \{0\}$, il n'existe pas de 1-cocycle différent de 0 et la 1-cochaîne $f(x)$ est alors une fonction linéaire de $x \in \mathfrak{a}$ bien déterminée par la condition $\delta.f(x) = \iota(x).c$. Quels qne soient $x$, $z \in \mathfrak{a}$, on a

$$\delta\theta^*(z).f(x) = \theta^*(z)\,\delta.f(x) = \theta^*(z)\,\iota(x).c = \iota(\theta(z).x).c - \iota(x)\theta^*(z).c,$$

car $\theta(z)$ est une dérivation. Or $c$ est invariante ; on a donc

$$\delta\theta^*(z).f(x) = \delta.f([z, x]).$$

Puisque tout 1-cocycle est nul, il en résulte que

$$\theta^*(z).f(x) = f([z, x]).$$

Par suite, quels que soient $x$, $y$, $z \in \mathfrak{a}$, on a

$$\langle \theta(z).x, f(y) \rangle = -\langle x, \theta^*(z).f(y) \rangle = -\langle x, f(\theta(z).y) \rangle,$$

ce qui prouve que la *fonction bilinéaire* $q(x, y) = -\langle x, f(y) \rangle$ est *invariante*.

De l'invariance de $q(x, y)$ résulte que

$$\begin{aligned} q([z, x].y) &= -q(x, [z.y]) = q(x, [y, z]) = -q([y, x], z) \\ &= q([x, y], z) = -q(y, [x, z]) = q(y, [z, x]), \end{aligned}$$

quels que soient $x$, $y$, $z \in \mathfrak{a}$. Puisque $H^1(\mathfrak{a}) = 0$, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ (idéal dérivé de $\mathfrak{a}$) et ceci prouve donc que $q(x, y)$ est une fonction bilinéaire *symétrique*. La 3-cochaîne $c(q)$ que la formule (11.1) lui fait correspondre n'est autre que $c$; on a en effet

$$\begin{aligned} \langle x \wedge y \wedge z, c(q) \rangle &= q([x, y], z) = -\langle [x, y], f(z) \rangle \\ = -\langle \delta.(x \wedge y), f(z) \rangle &= \langle x \wedge y, \delta.f(z) \rangle = \langle x \wedge y, \iota(z).c \rangle = \langle x \wedge y \wedge z, c \rangle, \end{aligned}$$

quels que soient $x$, $y$, $z \in \mathfrak{a}$. On voit donc que toute 3-cochaîne invariante est l'image d'un élément de $Q(\mathfrak{a})$ par l'application linéaire $q \to c(q)$ qui, d'après (11,2) est un isomorphisme.

On déduit de ce résultat le

Théorème 11.1. — *Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie semi-simple sur un corps de caractéristique* 0, *la dimension de* $H^3(\mathfrak{a})$ *est égale à la dimension de l'espace des formes bilinéaires symétriques invariantes de* $\mathfrak{a}$.

*Démonstration.* — D'après (9,3), $\mathfrak{a}$ est une algèbre réductive, donc, en vertu du théorème 9.2, $H^*(\mathfrak{a})$ est isomorphe à l'algèbre de ses cochaînes invariantes. On achèvera donc la démonstration en prouvant que les conditions du lemme **11**.1 sont satisfaites, c'est-à-dire que

$$H^1(\mathfrak{a}) = H^2(\mathfrak{a}) = \{0\}.$$

Puisque $\mathfrak{a}$ est semi-simple, elle coïncide avec son idéal dérivé; on a donc $H^1(\mathfrak{a}) = \{0\}$, Par ailleurs, si $a$ est une 2-cochaîne invariante, c'est un cocycle et l'on a

$$\delta\iota(x).a = \theta^*(x).a = 0$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}$. Mais puisque $H^1(\mathfrak{a}) = \{0\}$, $\mathfrak{a}$ ne possède pas d'autre 1-cocycle que zéro. On voit donc que $\iota(x).a = 0$ et par suite

$$\langle x \wedge y,\, a \rangle = \langle y,\, \iota(x).a \rangle = 0$$

quels que soient $x, y \in \mathfrak{a}$. Ceci prouve que $a = 0$ et l'on a donc bien $H^2(\mathfrak{a}) = \{0\}$ (30).

On sait qu'avec les hypothèses du théorème précédent, la trace de l'endomorphisme $-\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)$ est une forme bilinéaire symétrique invariante et régulière de $\mathfrak{a}$. Par conséquent $H^3(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$. On complétera ces résultats par le

THÉORÈME **11**.2. — *Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie simple sur un corps algébriquement fermé et de caractéristique* 0, *alors* $H^3(\mathfrak{a})$ *a pour dimension* 1. *Il en est de même lorsque* $(\mathfrak{a})$ *est l'algèbre de Lie d'un groupe compact simple.*

*Démonstration.* — Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie simple, tout élément $q$ différent de 0 dans $Q(\mathfrak{a})$ est une forme régulière car, du fait qu'elle est invariante, l'ensemble des $x \in \mathfrak{a}$ tels que $q(x, y) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$ qui ne peut être $\mathfrak{a}$. Si $q'(x, y)$ est un second élément de $Q(\mathfrak{a})$, on définit donc un endomorphisme $\sigma$ de l'espace de $\mathfrak{a}$ par la condition $q(\sigma.x, y) = q'(x, y)$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{a}$. De l'invariance des formes $q(x, y)$ et $q'(x, y)$ résulte que $\sigma.[x, y] = [\sigma.x, y]$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{a}$. Par conséquent, l'ensemble $U_l$ des vecteurs propres relatifs à un scalaire $l$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathfrak{a}$ tels que $\sigma.x = lx$ est un idéal de $\mathfrak{a}$. On a donc soit $U_l = \{0\}$ soit $U_l = \mathfrak{a}$. Si le corps de base est algébriquement fermé, il existe une valeur $l'$ de $l$ telle que $U_{l'} \neq \{0\}$ et par suite $q'(x, y) = l'q(x, y)$, identiquement. Si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact, on aboutit à une conclusion analogue en supposant que $q(x,y)$ est la forme bilinéaire — (trace de $\mathrm{ad}(x)\ \mathrm{ad}(y)$); c'est en effet un produit scalaire de l'espace de $\mathfrak{a}$ pour lequel $\sigma$ est self-adjoint du fait de la symétrie de $q'(x, y)$. Ainsi, dans les deux cas, on voit qu'il ne peut exister dans $Q(\mathfrak{a})$ deux éléments linéairement indépendants. Puisque $H^3(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$, on achève donc la démonstration en appliquant le théorème **11**.1 (31).

---

(30) *Cf.* CHEVALLEY-EILENBERG [5], theorem 21.1.

(31) *Cf.* E. CARTAN [1], n$^{os}$ 59-60. On notera que, si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe simple réel non compact dont l'extension complexe n'est pas simple, la dimension de $H^3(\mathfrak{a})$ est supérieure à 1.

# DEUXIÈME PARTIE.

## La cohomologie relative à une sous-algèbre.

## CHAPITRE V.

### ÉTUDE DIRECTE.

**12. Définition. Dualité de Poincaré.** — Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$. On désignera par $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ le sous-espace des 1-cochaînes de $\mathfrak{a}$ orthogonales à $\mathfrak{b}$ et par $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ la sous-algèbre de $C^*(\mathfrak{a})$ engendrée par $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ et l'unité. Cette sous-algèbre est l'image de l'algèbre extérieure de $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ par l'isomorphisme qui prolonge l'isomorphisme identique de $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ dans $C^*(\mathfrak{a})$. Elle est graduée par les sous-espaces $N^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \cap C^p(\mathfrak{a})$.

(12.1) *Pour qu'une cochaîne $a$ de $\mathfrak{a}$ soit dans* $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, *il faut et il suffit que* $\iota(x).a = 0$ *pour tout* $x \in \mathfrak{b}$.

En effet, le sous-espace des chaînes de $\mathfrak{a}$ orthogonales à $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ est l'idéal de $C(\mathfrak{a})$ engendré par $\mathfrak{b} \subset C_1(\mathfrak{a})$.

Puisque les endomorphismes $\iota(x)$ sont des antidérivations, on voit que, si $a \in N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, alors $\iota(x)\varepsilon(a) = (-1)^q \varepsilon(a)\iota(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{b}$. Par suite, si $\varphi : C(\mathfrak{b}) \to C(\mathfrak{a})$ est l'isomorphisme qui prolonge l'isomorphisme identique de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$, on a

$$(12.2) \qquad \iota(\varphi.v)\varepsilon(a) = (-1)^{pq}\varepsilon(a)\iota(\varphi.v),$$

quels que soient $v \in C_p(\mathfrak{b})$ et $a \in N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

L'idéal engendré par $\mathfrak{b}$ étant stable par $\mathfrak{b}$, il en est de même de $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. On désignera par $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ la sous-algèbre des cochaînes de $\mathfrak{a}$ appartenant à $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ et invariantes par $\mathfrak{b}$. Elle est graduée par les sous-espaces $L^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \cap C^p(\mathfrak{a})$; c'est donc une sous-algèbre stable par l'automorphisme $\omega$. D'autre part, si $c \in L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, alors, d'après (12.1),

$$\iota(x)\delta.c = \iota(x)\delta.c + \delta\iota(x).c = \theta^*(x).c = 0$$

pour tout $x \in \mathfrak{b}$, c'est-à-dire que $\delta.c \in N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Or *tout cocycle dans* $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ *appartient à* $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, car c'est un zéro de $\theta^*(x) = \iota(x)\delta + \delta\iota(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{b}$. Ainsi $\delta.L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \subset L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Les restrictions de $\omega$ et $\delta$ à l'algèbre graduée $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ y définissent une structure d'algèbre différentielle dont l'algèbre de cohomologie est appelée *algèbre de cohomologie de $\mathfrak{a}$ relative à la sous-algèbre $\mathfrak{b}$*. Cette algèbre sera désignée par $H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$; elle est graduée par les sous-espaces $H^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ que constituent les classes de cohomologie des cocycles homogènes. Le produit y aura pour symbole $\smile$; l'unité de $C^*(\mathfrak{a}$ est un 0-cocycle dans $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$

dont la classe de cohomologie est l'unité de l'algèbre $H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ et sera notée $\mathfrak{l}$ ([32]).

Soit ${}^t\pi$ l'isomorphisme identique de $L^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ dans $C^*(\mathfrak{a})$. Il lui correspond un homomorphisme ${}^t\bar{\pi} : H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$ qui transforme la classe de cohomologie relative d'un cocycle de $L^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ en sa classe de cohomologie dans $H^*(\mathfrak{a})$. Soit $\pi$ l'application linéaire transposée de ${}^t\pi$; elle applique $C(\mathfrak{a})$ sur l'espace $L(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ dual de $L^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$. Le dual de $L^p(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ s'identifie à $L_p(\mathfrak{a};\mathfrak{b}) = \pi.C_p(\mathfrak{a})$. Le transposé $\partial$ de la restriction de $-\delta$ à $L^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ définit de la manière habituelle un *espace d'homologie relative* $H(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ dual de $H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$. On désigne par $H_p(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ le dual de $H^p(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ identifié à l'espace des classes d'homologie relative de degré $p$. L'application $\pi$ induit une application linéaire $\bar{\pi} : H(\mathfrak{a}) \to H(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ transposée de ${}^t\bar{\pi}$.

Supposons que $\mathfrak{a}$ soit l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe G et que $\mathfrak{b}$ soit la sous-algèbre définie par un sous-groupe fermé *connexe* $U \subset G$. Soit $W = G/U$ l'espace homogène défini par les classes d'équivalence $\xi U (\xi \in G)$. L'application canonique de G sur W définit un isomorphisme $\zeta$ de l'algèbre des formes différentielles extérieures de W dans celle des formes de G. Les formes de W invariantes par G (qui opère transitivement sur W) ont pour images des formes différentielles invariantes à gauche de G. En identifiant $C^*(\mathfrak{a})$ avec l'algèbre des formes invariantes à gauche de G, on identifie $L^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ avec l'image des formes invariantes de W. L'isomorphisme $\zeta$ permutant avec la différentiation extérieure, l'anneau de cohomologie à coefficients réels de W, qui peut se calculer en se limitant aux formes invariantes de W, est ainsi isomorphe à $H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$. L'homomorphisme des anneaux de cohomologie que définit l'application canonique de G sur W est alors donné par ${}^t\bar{\pi}$ ([33]). Puisque l'on suppose U connexe, la variété W est orientable ([34]) et son anneau de cohomologie possède donc les propriétés de dualité que donne le théorème de Poincaré. On montrera dans ce qui suit sous quelles hypothèses ces propriétés subsistent lorsque l'on sort du cas compact.

THÉORÈME 12.1. — *Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre réductive dans une algèbre de Lie unimodulaire $\mathfrak{a}$. Les dimensions de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant respectivement égales à n et m, il existe un isomorphisme de l'espace* $H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ *sur son dual qui applique chaque sous-espace* $H^p(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ *sur* $H_{n-m-p}(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$. *Tout idéal différent de* $\{0\}$ *dans* $H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ *contient le sous-espace* $H^{n-m}(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$.

*Démonstration.* — D'après (12.1) pour qu'une cochaîne $c$ de $\mathfrak{a}$ soit dans $L^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$, il faut et il suffit que $c$ ainsi que $\delta.c$ appartiennent à $N^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$. Par suite, si $N'$ est le sous-espace des chaînes de $\mathfrak{a}$ orthogonales à $N^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ [c'est-à-dire

---

([32]) Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, on vérifie aisément qu'il existe un isomorphisme naturel de l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$ du quotient de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$ sur l'algèbre de cohomologie relative $H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$.

([33]) *Cf.* CHEVALLEY-EILENBERG [5], p. 103 et 114. Cette interprétation de $H^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ n'a évidemment plus de sens lorsque le sous-groupe correspondant à $\mathfrak{b}$ n'est plus un sous groupe fermé.

([34]) *Cf.* É. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* (*Mém. Sci. Math.*, 1929, p. 29).

l'idéal engendré par $\mathfrak{b} \subset C_1(\mathfrak{a})$], alors $N' + \partial . N'$ est le sous-espace des zéros de $\pi : C(\mathfrak{a}) \to L(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

Soit $v$ l'image dans $C_m(\mathfrak{a})$ d'une $m$-chaîne $\neq 0$ de $\mathfrak{b}$; les zéros de $\varepsilon(v)$ sont les éléments de $N'$. Soit $w$ une $(n-m)$-chaîne de $\mathfrak{a}$ telle que $v \wedge w \neq 0$. Puisque $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$ le lemme 9.1 montre que le sous-espace $N' + \partial . N'$, qui est le sous-espace orthogonal à un sous-espace de cochaînes invariantes par $\mathfrak{b}$, possède un supplémentaire dans $C(\mathfrak{a})$ constitué par des chaînes invariantes par $\mathfrak{b}$. Or si $w'$ est la composante de $w$ dans $N' + \partial . N'$, on a

$$v \wedge w' \in v \wedge (\partial . N'),$$

c'est-à-dire que $v \wedge w'$ est dans le sous-espace engendré par

$$\varepsilon(v)\, \partial \varepsilon(x) . C_{n-m}(\mathfrak{a}) = \varepsilon(v)\theta(x) . C_{n-m}(\mathfrak{a}) = [\theta(x)\,\varepsilon(v) - \varepsilon(\theta(x).v)] . C_{n-m}(\mathfrak{a})$$

lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b}$. Mais $\mathfrak{b}$ est unimodulaire ainsi que $\mathfrak{a}$; on a donc

$$\theta(x)\,\varepsilon(v) . C_{n-m}(\mathfrak{a}) = \theta(x) . C_n(\mathfrak{a}) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \theta(x) . v = 0$$

pour tout $x \in \mathfrak{b}$ et par suite $v \wedge w' = 0$. Ceci prouve que l'on peut choisir pour $w$ une $(n-m)$-chaîne *invariante* par $\mathfrak{b}$ telle que $v \wedge w \neq 0$.

Soit $\rho' : L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \to L(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ l'application linéaire définie par

(12.3) $$\rho' . c = \pi\, \iota(c) . w,$$

quel que soit $c \in L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. On a visiblement $\rho' . L^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \subset L_{n-m-p}(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ quel que soit $p$. Par ailleurs, si $c \in L^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ est un zéro de $\rho'$, c'est que la chaîne $\iota(c) . w$, qui est invariante par $\mathfrak{b}$, est dans $N' + \partial . N'$. Du fait que $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$, $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ est somme directe de $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ et du sous-espace engendré par $\theta^*(x) . N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b}$ (lemme 9.1). Par suite, toute chaîne invariante par $\mathfrak{b}$ dans $N' + \partial . N'$ est dans $N'$. Compte tenu de (12.2), on a donc

$$\iota(c) . (v \wedge w) = (-1)^{pm} \varepsilon(v)\, \iota(c) . w = 0,$$

ce qui prouve que $c = 0$. Ainsi, $\rho'$ est un *isomorphisme* qui applique $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ *sur* $L(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ puisque ces deux espaces ont même dimension. Quel que soit $p$, on a donc

(12.4) $$\rho' . L^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = L_{n-m-p}(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}).$$

Puisque $\delta$ est une antidérivation, on a

$$\partial \iota(c) . w = \iota(\bar{c})\, \partial . w + \iota(\delta . \bar{c}) . w$$

quel que soit $c \in L^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

Or

$$\varepsilon(v)\, \iota(\bar{c})\, \partial . w = (-1)^{pm} \iota(\bar{c})\, \varepsilon(v)\, \partial . w$$

et par ailleurs, compte tenu de (4.5),

$$\varepsilon(v)\, \partial . w = \partial \varepsilon(\bar{v}) . w - \varepsilon(\partial . \bar{v}) . w = 0,$$

car $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont unimodulaires. On a donc

$$\iota(\bar{c})\, \partial . w \in N'$$

et par suite

$$\partial\pi\iota(c).w = \pi\,\partial\iota(c).w = \pi\iota(\delta.\bar{c}).w,$$

ce qui prouve que

(12.5) $$\partial\rho' = \rho'\,\delta\omega.$$

Grâce aux relations (12.3), (12.4) et (12.5), la démonstration s'achève par un raisonnement identique à celui qui a conduit au théorème 7.1.

13. **Propriétés de l'homomorphisme ${}^t\tilde{\pi} : H^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$. Interprétation du produit de Pontrjagin.** — Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ et $\varphi$ : $C(\mathfrak{b}) \to C(\mathfrak{a})$ l'isomorphisme qui prolonge l'isomorphisme identique de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$.

THÉORÈME 13.1. — *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de dimension m réductive dans $\mathfrak{a}$ et si $\tilde{\varphi}.H_m(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$, alors ${}^t\tilde{\pi}$ est un isomorphisme* ([35]).

*Démonstration.* — Puisque $\tilde{\varphi}.H_m(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$, c'est que $\varphi.C_m(\mathfrak{b})$ contient un cycle $v$, invariant par $\mathfrak{b}$ et non homologue à zéro. D'après le lemme 9.1, $\mathfrak{b}$ étant réductive dans $\mathfrak{a}$, il existe un cocycle $b$ de $\mathfrak{a}$ invariant par $\mathfrak{b}$ et tel que $\langle v, b\rangle = 1$. Toujours en vertu de ce lemme, si $c \in L^p(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$ est un cocycle cohomologue à zéro dans $C^*(\mathfrak{a})$, il existe une $(p-1)$-cochaîne $a$ invariante par $\mathfrak{b}$ telle que $\delta.a = c$. Compte tenu de (12.2), on a donc

$$c = \varepsilon(c)\iota(v).b = (-1)^{pm}\,\iota(v)\varepsilon(c).b = (-1)^{pm}\,\iota(v)\,\delta.(a\wedge b).$$

Or $a\wedge b$ est invariante par $\mathfrak{b}$; d'après (4.6), on a donc

$$c = (-1)^{pm}\,\delta\iota(\bar{v}).(a\wedge b).$$

Mais la cochaîne $\iota(\bar{v}).(a\wedge b)$ appartient à $L^{p-1}(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$. Par conséquent $c$ est cohomologue à zéro dans $L^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$. Ceci prouve bien que ${}^t\tilde{\pi}$ est un isomorphisme.

L'application linéaire $\tilde{\pi}$, transposée de ${}^t\tilde{\pi} : H^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$, applique $H(\mathfrak{a})$ dans l'espace $H(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$ dual de $H^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$.

LEMME 13.1. — *Si $\mathfrak{a}$ satisfait à la condition* (P) ([36]), *le sous-espace des zéros de $\tilde{\pi}$ est un idéal bilatère de l'algèbre d'homologie* $H_*(\mathfrak{a})$.

*Démonstration.* — Soient $\mathbf{u} \in H_*(\mathfrak{a})$ un zéro de $\tilde{\pi}$ et $u$ un cycle dans la classe $\mathbf{u}$; $u$ est orthogonal à tous les cocycles dans $L^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$. En désignant comme plus haut par $N'$ l'idéal orthogonal à $N^*(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$, on voit donc que

$$u \in N' + \partial.N' + \partial.C(\mathfrak{a}) = N' + \partial.C(\mathfrak{a}).$$

Soient par ailleurs une classe $\mathbf{v} \in H_*(\mathfrak{a})$ quelconque et $v$ un cycle *invariant* dans la classe $\mathbf{v}$. D'après (4.3), on a

$$\varepsilon(\bar{v})\partial - \partial\varepsilon(v) = 0.$$

---

([35]) Inversement, si ${}^t\tilde{\pi}$ est un isomorphisme, alors $\tilde{\varphi}$ est également un isomorphisme; ce résultat, valable lorsque $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$ résulte du théoréme 18.3.

([36]) *Cf.* paragraphe 8.

Donc $v \wedge u$ est un cycle et il appartient à

$$v \wedge \mathrm{N}' + v \wedge (d.\mathrm{C}(\mathfrak{a})) \subset \mathrm{N}' + d\varepsilon(\bar{v}).\mathrm{C}(\mathfrak{a}).$$

Par conséquent, la classe $\mathbf{v} \smile \mathbf{u}$ qui contient le cycle $v \wedge u$ est encore un zéro de $\bar{\pi}$. Les zéros de $\bar{\pi}$ constituent donc un idéal de $\mathrm{H}_*(\mathfrak{a})$ et cet idéal est bilatère car il contient visiblement les composantes homogènes de ses éléments.

On déduit de ce lemme le

Théorème 13.2. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie réductive sur un corps de caractéristique* o *et* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{a}$. *L'image de* ${}^t\bar{\pi} : \mathrm{H}^*(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b}) \to \mathrm{H}^*(\mathfrak{a})$ *est une sous-algèbre engendrée par l'unité et des éléments primitifs de* $\mathrm{H}^*(\mathfrak{a})$.

En effet, si P et P* sont les sous-espaces d'éléments primitifs de $\mathrm{H}(\mathfrak{a})$ et $\mathrm{H}^*(\mathfrak{a})$, on a, d'après le théorème 10.2,

$$\mathrm{H}_*(\mathfrak{a}) = \wedge(\mathrm{P}) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^*(\mathfrak{a}) = \wedge(\mathrm{P}^*).$$

Compte tenu du lemme 2.2, ceci prouve que la sous-algèbre ${}^t\bar{\pi}.\mathrm{H}^*(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$ qui est orthogonale à un idéal de $\mathrm{H}_*(\mathfrak{a})$ est engendrée par l'unité de $\mathrm{H}^*(\mathfrak{a})$ et un sous-espace de P*.

Toutes ces propriétés ont été établies, dans le cas compact, par H. Samelson ([37]).

*On étudiera dans la suite la cohomologie relative à la sous-algèbre diagonale* $\mathfrak{b}$ *de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$. En identifiant $\mathrm{C}^*(\mathfrak{a})$ et $\mathrm{C}^*(\mathfrak{b}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathfrak{b})$, les éléments de $\mathrm{N}^1(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$ sont les 1-cochaînes de la forme $f \otimes \mathrm{I} - \mathrm{I} \otimes f$, où $f \in \mathrm{C}^1(\mathfrak{b})$. Soit $\gamma$ l'automorphisme involutif de $\mathfrak{a}$ tel que $\gamma.(x \times y) = (y \times x)$ pour tout $x \times y \in \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$. L'automorphisme transposé coïncide avec $\omega$ sur $\mathrm{N}^1(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$. Son prolongement ${}^t\gamma$ à l'algèbre des cochaînes de $\mathfrak{a}$ transforme donc toute $p$-cochaîne $c \in \mathrm{N}^p(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$ en ${}^t\gamma.c = \omega.c = (-1)^p c$. Par conséquent, si

$$c \in \mathrm{L}^p(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b}) \subset \mathrm{N}^p(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b}),$$

on a

$$\delta.c \in \mathrm{L}^{p+1}(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b}) \subset \mathrm{N}^{p+1}(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$$

et par suite

$$(-1)^{p+1}\,\delta.c = {}^t\gamma\,\delta.c = \delta\,{}^t\gamma.c = (-1)^p\,\delta.c.$$

Puisque le corps de base est de caractéristique $\neq 2$, il en résulte que $\delta.c = 0$. On voit donc que $\delta$ *est nul sur* $\mathrm{L}^*(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$ *qui est ainsi isomorphe à* $\mathrm{H}^*(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$ ([38]).

A l'isomorphisme $\nu$ de $\mathfrak{b}$ sur la seconde composante de $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ isomorphe à $\mathfrak{b}$, correspond un homomorphisme ${}^t\nu$ de $\mathrm{C}^*(\mathfrak{a})$ sur $\mathrm{C}^*(\mathfrak{b})$. L'idéal des zéros de ${}^t\nu$ est engendré par les 1-cochaînes $f \otimes \mathrm{I} \in \mathrm{C}^1(\mathfrak{b}) \otimes \mathrm{I}$; la restriction de ${}^t\nu$ à $\mathrm{N}^*(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$ est donc un *isomorphisme* qui applique $\mathrm{N}^1(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$ *sur* $\mathrm{C}^1(\mathfrak{b})$. Par suite ${}^t\nu$ applique $\mathrm{N}^*(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b})$ sur $\mathrm{C}^*(\mathfrak{b})$. Pour tout $x \in \mathfrak{b}$, on a

$$\theta^*(x)\,{}^t\nu = {}^t\nu\,\theta^*(\nu.x) = {}^t\nu\,\theta^*(o \times x),$$

([37]) *Cf.* [3], Satz V.

([38]) On reconnait ici la méthode utilisée par M. É. Cartan pour démontrer que les invariants intégraux d'un espace symétrique sont fermés (*cf.* [1], n° 10); elle s'applique toutes les fois que $\mathfrak{b}$ est la sous-algèbre des éléments invariants dans un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$.

d'après (3.9). Par ailleurs, ${}^t\nu\,\theta^*(x\times 0)=0$, car

$$\theta(x\times 0)\nu.u=\theta(x\times 0).(1\otimes u)=(\theta(x).1)\otimes u=0$$

pour toute chaîne $u$ de $\mathfrak{b}$. On a donc

$$\theta^*(x)^t\nu={}^t\nu\,\theta^*(x\times 0+0\times x)={}^t\nu\,\theta^*(x\times x)$$

quel que soit $x\in\mathfrak{b}$. Il en résulte que la restriction de ${}^t\nu$ à $\mathrm{N}^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})$ est un isomorphisme qui *applique* $\mathrm{L}^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})$ *sur la sous-algèbre des cochaînes invariantes de* $\mathfrak{b}$. En composant l'isomorphisme identique ${}^t\pi:\mathrm{L}^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})\to\mathrm{C}^*(\mathfrak{a})$ avec ${}^t\nu$ on obtient donc un homomorphisme ${}^t\nu\,{}^t\pi$ de l'algèbre différentielle $\mathrm{L}^*(\mathfrak{a},\,\mathfrak{b})$ dans l'algèbre différentielle $\mathrm{C}^*(\mathfrak{a})$ qui induit un *isomorphisme* ${}^t\tilde{\nu}\,{}^t\tilde{\pi}$ *de* $\mathrm{H}^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})\cong\mathrm{L}^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})$ *sur la sous-algèbre des classes de cohomologie de* $\mathfrak{b}$ *contenant une cochaîne invariante.*

On supposera dorénavant que $\mathfrak{b}$ est une algèbre de Lie *réductive* sur un corps de caractéristique 0. Toute classe de cohomologie de $\mathfrak{b}$ contient alors une cochaîne invariante et par suite, ${}^t\tilde{\nu}\,{}^t\tilde{\pi}$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^*(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b},\,\mathfrak{b})$ sur $\mathrm{H}(\mathfrak{b})$. Par ailleurs, les algèbres d'homologie $\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$ et $\mathrm{H}_*(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b})=\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})\otimes\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$ sont définies et le sous-espace des zéros de $\tilde{\pi}:\mathrm{H}_*(\mathfrak{a})\to\mathrm{H}(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})$ est un idéal bilatère de $\mathrm{H}_*(\mathfrak{a})$ (lemme 13.1). Soit M le sous-espace des $\mathbf{u}\in\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$ tels que

$$\tilde{\pi}.(1\otimes\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}\otimes 1)=0.$$

C'est une sous-algèbre de $\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$ car, si $\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in\mathrm{M}$, alors

$$\begin{aligned}&\tilde{\pi}.(1\otimes(\mathbf{u}\smile\mathbf{v})-(\overline{\mathbf{u}\smile\mathbf{v}})\otimes 1)\\ &=\tilde{\pi}.(1\otimes\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}\otimes 1)\smile(1\otimes\mathbf{v})+\tilde{\pi}.(\bar{\mathbf{u}}\otimes 1)\smile(1\otimes\mathbf{v}-\bar{\mathbf{v}}\otimes 1)=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathbf{u}\smile\mathbf{v}\in\mathrm{M}$. Cette sous-algèbre contient visiblement l'unité de $\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$. Elle contient de plus tous les éléments primitifs. En effet, si $\mathbf{u}$ est un élément primitif homogène de $\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$, il est de degré impair (théorème 10.1), donc $\bar{\mathbf{u}}=-\mathbf{u}$. D'autre part (lemme 10.1), $1\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes 1$ est l'image de la classe d'homologie $\mathbf{u}$ de la sous-algèbre diagonale. Par conséquent, la classe $1\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes 1$ contient un cycle orthogonal à $\mathrm{N}^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})\supset\mathrm{L}^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})$ et ceci prouve qu'elle est un zéro de $\tilde{\pi}$. Puisque l'algèbre $\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$ est engendrée par l'unité et ses éléments primitifs (théorème 10.2), on voit donc que $\mathrm{M}=\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$. Par conséquent, quels que soient $\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$, on a

$$\tilde{\pi}.(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\tilde{\pi}.((\mathbf{u}\otimes 1)\smile(1\otimes\mathbf{v}))=\tilde{\pi}.((1\otimes\bar{\mathbf{u}})\smile(1\otimes\mathbf{v}))=\tilde{\pi}.(1\otimes(\bar{\mathbf{u}}\smile\mathbf{v})).$$

Or il résulte de la relation (2.5) que

$$\tilde{\nu}.(\bar{\mathbf{u}}\smile\mathbf{v})=1\otimes(\bar{\mathbf{u}}\smile\mathbf{v}).$$

On a donc

$$\tilde{\pi}.(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\tilde{\pi}\tilde{\nu}.(\mathbf{u}\smile\mathbf{v}),\tag{13.1}$$

quels que soient $\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in\mathrm{H}_*(\mathfrak{b})$.

Ce résultat permet d'interpréter dans le cas compact le produit que l'on a défini au Chapitre IV dans l'espace d'homologie des algèbres de Lie réductives.

Soit en effet $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe G considéré comme sous-groupe diagonal du groupe $G\times G$. Soit $q'$ l'application de $G\times G$ sur G qui transforme un point $(\xi\times\xi')\in G\times G$ en $\overset{-1}{\xi}\xi'\in G$. Les images inverses des points de G sont les sous-espaces de $G\times G$ translatés à gauche de la diagonale. On est donc conduit à identifier l'espace homogène $W=(G\times G)/G$ avec l'espace G de telle sorte qu'en composant l'isomorphisme de G sur la seconde composante de $G\times G$ avec la projection canonique de $G\times G$ sur W on obtienne l'isomorphisme identique de G sur lui-même. Les groupes d'homologie (à coefficients réels) H(G) et H(W) de G et W étant respectivement isomorphes à $H(\mathfrak{b})$ et $H(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b};\,\mathfrak{b})$, on voit que cette identification de G et W se traduit par l'identification de $H(\mathfrak{b})$ et $H(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b};\,\mathfrak{b})$ pour laquelle l'isomorphisme $\tilde{\pi}\tilde{\nu}$ obtenu plus haut devient l'automorphisme identique de $H(\mathfrak{b})$. La formule (13.1) prouve alors que

(13.2) *Le produit* $\mathbf{u}\smile\mathbf{v}$ *de deux classes d'homologie de* G *considérées comme éléments de l'algèbre d'homologie de* $\mathfrak{b}$ *est l'image de*

$$\bar{\mathbf{u}}\otimes\mathbf{v}\in H(G\times G)=H(G)\otimes H(G)$$

*dans* H(G) *par homomorphisme qu'induit l'application* $q'$.

On mettra ce résultat sous une forme plus simple en appliquant le théorème de Hopf ([39]) selon lequel l'automorphisme de l'espace G qui transforme chaque élément de G en son inverse induit un automorphisme de H(G) qui transforme tout élément $\mathbf{u}$ en $\omega.\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}$. Soit $q$ l'application de $G\times G$ sur G qui transforme un point $(\xi\times\xi')\in G\times G$ en $\xi\xi'\in G$. L'image par $q$ du point $\xi\times\xi'$ s'obtient en passant d'abord de $\xi\times\xi'$ à $\overset{-1}{\xi}\times\xi$, puis en prenant l'image de $\overset{-1}{\xi}\times\xi$ par $q'$. Compte tenu de (13.2), on voit donc que cette application $q$ induit un homomorphisme de $H(\mathfrak{b})\otimes H(\mathfrak{b})$ dans $H(\mathfrak{b})$ qui transforme $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ en $\mathbf{u}\smile\mathbf{v}$. La classe $\mathbf{u}\smile\mathbf{v}$ est donc le produit dit « de Pontrjagin » des classes $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ([40]).

THÉORÈME 13.3. — *Si* $\mathfrak{b}$ *est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe* G, *le produit* $\smile$ *défini dans l'espace d'homologie de* $\mathfrak{b}$ *coïncide avec le produit de Pontrjagin défini dans le groupe d'homologie à coefficients réels de* G.

## CHAPITRE VI.

### LES STRUCTURES D'ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES FILTRÉES DÉFINIES PAR LES SOUS-ALGÈBRES D'UNE ALGÈBRE DE LIE.

Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. On étudiera dans ce Chapitre l'interdépendance des algèbres de cohomologie $H^*(\mathfrak{a})$, $H^*(\mathfrak{b})$, $H^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})$ et des homomorphismes ${}^t\tilde{\varphi}: H^*(\mathfrak{a})\to H^*(\mathfrak{b})$, ${}^t\tilde{\pi}\ H^*(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})\to H^*(\mathfrak{a})$. La méthode qui sera

([39]) *Ueber den Rang geschlossener Liescher Gruppen* (*Comm. Math. Helv.*, t. 13, 1940-1941, Satz I).

([40]) *Cf.* PONTRJAGIN, *On homologies in compact Lie groups* (*Recueil Math.*, Moscou, t. 6, 1939).

utilisée s'inspire des théories de M. Leray [41] et repose sur une situation algébrique identique à celle que l'on rencontre dans diverses questions de topologie algébrique [42].

**14. Définitions.** — Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre et $\{A^p\}$ une famille d'idéaux bilatères de $\mathfrak{A}$ affectés d'un indice $p$ prenant toutes les valeurs entières. L'algèbre $\mathfrak{A}$ est dite *filtrée* par les idéaux $A^p$ si $A^p \supset A^{p+1}$ et si le produit d'un élément de $A^p$ par un élément de $A^q$ est dans $A^{p+q}$, quels que soient $p$ et $q$. Par exemple, si $\mathfrak{A}$ est graduée par une famille de sous-espaces $\mathfrak{A}^r$, elle est filtrée par les idéaux $A^p = \sum^{r \geq p} \mathfrak{A}^r$. A toute algèbre $\mathfrak{A}$ filtrée par $\{A^p\}$, correspond une algèbre graduée, dite *associée* de $\mathfrak{A}$ et définie comme suit : son espace est somme directe des sous-espaces $\mathcal{G}^p = A^p/A^{p+1}$ qui y définissent les degrés; si $a \in A^p$ et $b \in A^q$, le produit de l'image canonique de $a$ dans $\mathcal{G}^p$ par l'image canonique de $b$ dans $\mathcal{G}^q$ se définit comme l'image canonique dans $\mathcal{G}^{p+q}$ du produit de $a$ par $b$ qui est dans $A^{p+q}$. Il est clair que l'algèbre filtrée $\mathfrak{A}$ et son algèbre graduée associée ont mêmes dimensions.

On montrera dans ce paragraphe comment la donnée d'une sous algèbre $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ permet de définir dans l'algèbre des cochaînes de $\mathfrak{a}$ une famille d'idéaux bilatères $B^p$ ($p$ entier) tels que

$$B^p \supset B^{p+1}, \tag{14.1}$$

$$B^p \wedge B^q \subset B^{p+q}, \tag{14.2}$$

$$\delta . B^p \subset B^p, \tag{14.3}$$

$$\omega . B^p \subset B^p, \tag{14.4}$$

quels que soient $p$ et $q$,

$$B^p = C^*(\mathfrak{a}) \quad \text{pour} \quad p \leq 0 \quad \text{et} \quad \bigcap_p B^p = \{0\}. \tag{14.5}$$

Ces propriétés expriment que les idéaux $B^p$ définissent, avec les opérateurs $\delta$ et $\omega$ une structure d'*algèbre différentielle filtrée* dans l'algèbre des cochaînes de $\mathfrak{a}$ [42].

*Définition des idéaux* $B^p$. — On désigne comme précédemment par $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ la sous-algèbre de $C^*(\mathfrak{a})$ engendrée par l'unité et les 1-cochaînes de $\mathfrak{a}$ orthogonales à $\mathfrak{b}$. Pour tout entier $p$, $B^p$ est l'idéal engendré par les cochaînes de degré $\geq p$ appartenant à $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Si $p > 0$, $B^p$ est donc l'idéal engendré par les cochaînes de $\mathfrak{a}$ décomposables en produit de $p$ cochaînes de degré 1 orthogonales à $\mathfrak{b}$.

Les idéaux $B^p$ sont bilatères et vérifient visiblement les relations (14.1), (14.2), (14.4) et (14.5). *On désignera par n et m les dimensions respectives des*

---

[41] *Cf.* J. Leray [4].
[42] *Cf.* H. Cartan, *loc. cit.*, note [2].

*algèbres* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$. Puisque $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ est isomorphe à l'algèbre extérieure du sous-espace $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ on a

$$N^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = \{0\}$$

lorsque $p > n - m$, et par suite

(14.6) $$B^p = 0 \quad \text{pour} \quad p > n - m.$$

Pour démontrer (14.3), on remarquera que, si $\varphi : C(\mathfrak{b}) \to C(\mathfrak{a})$ est le prolongement de l'isomorphisme identique de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$, alors

(14.7) $B^1$ *est l'idéal des zéros de* ${}^t\varphi$;

c'est donc un idéal stable par $\delta$ et l'on a en particulier $\delta . f \in B^1$ pour tout $f \in N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Puisque $\delta$ est une antidérivation, ceci prouve la stabilité vis-à-vis de $\delta$ de tous les idéaux $B^p$.

A la structure d'algèbre différentielle filtrée de l'algèbre des cochaînes de $\mathfrak{a}$ correspondent :

1° *Une structure d'algèbre filtrée dans l'algèbre de cohomologie de* $\mathfrak{a}$. Elle est définie par une famille d'idéaux $\mathcal{H}^p$, chaque $\mathcal{H}^p$ étant le sous-espace des classes de cohomologie de $C^*(\mathfrak{a})$ qui contiennent un cocycle dans $B^p$. Les inclusions qui caractérisent une structure filtrée résultent des inclusions (14.1) et (14.2). Compte tenu de (14.5), (14.6) et (14.7), on voit d'autre part que

(14.8) $$\mathcal{H}^p = H^*(\mathfrak{a}) \quad \text{pour } p \leq 0, \qquad \mathcal{H}^p = \{0\} \quad \text{pour } p > n - m,$$

(14.9) $\mathcal{H}^1$ est l'idéal des zéros de ${}^t\bar{\varphi} : H^*(\mathfrak{a}) \to H^*(\mathfrak{b})$.

2° *Une suite d'algèbres différentielles graduées* $E_s$ que l'on définit, pour chaque entier $s$, de la manière suivante. Soit $Z_s^p$ la sous-algèbre des cochaînes $a \in B^p$ telles que $\delta . a \in B^{p+s}$. On pose

$$D_s^p = \delta . Z_s^{p-s}.$$

Pour tout entier $p$, on a

(14.10) $$\ldots \supset Z_s^p \supset Z_{s+1}^p \supset \ldots \supset D_{r+1}^p \supset D_r^p \supset \ldots,$$

(14.11) $$Z_{s-1}^{p+1} \subset Z_s^p,$$

quels que soient les entiers $s$ et $r$. En tant qu'espace vectoriel, $E_s$ est la somme directe des sous-espaces $E_s^p = Z_s^p / (Z_{s-1}^{p+1} + D_{s-1}^p)$. On désignera par $\eta_s^p$ l'application canonique de $Z_s^p$ sur le quotient $E_s^p$. Le produit dans $E_s$ aura pour symbole $\smile$ et sera défini par la condition

(14.12) $$(\eta_s^p . a) \smile (\eta_s^q . b) = \eta_s^{p+q} . (a \wedge b),$$

lorsque $a \in Z_s^p$ et $b \in Z_s^q$. Ce produit définit dans $E_s$ une structure d'algèbre, graduée par les sous-espaces $E_s^p$. On détermine enfin, dans chaque algèbre $E_s$, un *opérateur différentiel* $\Delta_s$ et un automorphisme involutif $\Omega_s$ en posant

(14.13) $$\Delta_s \eta_s^p = \eta_s^{p+s} \delta,$$

(14.14) $$\Omega_s \eta_s^p = \eta_s^p \omega$$

sur chaque sous-espace $Z_s^p$. Les relations $\delta\delta = 0$ et $\delta\omega + \omega\delta = 0$ se traduisent, dans chaque $E_s$, par les relations

$$\Delta_s \Delta_s = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta_s \Omega_s + \Omega_s \Delta_s = 0.$$

De plus, si $a \in Z_s^p$ et $b \in Z_s^q$, alors

$$\begin{aligned}\Delta_s.((\eta_s^p.a) \smile (\eta_s^q.b)) &= \Delta_s \eta_s^{p+q}.(a \wedge b) = \eta_s^{p+q+s}\delta.(a \wedge b)\\ &= \eta_s^{p+q+s}.((\delta.a) \wedge b) + \eta_s^{p+q+s}.((\omega.a) \wedge (\delta.b)).\end{aligned}$$

Or, par suite de (14.4), on a $\omega.a \in Z_s^p$. D'autre part, $\delta.a \in \delta.Z_s^p = D_s^{p+s} \subset Z_s^{p+s}$ et de même $\delta.b \in Z_s^{q+s}$, les relations de définition (14.12), (14.13) et (14.14) permettent donc d'écrire

$$\Delta_s.((\eta_s^p.a) \smile (\eta_s^q.b)) = (\Delta_s.(\eta_s^p.a)) \smile (\eta_s^q.b) + (\Omega_s.(\eta_s^p.a)) \smile (\Delta_s.\eta_s^q.b)),$$

ce qui prouve que $\Delta_s$ est une antidérivation de l'algèbre $E_s$ relativement à l'automorphisme $\Omega_s$. On notera que l'opérateur $\Delta_s$ *élève le degré de s unités.* On définit de la manière habituelle les cocycles, les classes de cohomologie et l'algèbre de cohomologie de $E_s$.

Une propriété fondamentale de la suite $E_s$ est donnée par le :

Lemme 14.1. — *Chaque algèbre graduée $E_{s+1}$ est isomorphe à l'algèbre de cohomologie de $E_s$.*

*Démonstration.* — On a vu (14.10) que $Z_{s+1}^p \subset Z_s^p$. *L'image de $Z_{s+1}^p$ par $\eta_s^p$ coïncide avec le sous-espace des zéros de $\Delta_s$ dans $E_s^p$.* En effet, si $a \in Z_{s+1}^p$, alors

$$\delta.a \in D_{s+1}^{p+s+1} \subset Z_{s-1}^{p+s+1}$$

et par conséquent,

$$\Delta_s \eta_s^p.a = \eta_s^{p+s}\delta.a = 0.$$

Inversement, si $\Delta_s \eta_s^p.a = 0$, c'est que

$$\delta.a \in Z_{s-1}^{p+s+1} + D_{s-1}^{p+s};$$

il existe donc une cochaîne $b \in Z_{s-1}^{p+1} \subset Z_s^p$ telle que

$$\delta.(a+b) \in Z_{s-1}^{p+s+1} \subset B^{p+s+1}$$

c'est-à-dire que $a + b \in Z_{s+1}^p$. Puisque

$$\eta_s^p.b \in \eta_s^p.Z_{s-1}^{p+1} = \{0\},$$

ou voit donc que

$$\eta_s^p.a \in \eta_s^p.Z_{s+1}^p.$$

Par ailleurs, l'*image par $\eta_s^p$ du sous-espace $Z_s^{p+1} + D_s^p \subset Z_s^p$ coïncide avec $\Delta_s.E_s^{p-s}$.* En effet,

$$\eta_s^p.Z_s^{p+1} \subset \eta_s^p.Z_{s-1}^{p+1} = \{0\}$$

et par conséquent, si $a \in Z_s^{p+1} + D_s^p$, alors

$$\eta_s^p.a \in \eta_s^p.D_s^p = \eta_s^p\delta.Z_s^{p-s} = \Delta_s \eta_s^{p-s}.Z_s^{p-s} = \Delta_s.E_s^{p-s}.$$

Inversement, si $e \in \Delta_s . E_s^{p-s}$, c'est qu'il existe une cochaîne $b \in Z_s^{p-s}$ telle que

$$e = \eta_s^p \delta . b \in \eta_s^p \delta . Z^{p-s} = \eta_s^p . D_s^p.$$

Chaque $\eta_s^p$ induit donc un isomorphisme de $E_{s+1}^p = Z_{s+1}^p/(Z_s^{p+1} + D_s^p)$ sur le quotient de l'espace des zéros de $\Delta_s$ dans $E_s^p$ par le sous-espace $\Delta_s . E_s^{p-s}$. On en déduit par linéarité un isomorphisme de $E_{s+1}$ sur l'espace des classes de cohomologie de l'algèbre différentielle $E_s$. Cet isomorphisme est visiblement compatible avec les structures d'algèbres graduées de ces deux espaces; il permettra d'identifier dans la suite l'algèbre de cohomologie du terme $E_s$ avec le terme $E_{s+1}$..

De la stabilité des idéaux $B^p$ par $\delta$ résulte que, pour tout $s \leqq 0$,

$$Z_s^p = B^p \qquad \text{et} \qquad D_{s-1}^p = \delta . Z_{s-1}^{p-s+1} \subset B^{p+1-s} \subset B^{p+1};$$

on a donc alors $E_s^p = B^p/B^{p+1}$ quel que soit $p$. Avec la structure multiplicative adoptée dans $E_s$, ceci prouve que, pour $s \leqq 0$, l'algèbre $E_s$ est *l'algèbre graduée associée à l'algèbre* $C^*(\mathfrak{a})$ *filtrée* par les idéaux $B^p$.

Pour $p > n - m$, on a $B^p = \{0\}$ et par conséquent $E_s^p = \{0\}$ quel que soit $s$. Il en résulte que, pour $s > n - m$, on a $\Delta_s = 0$ et par suite $E_s = E_{n-m+1}$. Soient $Z_\infty^p$ le sous-espace des cocycles de $\mathfrak{a}$ appartenant à $B^p$ et $D_\infty^p$ le sous-espace des éléments de $Z_\infty^p$ cohomologues à zéro; on pose

$$E_\infty^p = Z_\infty^p/(Z_\infty^{p+1} + D_\infty^p).$$

***Pour tout*** $s > n - m$, ***on a*** $E_s = E_\infty$. Lorsque $p < 0$ et de même lorsque $p > n - m$, on a en effet $E_s^p = E_\infty^p = \{0\}$. Par ailleurs, si $p > 0$, alors

$$\delta . Z_s^p \subset B^{p+s} = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \delta . Z_{s-1}^{p+1} \subset B^{p+s} = \{0\},$$

ce qui prouve que

$$Z_s^p = Z_\infty^p \qquad \text{et} \qquad Z_{s-1}^{p+1} = Z_\infty^{p+1}.$$

D'autre part, si $p \leqq n - m$, alors $p \leqq s - 1$; compte tenu de (14.11), on a donc

$$D_{s-1}^p = \delta . Z_{s-1}^{p-s+1} \subset \delta . Z_p^0 = D_\infty^p.$$

Or $D_{s-1}^p \supset D_\infty^p$; par conséquent, $D_{s-1}^p = D_\infty^p$. On a donc également $E_s^p = E_\infty^p$ pour $0 \leqq p \leqq n - m$. On désignera par $E_\infty$ l'algèbre terminale à laquelle toutes les algèbres $E_s$ de rang $s > n - m$ sont identiques.

LEMME 14.2. — *L'algèbre terminale* $E_\infty$ *de la suite* $E_s$ *est l'algèbre graduée associée à l'algèbre* $H^*(\mathfrak{a})$ *filtrée par les idéaux* $\mathcal{H}^p$.

***Démonstration.*** — Les éléments de $\mathcal{H}^p$ sont par définition les classes de cohomologie des cocycles appartenant à $B^p$, c'est-à-dire des éléments de $Z_\infty^p$. On a donc, pour chaque valeur de $p$, $\mathcal{H}^p = Z_\infty^p/D_\infty^p$. Or $D_\infty^{p+1} \subset D_\infty^p$, par suite,

$$\mathcal{H}^p/\mathcal{H}^{p+1} = Z_\infty^p/(Z_\infty^{p+1} + D_\infty^p) = E_\infty^p.$$

La structure multiplicative de $E_\infty$ étant définie par la condition (14.12) (pour $s > n - m$), cette algèbre est bien l'associée de l'algèbre filtrée $H^*(\mathfrak{a})$.

La structure graduée de $C^*(\mathfrak{a})$ qui correspond au degré des cochaînes de $\mathfrak{a}$ n'a joué aucun rôle dans ce qui précède. En en tenant compte, on va définir de nouvelles graduations dans chaque algèbre de la suite $E_s$. Chaque idéal $B^q$, et par suite chaque sous-espace $Z_s^q$ ou $D_s^q$ est somme directe de ses intersections avec les sous-espaces $C^p(\mathfrak{a})$. Soit $E_s^{p,q}$ l'image par $\eta_s^q$ des $(p+q)$-cochaînes de $\mathfrak{a}$ qui appartiennent à $Z_s^q$. Chaque $E_s^q$ est somme directe, par rapport à l'indice $p$, des sous-espaces $E_s^{p,q}$. L'espace $E_s$ est donc, pour chaque $s$, la somme directes des $E_s^{p,q}$.

Quels que soient les entiers $p$, $q$, $p'$, $q'$, et $s$ on a

$$E_s^{p,q} \smile E_s^{p',q'} \subset E_s^{p+p',q+q'}$$

car

$$C^{p+q}(\mathfrak{a}) \wedge C^{p'+q'}(\mathfrak{a}) \subset C^{p+q+p'+q'}(\mathfrak{a}).$$

On exprimera ces propriétés en disant que les sous-espaces $E_s^{p,q}$ définissent une structure bigraduée dans l'algèbre $E_s$. Outre les deux graduations qui correspondent aux indices $p$ et $q$, $E_s$ possède une graduation combinée définie par les sous-espaces $\sum\limits^{p+q=r} E_s^{p,q}$. On a

$$\Omega_s . e = (-1)^{p+q} e$$

pour tout $e \in E_s^{p,q}$. D'autre part, quel que soit $s$

(14.15) *si* $E_s^{p,q} \neq \{0\}$, *c'est que* $0 \leq p \leq m$ *et* $0 \leq q \leq n-m$.

En effet, on a déjà remarqué que $E_0^q \neq \{0\}$ suppose $0 \leq q \leq n-m$; par ailleurs, toute $r$-cochaîne est dans $B^{m-r}$ et toute $r$-cochaîne dans $B^q$ est nulle si $r < q$.

Quels que soient $p$, $q$ et $s$ on a

(14.16) $$\Delta_s . E_s^{p,q} \subset E_s^{p-s+1,q+s},$$

car

$$\delta . C^{p+q}(\mathfrak{a}) \subset C^{p+q+1}(\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad \Delta_s . E_s^q \subset E_s^{q+s}.$$

On remarquera enfin que les $p$-cochaînes dans $B^p$ sont les éléments de $N^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$; les $p$-cochaînes dans $Z_\infty^p$ sont donc les cocycles dans $N^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Or les cocycles dans $N^p(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ appartiennent à $L^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Il en résulte que

(14.17) *les éléments de degré p dans* $\mathcal{H}^p$ *sont les éléments de* ${}^t\bar{\pi}.H^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

On en déduit que l'image de l'homomorphisme ${}^t\bar{\pi}$ est isomorphe à la sous-algèbre $\sum E_\infty^{0,q} \subset E_\infty$.

Lorsque $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe G et que $\mathfrak{b}$ est la sous-algèbre correspondant à un sous-groupe fermé connexe $U \subset G$, on peut démontrer l'existence d'un isomorphisme naturel de l'algèbre $E_2$ sur l'anneau de cohomologie à coefficients réels de l'application canonique de G sur l'espace homogène $G/U = W$ [43]. La « structure » de cet anneau est donnée par les termes de rang $> 2$ de la suite $\{E_s\}$. L'espace fibré G qui a pour base W et pour fibres les sous-espaces obtenus par translation à gauche de U, admet le sous-

---

[43] *Cf.* J. Leray [4].

groupe U comme groupe structural. Puisque U est connexe, ce groupe structural n'induit que l'automorphisme identique dans l'anneau de cohomologie de la fibre type. Dans ces conditions, les coefficients étant réels, on sait que l'anneau de cohomologie de l'application de G sur W est isomorphe au produit tensoriel des anneaux de cohomologie de G et W ([43]). On montrera dans le paragraphe suivant quelles hypothèses doivent être faites sur la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ pour obtenir un résultat analogue sur $E_2$ lorsque l'on sort du cas compact.

**15. Calcul des premiers termes de la suite $\{E_s\}$ définie par une sous-algèbre réductive.** — Les notations restant par ailleurs celles du paragraphe précédent, on posera pour abréger

$$N^* = N^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}), \qquad N^q = N^q(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}), \qquad L^* = L^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}) \quad \text{et} \quad L^q = L^q(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}).$$

De nouvelles *propriétés de stabilité* des idéaux $B^q$ interviendront ici.

Compte tenu de (12.2), on a

$$(15.1) \qquad \iota(\varphi.v).(a \wedge c) = (\iota(\varphi.v).a) \wedge c,$$

quels que soient $v \in C(\mathfrak{b})$, $a \in C^*(\mathfrak{a})$ et $c \in N^*$. Ceci prouve que

$$(15.2) \qquad \iota(\varphi.v).B^q \subset B^q$$

pour toute chaîne $v$ de $\mathfrak{b}$ et pour chaque valeur de $q$.

Puisque les idéaux $B^q$ sont stables par $\delta$ et que

$$\theta^*(\varphi.y) = \iota(\varphi.y)\,\delta + \delta\iota(\varphi.y),$$

on voit que de plus

(15.3) *chaque idéal* $B^q$ *est stable par* $\mathfrak{b}$.

*Étude de l'algèbre différentielle* $E_0$. — A tout élément $b \otimes c \in C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^q$, on fait correspondre une cochaîne $a(b) \wedge c \in B^q$ obtenue en multipliant extérieurement $c$ par une cochaîne $a(b)$ de $\mathfrak{a}$ telle que ${}^t\varphi.a(b) = b$. La cochaîne $a(b)$ est définie modulo $B^1$ par la donnée de $b$, donc $a(b) \wedge c$ est définie modulo $B^1 \wedge B^q \subset B^{q+1}$. Par suite,

$$\eta_0^q.(a(b) \wedge c) \in E_0^q = B^q/B^{q+1}$$

ne dépend que de $b$ et $c$ et en dépend linéairement lorsque $b$ et $c$ parcourent respectivement $C^*(\mathfrak{b})$ et $N^q$. Ceci permet de définir une application linéaire

$$\alpha : C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^* \to E_0$$

par la condition

$$(15.4) \qquad \alpha.(b \otimes c) = \eta_0^q.(a \wedge c),$$

lorsque $b = {}^t\varphi.a \in C^*(\mathfrak{b})$ et $c \in N^q$. Les structures multiplicatives de $C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$ et de $E_0$ étant définies par les conditions (1.6) et (14.12), on vérifie aisément que $\alpha$ est un homomorphisme de ces algèbres. Quels que soient $p$ et $q$, on a

$$\alpha.(C^p(\mathfrak{b}) \otimes N^q) \subset E_0^{p,q};$$

en effet, si $b \otimes c \in C^p(\mathfrak{b}) \otimes N^q$, on peut choisir pour $a(b)$ une $p$-cochaîne de $\mathfrak{a}$ et l'image de $a(b) \wedge c$ par $\eta_0^q$ est alors dans $E_0^{p,q}$.

Inversement, soit $e$ un élément de $E_0^{p,q}$ et soit $a(e)$ une $(p+q)$-cochaîne de $\mathfrak{a}$ dans $B^q$ telle que $e = \eta_0^q . a(e)$. Pour toute $p$-chaîne $v$ de $\mathfrak{b}$, la $q$-cochaîne $\iota(\varphi . v) . a(e)$ est dans $B^q$, d'après (15.2), et par conséquent dans $N^q$; elle ne dépend pas du choix de $a(e)$, mais seulement de $e$ car, si $a'(e)$ est une autre $(p+q)$-cochaîne dans $B^q$ telle que $\eta_0^q . a'(e) = e$, alors $a(e) - a'(e) \in B^{q+1}$ et par conséquent

$$\iota(\varphi . v) . (a(e) - a'(e)) \in B^{q+1} \cap C^q(\mathfrak{a}) = \{0\}$$

lorsque $v$ est de degré $p$. Ceci permet de définir, pour tout $e \in E_0$, une application linéaire

$$\beta(e) : C(\mathfrak{b}) \to N^*$$

par les conditions :

1° $\beta(e)$ est fonction linéaire de $e \in E_0$,
2° si $a$ est une $(p+q)$-cochaîne dans $B^q$ et si $e = \eta_0^q . a$, alors

$$(15.5) \qquad \begin{cases} \beta(e) . v = \iota(\varphi . v) . a & (\text{lorsque } v \text{ est une } p\text{-chaîne}), \\ \beta(e) . v = 0 & (\text{lorsque } v \text{ est de degré } \neq p). \end{cases}$$

On désignera par $\tau(a_0)$ l'application linéaire de $C(\mathfrak{b})$ dans $N^*$ qui correspond à un élément $a_0 \in C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$. Si

$$a_0 = b \otimes c \in C^p(\mathfrak{b}) \otimes N^q,$$

alors, par définition,

$$\tau(b \otimes c) . v = \langle v, b \rangle c$$

pour toute chaîne $v$ de $\mathfrak{b}$. Soit $a(b)$ une $p$-cochaîne de $\mathfrak{a}$ telle que ${}^t\varphi . a(b) = b$. Compte tenu de (15.4) et (15.5), on a

$$\alpha . a_0 = \eta_0^q . (a(b) \wedge c)$$

et donc, pour toute $p$-chaîne $v$ de $\mathfrak{b}$,

$$\beta(\alpha . a_0) . v = \iota(\varphi . v) . (a(b) \wedge c).$$

En utilisant la formule (15.1) on obtient donc

$$\beta(\alpha . a_0) . v = (\iota(\varphi . v) . a(b)) \wedge c = \langle \varphi . v, a(b) \rangle c = \langle v, b \rangle c = \tau(a_0) . v.$$

Cette égalité étant par ailleurs trivialement vérifiée lorsque $v$ est de degré $\neq p$, on voit que

$$(15.6) \qquad \beta(\alpha . a_0) = \tau(a_0),$$

quel que soit $a_0 \in C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$.

On sait que $\tau(a_0) = 0$ entraîne $a_0 = 0$; par conséquent $\alpha$ est un *isomorphisme*. Les algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant de dimensions respectives $n$ et $m$, $C^*(\mathfrak{a})$, $C^*(\mathfrak{b})$ et $N^*$ sont des algèbres extérieures sur des espaces de dimensions respectives $n$, $m$ et $n-m$. Par suite, les espaces $C^*(\mathfrak{a})$ et $C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$ ont tous deux pour dimension $2^n$. Or, $E_0 = \sum^p B^p/B^{p+1}$ a même dimension que $C^*(\mathfrak{a})$. On a ainsi démontré le

Théorème 15.1. — *L'application linéaire $\alpha$ est un isomorphisme de l'algèbre $C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$ sur l'algèbre $E_0$ compatible avec leurs structures graduées.*

Pour étudier la *structure différentielle* de $E_0$, on utilisera la représentation linéaire de $\mathfrak{b}$ dans $E_0$ définie comme suit. Les idéaux $B^q$ étant stables par $\mathfrak{b}$ (15.3), on obtient pour tout $y \in \mathfrak{b}$ un endomorphisme linéaire $\Theta^*(y)$ de $E_0$ en posant

$$\Theta^*(y)\eta_0^q = \eta_0^q \theta^*(\varphi.y), \tag{15.7}$$

sur chaque sous-espace $Z_0^p = B^p$. Il est clair que $y \to \Theta^*(y)$ est une représentation linéaire de $\mathfrak{b}$.

La stabilité des idéaux $B^p$ par les endomorphismes $\iota(\varphi.y)$ permet de définir de la même manière, pour chaque $y \in \mathfrak{b}$, un endomorphisme $I(y)$ de $E_0$. La relation

$$\theta^*(\varphi.y) = \iota(\varphi.y)\delta + \delta\iota(\varphi.y)$$

se traduit alors dans $E_0$ par

$$\Theta^*(y) = I(y)\Delta_0 + \Delta_0 I(y), \tag{15.8}$$

pour tout $y \in \mathfrak{b}$.

On identifiera désormais $C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$ et $E_0$ au moyen de l'isomorphisme $\alpha$. Si $b \otimes c \in C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^q$ et si $a(b)$ est une cochaîne de $\mathfrak{a}$ telle que ${}^t\varphi.a(b) = b$, alors, pour tout $y \in \mathfrak{b}$, on a

$$\begin{aligned}\Theta^*(y).(b \otimes c) &= \Theta^*(y)\eta_0^q.(a(b)\wedge c) = \eta_0^q \theta^*(\varphi.y).(a(b)\wedge c) \\ &= \eta_0^q.((\theta^*(\varphi.y).a(b))\wedge c) + \eta_0^q.(a(b)\wedge(\theta^*(\varphi.y).c)),\end{aligned}$$

car $\theta^*(\varphi.y)$ est une dérivation. Du fait que

$${}^t\varphi\,\theta^*(\varphi.y).a(b) = \theta^*(y)\,{}^t\varphi.a(b) = \theta^*(y).b$$

résulte donc que

$$\Theta^*(y).(b \otimes c) = (\Theta^*(y).b) \otimes c + b \otimes (\theta^*(\varphi.y).c). \tag{15.9}$$

Cette expression montre en particulier que les $\Theta^*(y)$ sont des *dérivations* de l'algèbre $E_0$ (relativement à l'automorphisme $\Omega_0$) qui laissent invariants les sous-espaces $E_0^{p,q}$. Les éléments de la sous-algèbre des zéros communs aux $\Theta^*(y)$ lorsque $y$ parcourt $\mathfrak{b}$ seront dits *invariants*.

Lemme 15.1. — *Soient $\{y^i\}$ $(1 \leq i \leq m)$ une base de $\mathfrak{b}$ et $\{g^i\}$ la base duale des 1-cochaînes de $\mathfrak{b}$. Quel que soit $e \in E_0$, on a*

$$\beta(\Delta_0.e) = \beta(e)\partial + \sum_{i=1}^{i=m} \beta(\Theta^*(y^i).e)\,\iota(g^i). \tag{15.10}$$

*Démonstration.* — On vérifiera cette relation pour un $e \in E_0^{p,q}$. Si $a$ est une $(p+q)$-cochaîne dans $B^q$ telle que $\eta_0^q.a = e$, alors $\delta.a$ est une $(p+q+1)$-cochaîne dans $B^q$ et l'on a, par définition, $\Delta_0.e = \eta_0^q\,\delta.a$. D'après (15.5), l'application $\beta(\Delta_0.e)$ transforme donc une $(p+1)$-chaîne $v$ de $\mathfrak{b}$ en

$$\beta(\Delta_0.e).v = \iota(\varphi.v)\,\delta.a.$$

Or, d'après (4.6), on a

$$\iota(\varphi.v)\delta - \delta\iota(\varphi.\bar{v}) - \iota(d\varphi.v) - \sum_{i=1}^{i=m}\iota(\varphi\iota(g^i).v)\theta^*(\varphi.y^i) = 0.$$

Mais la $(q-1)$-cochaîne $\iota(\varphi.\bar{v}).a$ est dans $B^q$ (15.2); elle est donc nulle. On a d'autre part

$$\iota(d\varphi.v).a = (\varphi d.v).a = \beta(e)d.v.$$

Compte tenu de (15.7), on obtient donc

$$\beta(\Delta_0.e).v = \beta(e)d.v + \sum_{i=1}^{i=m}\beta(\Theta^*(y^i).e)\,\iota(g^i).v$$

et cette égalité est trivialement vérifiée lorsque $v$ est de degré $\neq p+1$.

Soit $\Delta$ l'endomorphisme de $C^*(\mathfrak{b})\otimes N^*$ tel que

(15.11) $$\Delta.(b\otimes c) = -(\delta.b)\otimes c,$$

quel que soit $b\otimes c\in C^*(\mathfrak{b})\otimes N^*$. On a

$$\tau(\Delta.(b\otimes c)) = \tau(b\otimes c)d.$$

La relation (15.10) montre donc qu'avec l'identification faite,

(15.12) $$\Delta_0.e = \Delta.e$$

*pour tout élément invariant* $e\in E_0$.

On suppose désormais que $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$. Les idéaux $B^q$ étant stables par $\mathfrak{b}$ (15.3), il existe dans chaque $B^q$ un sous-espace $\mathcal{R}^q$ stable par $\mathfrak{b}$ et supplémentaire de $B^{q+1}$, c'est-à-dire un sous-espace que $\eta_0^q$ applique isomorphiquement sur $E_0^q$. Les restrictions des $\Theta^*(y)$ à $E_0^q$, qui sont définies par (15.7), réalisent donc une représentation linéaire de $\mathfrak{b}$ semblable à celle que réalisent les restrictions des $\theta^*(\varphi.y)$ à $\mathcal{R}^q$. Par conséquent, $y\to\Theta^*(y)$ *est une représentation linéaire complètement réductible de* $\mathfrak{b}$ dans l'espace $E_0$. Compte tenu de (15.8), et par un raisonnement identique à celui par lequel on a prouvé le lemme 9.1, on en déduit que :

(15.13) $E_0$ *est somme directe du sous-espace* J *de ses éléments invariants et du sous-espace* T *engendré par* $\Theta^*(y).E_0$ *lorsque* $y$ *parcourt* $\mathfrak{b}$;

(15.14) *toute classe de cohomologie de* $E_0$ *contient un cocycle invariant;*

(15.15) *tout cocycle invariant de* $E_0$ *cohomologue à zéro est l'image par* $\Delta_0$ *d'un élément invariant.*

*Étude de l'algèbre différentielle* $E_1$. — On suppose toujours que $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$; c'est donc une algèbre réductive (9.1) et toute classe de cohomologie de $\mathfrak{b}$ contient donc un cocycle dans la sous-algèbre $J^*(\mathfrak{b})$ de ses cochaînes invariantes. Soit $\gamma$ l'isomorphisme de $H^*(\mathfrak{b})\otimes L^*$ sur $U = J^*(\mathfrak{b})\otimes L^*\subset C^*(\mathfrak{b})\otimes N^*$ qui transforme un élément $\mathbf{b}\otimes c\in H^*(\mathfrak{b})\otimes L^*$ en le produit tensoriel $b\otimes c$ de $c$ par le cocycle invariant $b$ de la classe $\mathbf{b}$. L'expression (15.9) des $\Theta^*(y)$ montre que les éléments de U sont invariants. Ce sont des cocycles car $\delta.J^*(\mathfrak{b}) = \{0\}$ et par conséquent $\Delta_0.U = \Delta.U = \{0\}$, d'après (15.11) et (15.12). Soit

$$\alpha_1 : H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^* \to E_1,$$

l'homomorphisme qui transforme tout élément de $H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^*$ en la classe de cohomologie de son image par $\gamma$. C'est un *isomorphisme*. En effet, si $a_1 \in H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^*$ et si $\alpha_1.a_1 = 0$, c'est que le cocycle invariant $\gamma.a_1$ est cohomologue à zéro. D'après (15.15), $\gamma.a_1$ est donc dans

$$\Delta_0.J = \Delta.J \subset (\delta.C^*(\mathfrak{b})) \otimes N^*.$$

Or

$$J^*(\mathfrak{b}) \cap (\delta.C^*(\mathfrak{b})) = \{0\};$$

par conséquent $\gamma.a_1 = 0$ et donc $a_1 = 0$. On montrera que $\alpha_1$ applique $H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^*$ *sur* $E_0$ en prouvant que toute classe de cohomologie de $E_0$ contient un cocycle invariant dans U. Puisque $\mathfrak{b}$ est réductive, l'espace $C^*(\mathfrak{b})$ est somme directe de $J^*(\mathfrak{b})$ et du sous-espace $T^*(\mathfrak{b})$ engendré par $\theta^*(y).C^*(\mathfrak{b})$ lorsque $y$ parcourt $\mathfrak{b}$ (lemme 9.1). Donc $E_0$ est somme directe des sous-espaces $J^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$ et $T^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$. La relation (15.9) montre que ces sous-espaces sont stables par les endomorphismes $\Theta^*(y)$; par conséquent, J est somme directe de $V = J \cap (T^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*)$ et de $J \cap (J^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*)$ qui, d'après (15.9), n'est autre que U. Soit donc $e_1$ une classe de cohomologie de $E_0$; elle contient, d'après (15.14), un cocycle invariant $e$.

Soit $e'$ la composante de $e$ dans V. On a $\Delta_0.e' = 0$ car $\Delta_0.U = \{0\}$. On montrera donc que la classe $e_1$ contient la composante de $e$ dans U en prouvant que

(15.16) *tout zéro de $\Delta_0$ dans V est dans $\Delta_0.J$.*

En effet, si $e' \in V$ et si $\Delta_0.e' = 0$, alors $\Delta.e' = 0$ d'après (15.12). Mais tout cocycle de $\mathfrak{b}$ dans $T^*(\mathfrak{b})$ est dans $\delta.C^*(\mathfrak{b})$, car $\mathfrak{b}$ est réductive; on a donc $e' \in \Delta.E_0$. Or, il résulte des relations (15.11) et (15.9) que J et T sont stables par $\Delta$. On a donc

$$e' \in \Delta.J = \Delta_0.J.$$

On notera que l'image par $\alpha_1$ d'un élément de $H^p(\mathfrak{b}) \otimes L^q$ est la classe de cohomologie d'un cocycle dans $C^p(\mathfrak{b}) \otimes N^q = E_0^{p,q}$; elle est donc dans $E_1^{p,q}$. On a ainsi démontré le

THÉORÈME (15.2). — *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$, il existe un isomorphisme naturel de l'algèbre $H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^*$ sur l'algèbre $E_1$ compatible avec leurs structures graduées.*

On étudiera maintenant la structure différentielle de $E_1$ en identifiant cette algèbre à $H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^*$ au moyen de l'isomorphisme $\alpha_1$. Soit $b$ le cocycle invariant d'une classe $\mathbf{b} \in H^p(\mathfrak{b})$. Puisque $\mathfrak{b}$ est supposée réductive dans $\mathfrak{a}$, il existe une $p$-cochaîne $a(b)$ de $\mathfrak{a}$ invariante par $\mathfrak{b}$ et telle que ${}^t\varphi.a(b) = b$. Quelle que soit la cochaîne $c \in L^q$, l'élément $e_1 = \mathbf{b} \otimes c$ est la classe de cohomologie du cocycle $\dot{e} = b \otimes c = \eta_0^q.(a(b) \wedge c) \in E_0^{p,q}$. On a donc

$$e_1 = \eta_1^q.(a(b) \wedge c)$$

et $\Delta_1.e_1 = \eta_1^{q+1}\delta.(a(b) \wedge c)$ est alors la classe de cohomologie du cocycle $e' \doteq \eta_0^{q+1}\delta.(a(b) \wedge c) \in E_0^{p,q+1}$.

En supposant $\mathbf{b} = \mathrm{I}$ (et donc $p = 0$), on obtient

$$e' = \eta_0^{q+1}\delta.c = \mathrm{I} \otimes (\delta.c)$$

et par conséquent

$$\Delta_1.(\mathrm{I} \otimes c) = \mathrm{I} \otimes (\delta.c).$$

Si $c = \mathrm{I}$ (et donc $q = 0$), on voit que $\Delta_1.(\mathbf{b} \otimes \mathrm{I})$ est la classe de cohomologie du cocycle $e' = \eta_0^{q+1}\delta.a(b)$. Or $\delta.a(b)$ est invariante par $\mathfrak{b}$ et l'application linéaire $\beta(e')$ définie en (15.5) transforme donc, d'après (4.6), toute $p$-chaîne $v$ de $\mathfrak{b}$ en

$$\beta(e').v = \iota(\varphi.v)\delta.a(b) = \delta\iota(\overline{\varphi.v}).a(b).$$

Mais $\iota(\overline{\varphi.v}).a(b)$ est de degré 0; par conséquent $\beta(e').v = 0$, et il en est de même lorsque $v$ est de degré $\neq p$. Compte tenu de (15.6), ceci prouve que $e' = 0$ et donc que

$$\Delta_1.(\mathbf{b} \otimes \mathrm{I}) = 0.$$

Puisque $\Delta_1$ est une antidérivation de $E_1$, on a ainsi démontré que

$$\Delta_1.(\mathbf{b} \otimes c) = \Delta_1((\mathbf{b} \otimes \mathrm{I}) \smile (\mathrm{I} \otimes c)) = \mathbf{b} \otimes (\delta.c),$$

quel que soit

$$\mathbf{b} \otimes c \in H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^* = E_1.$$

Cette expression de $\Delta_1$ permet de calculer facilement le terme $E_2$. L'homomorphisme de $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ dans l'algèbre de cohomologie de $E_1$ qui transforme un élément $\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \in H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ en la classe de cohomologie du cocycle $\mathbf{b} \otimes c \in E_1$ obtenu en choisissant un cocycle $c$ dans la classe $\mathbf{c}$, est un isomorphisme de l'algèbre $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ sur l'algèbre $E_2$. Il applique chaque sous-espace $H^p(\mathfrak{b}) \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ sur $E_2^{p,q}$. Ainsi,

Théorème 15.3. — *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$, il existe un isomorphisme naturel de l'algèbre* $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ *sur l'algèbre* $E_2$ *compatible avec leurs structures graduées.*

**16. La cohomologie relative à une représentation linéaire.** — Soit $y \to \rho(y)$ une représentation linéaire d'une algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ dans un espace vectoriel F et soit $F^*$ l'espace dual de F. On prolonge à l'espace $C_1(\mathfrak{b}) + F^*$ la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{b}$ en posant

$$[x, x'] = 0 \qquad \text{(lorsque } x, x' \in F^*\text{)},$$
$$[y, x] = -{}^t\rho(y).x \qquad \text{(lorsque } y \in \mathfrak{b} \text{ et } x \in F^*\text{)}.$$

Soient $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie obtenue et $\varphi$ l'isomorphisme identique à la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$. Avec les notations des paragraphes précédents, F s'identifie à $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ et l'on a

$$(16.1) \qquad \theta^*(\varphi.y).g = \rho(y).g,$$

quels que soient $y \in \mathfrak{b}$ et $g \in N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Soit $\{E_s\}$ la suite d'algèbres différentielles définie par $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. On a vu qu'à tout élément $e \in E_0^1$ correspond une application linéaire $\beta(e)$ de l'espace des chaînes de $\mathfrak{b}$ dans $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = F$. On a montré (15.10) que si $\{y^i\}(1 \leq i \leq m)$ est une base de $\mathfrak{b}$ et si $\{g_i\}$ est la base duale de $C^1(\mathfrak{b})$, alors

$$\beta(\Delta_0.e) = \beta(e)\partial + \sum_{i=1}^{i=m} \beta(\theta^*(y^i).e)\,\iota(g^i).$$

Or, d'après (15.9), on a

$$\beta(\theta^*(y^i).e) = \theta^*(\varphi.y^i)\,\beta(e) - \beta(e)\,\theta(y^i)$$

pour chaque $y^i$ et par ailleurs, d'après (3.2),

$$\sum_{i=1}^{i=m} \theta(y^i)\,\iota(g^i) = 2\partial.$$

On obtient donc, en tenant compte de (16.1),

$$\beta(\Delta_0.e) = -\beta(e)\partial + \sum_{i=1}^{i=m} \rho(y^i)\,\beta(e)\,\iota(g_i).$$

Par conséquent, si $z^1 \wedge \ldots z^k \wedge \ldots z^p$ est une $p$-chaîne de $\mathfrak{b}$ décomposable en produit de $z^k \in \mathfrak{b}$,

$$\beta(\Delta_0.e).(z^1 \wedge \ldots z^k \wedge \ldots z^p) = -\beta(e)\partial.(z^1 \wedge \ldots z^k \wedge \ldots z^p)$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k+1}\rho(z^k)\,\beta(e).(z^1 \wedge \ldots \hat{z}^k \wedge \ldots z^p).$$

Cette expression montre que l'opérateur différentiel de l'espace des applications linéaires de $C(\mathfrak{b})$ dans F qui transforme $\beta(e)$ en $\beta(\Delta_0.e)$ définit des classes de cohomologie dont l'espace, isomorphe à $E_1^1$, n'est autre que le « *groupe de cohomologie de* $\mathfrak{b}$ *relatif à la représentation linéaire* $y \to \rho(y)$ » au sens de Chevalley et Eilenberg ([44]).

Si $\mathfrak{b}$ est semi-simple et si le corps de base est de caractéristique 0, alors $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$ et le théorème 15.2 montre que

$$E_1^1 = H^*(\mathfrak{b}) \otimes L^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}).$$

On rattache ainsi aux propriétés de $E_1$ le théorème selon lequel le groupe de cohomologie d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{b}$ relatif à une représentation

---

([44]) [5], p. 115 et theorem 24.1.

linéaire irréductible est isomorphe à $H^*(\mathfrak{b})$ ou nul suivant que cette représentation est triviale ou non.

**17. Le cas des sous-algèbres non homologues à zéro.** — *Définition.* — Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est dite *non homologue à zéro* ($\mathfrak{b} \not\sim 0$) si l'application $\tilde{\varphi} : H(\mathfrak{b}) \to H(\mathfrak{a})$ induite par l'isomorphisme identique de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$ est un *isomorphisme* ou, ce qui revient au même, si l'homomorphisme ${}^t\tilde{\varphi}$ applique $H^*(\mathfrak{a})$ *sur* $H^*(\mathfrak{b})$. Dans le cas contraire, la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est dite *homologue à zéro*.

Théorème 17.1. — *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de dimension m réductive dans $\mathfrak{a}$ il suffit que $\tilde{\varphi}.H_m(\mathfrak{b}) \neq \{0\}$ pour qu'elle soit non homologue à zéro.*

*Démonstration.* — Puisque $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$, elle est réductive (9.1) et par conséquent unimodulaire. Le sous-espace $H_m(\mathfrak{b})$ a donc pour dimension 1. L'algèbre d'homologie $H_*(\mathfrak{b})$ est définie et le sous-espace des zéros de $\tilde{\varphi}$ en est un idéal (théorème 9.4). Or tout idéal dans $H_*(\mathfrak{b})$ qui ne contient pas $H_m(\mathfrak{b})$ est l'idéal $\{0\}$. Ceci se démontre dans le cas général par un procédé analogue à celui par lequel on a établi le théorème de dualité de Poincaré pour $H^*(\mathfrak{b})$ (théorème 7.1). Lorsque l'on suppose que le corps de base est de caractéristique 0, la propriété résulte immédiatement du théorème 10.2; en effet, d'après ce théorème, $H_*(\mathfrak{b})$ est alors isomorphe à l'algèbre extérieure de ses éléments primitifs.

Ce résultat montre que, dans le cas compact, la notion de sous-algèbre non homologue à zéro correspond à la notion de sous-groupe non homologue à zéro telle qu'elle a été définie par H. Samelson ([45]). Grâce à la simplicité de la suite $\{E_s\}$ définie par une sous-algèbre $\mathfrak{b} \not\sim 0$ et réductive dans $\mathfrak{a}$, on étendra sans difficulté les théorèmes de Samelson qui concernent la cohomologie des espaces homogènes obtenus à partir d'un sous-groupe non homologue à zéro.

On remarquera tout d'abord que, d'après le théorème 13.1, si $\mathfrak{b}$ est non homologue à zéro et réductive dans $\mathfrak{a}$, alors ${}^t\bar{\pi} : H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$ est un *isomorphisme*.

Lemme 17.1. — *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre non homologue à zéro et réductive dans $\mathfrak{a}$, alors $\Delta_s = 0$ pour tout $s \geq 2$.*

*Démonstration.* — Le quotient $E_\infty^0 = \mathcal{H}^0/\mathcal{H}^1$ est isomorphe à l'image de ${}^t\tilde{\varphi}$ car $\mathcal{H}^0 = H^*(\mathfrak{a})$ et $\mathcal{H}^1$ est l'idéal des zéros de ${}^t\tilde{\varphi}$ (14.9). Si ${}^t\tilde{\varphi}.H^*(\mathfrak{a}) = H^*(\mathfrak{b})$, on voit donc que $E_\infty^0$ a même dimension que $H^*(\mathfrak{b})$; il a donc même dimension que $E_2^0$ qui, d'après le théorème 15.3 est isomorphe à $H^*(\mathfrak{b}) \otimes I$. Or, pour $s \geq 1$, $(\Delta_s.E_s) \cap E_s^0 = \{0\}$, donc $E_{s+1}^0$ est isomorphe au sous-espace des zéros de $\Delta_s$ dans $E_s^0$. Il en résulte que $\Delta_s.E_s^0 = \{0\}$ pour tout $s \geq 2$. Par récurrence, on en

([45]) *Cf.* [3], Satz VI.

déduit que $\Delta_s = 0$ pour tout $s \geqq 2$. En effet, si $\Delta_r = 0$ pour $2 \leqq r < s$, alors, compte tenu du théorème 15.3,

$$E_s = E_2 = E_s^0 \smile (\Sigma^q E_s^{0,q}).$$

Or, les relations (14.15) et (14.16) prouvent que

$$\Delta_s . E_s^{0,q} \subset E_s^{1-s, q+s} = \{ 0 \}$$

lorsque $s \geqq 2$; par conséquent, $\Delta_s = 0$ sur $E_s^0$ et sur $\sum E_s^{0,q}$. Puisque $\Delta_s$ est une antidérivation, il en résulte que $\Delta_s = 0$.

Théorème 17.2. — *Si* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre non homologue à zéro et réductive dans* $\mathfrak{a}$, *alors l'algèbre* $H^*(\mathfrak{a})$ *filtrée par les idéaux* $\mathcal{H}^q$ *a pour algèbre graduée associée l'algèbre* $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. *Chaque idéal* $\mathcal{H}^q$ *est engendré par les éléments de* ${}^t\bar{\pi} . H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \subset H^*(\mathfrak{a})$ *dont le degré est* $\geqq q$.

*Démonstration.* — D'après ce qui précède, l'algèbre $E_\infty$ qui est l'algèbre graduée associée à $H^*(\mathfrak{a})$ (lemme 14.2) est en effet identique à $E_2$ que le théorème 15.3 permet d'identifier à $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. On notera que la structure graduée de $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ qui intervient ici est celle que définissent les sous-espaces $E_\infty^q = H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Soit par ailleurs $\bar{\eta}^q$ l'application de $\mathcal{H}^q$ sur le quotient

$$\mathcal{H}^q / \mathcal{H}^{q+1} = E_\infty^q = H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}).$$

On a

$$H^*(\mathfrak{b}) \otimes I = E_\infty^0 = \bar{\eta}^0 . \mathcal{H}^0.$$

D'autre part, $I \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = E_\infty^{0,q}$ est l'image par $\bar{\eta}^q$ des éléments de degré $q$ de $\mathcal{H}^q$, lesquels sont ceux de ${}^t\bar{\pi} . H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ (14.17). Par conséquent,

$$\bar{\eta}^q . \mathcal{H}^q = H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = (H^*(\mathfrak{b}) \otimes I) \smile (I \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})) = (\bar{\eta}^0 . \mathcal{H}^0) \smile (\bar{\eta}^{q\,t}\bar{\pi} . H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}))$$

Or, si $\mathbf{a} \in \mathcal{H}^0$ et $\mathbf{a}' \in \mathcal{H}^q$, on a

$$(\bar{\eta}^0 . \mathbf{a}) \smile (\bar{\eta}^q . \mathbf{a}') = \bar{\eta}^q . (\mathbf{a} \smile \mathbf{a}')$$

car $E_\infty$ est l'algèbre graduée associée à $H^*(\mathfrak{a})$. Par conséquent, quel que soit $q$,

$$\bar{\eta}^q . \mathcal{H}^q = \bar{\eta}^q . [\mathcal{H}^0 \smile ({}^t\bar{\pi} . H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}))],$$

c'est-à-dire

(17.1) $$\mathcal{H}^q \subset \mathcal{H}^{q+1} + \mathcal{H}^0 \smile ({}^t\bar{\pi} . H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})).$$

Puisque, pour $q$ assez grand, $\mathcal{H}^q = \{ 0 \}$, il en résulte que

$$\mathcal{H}^q \subset \sum_r^{r \geq q} H^*(\mathfrak{a}) \smile ({}^t\bar{\pi} . H^r(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})).$$

Il y a égalité car ${}^t\bar{\pi} . H^r(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \subset \mathcal{H}^r$ quel que soit $r$ (14.17).

Lorsque le corps de base est de caractéristique 0, la structure très particulière de $H^*(\mathfrak{b})$ permet de démontrer, ainsi que l'a fait H. Samelson dans le cas compact [45] que l'algèbre filtrée $H^*(\mathfrak{a})$ est *isomorphe* à l'algèbre graduée associée $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

THÉORÈME 17.3. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique* o *et* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre non homologue à zéro et réductive dans* $\mathfrak{a}$. *Il existe des isomorphismes (non naturels) de l'algèbre* $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ *sur l'algèbre* $H^*(\mathfrak{a})$ *qui appliquent chaque sous-espace* $\sum_{p+q=r} H^p(\mathfrak{b}) \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ *sur* $H^r(\mathfrak{a})$.

*Démonstration.* — Puisque ${}^t\tilde{\varphi}.H^*(\mathfrak{a}) = H^*(\mathfrak{b})$, on peut définir un isomorphisme $\mu$ du sous-espace $Q^*$ des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{b})$ dans l'algèbre $H^*(\mathfrak{a})$ qui conserve les degrés et tel que ${}^t\tilde{\varphi}\mu$ soit l'automorphisme identique de $Q^*$. Or les éléments primitifs homogènes de $H^*(\mathfrak{b})$ sont de degré impair (théorème 10.1). Le lemme 10.2 montre donc que $\mu$ se prolonge en un homomorphisme de l'algèbre extérieure $\wedge(Q^*)$ dans $H^*(\mathfrak{a})$. Mais, d'après le théorème 10.2, $H^*(\mathfrak{b}) = \wedge(Q^*)$; il existe donc un homomorphisme $\mu : H^*(\mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$ qui conserve les degrés et tel que ${}^t\tilde{\varphi}\mu$ soit un endomorphisme de l'*algèbre* $H^*(\mathfrak{b})$ qui transforme en lui-même tout élément primitif. Puisque $H^*(\mathfrak{b})$ est engendrée par ces éléments primitifs (et l'unité), on voit donc que ${}^t\tilde{\varphi}\mu$ est l'automorphisme identique de $H^*(\mathfrak{b})$ c'est-à-dire que $\mu$ est un *isomorphisme de l'algèbre* $H^*(\mathfrak{b})$ *sur une sous-algèbre de* $H^*(\mathfrak{a})$ *supplémentaire de l'idéal des zéros de* ${}^t\tilde{\varphi}$.

On définit une application linéaire $\sigma : H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$ en posant

$$\sigma.(\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} = (\mu.\mathbf{b}) \smile ({}^t\tilde{\pi}.\mathbf{c})$$

pour tout élément $\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$ du produit tensoriel. Grâce à la structure multiplicative adoptée dans $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ (1.6), $\sigma$ est un homomorphisme d'algèbres. De plus,

$$\sigma.(H^p(\mathfrak{b}) \otimes H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})) \subset H^{p+q}(\mathfrak{a}),$$

car $\mu$ conserve les degrés. Puisque $\mu.H^*(\mathfrak{b})$ est un supplémentaire de $\mathcal{H}^1$, on a

$$\tilde{\eta}^0.\mathcal{H}^0 = \tilde{\eta}^0\mu.H^*(\mathfrak{b});$$

ceci permet de remanier la démonstration de l'inclusion (17.1) de manière à obtenir, pour chaque $q$,

$$\mathcal{H}^q \subset \mathcal{H}^{q+1} + (\mu.H^*(\mathfrak{b})) \smile ({}^t\tilde{\pi}.H^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})).$$

On a donc

$$\mathcal{H}^q \subset \sigma.(H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})) + \mathcal{H}^{q+1}.$$

Il en résulte que l'image de $\sigma$ coïncide avec $H^*(\mathfrak{a})$. Or $H^*(\mathfrak{a})$ a même dimension que son algèbre graduée associée; compte tenu du théorème 17.2, ceci prouve que $\sigma$ est un isomorphisme et achève la démonstration.

On remarquera que les propriétés précédentes caractérisent les sous-algèbres non homologues à zéro, dans la mesure où la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est supposée réductive dans $\mathfrak{a}$.

(17.2) *soit* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre réductive dans* $\mathfrak{a}$. *Si* $H^*(\mathfrak{a})$ *a même dimension que* $H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$; *ou, ce qui revient au même, si* $\Delta_s = 0$ *pour tout* $s \geqq 2$, *alors* $\mathfrak{b}$ *est non homologue à zéro.*

Dans les deux cas, en effet, on a $E_\infty = E_2$. La dimension de ${}^t\tilde{\varphi}.H^*(\mathfrak{a})$ qui est celle de $\mathcal{H}^0/\mathcal{H}^1 = E_\infty$ est donc égale à la dimension de $E_2^0 = H^*(\mathfrak{b}) \otimes I = H^*(\mathfrak{b})$.

Ces résultats permettent de donner des indications sur l'algèbre de cohomologie d'une algèbre de Lie sur laquelle on ne fait plus d'hypothèse de réductivité.

Théorème 17.4. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique* 0 *et soit* $\mathfrak{f}$ *son radical. L'algèbre de cohomologie* $H^*(\mathfrak{a})$ *est isomorphe au produit tensoriel de* $H^*(\mathfrak{a}/\mathfrak{f})$ *et d'une sous-algèbre de* $H^*(\mathfrak{f})$.

*Démonstration.* — On sait [théorème de Lévi ([46])] que $\mathfrak{a}$ possède une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{b}$ telle que $\mathfrak{a}$ soit somme directe des sous-espaces $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{f}$. Puisque le corps de base est de caractéristique 0, cette sous-algèbre semi-simple est *réductive dans* $\mathfrak{a}$. Il résulte par ailleurs de l'expression (3.1) de $\partial$ que l'idéal des chaînes de $\mathfrak{a}$ engendré par $\mathfrak{f}$ est stable par $\partial$. Or c'est un supplémentaire de la sous-algèbre image des chaînes de $\mathfrak{b}$ par l'isomorphisme qui prolonge l'isomorphisme identique de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$. Par conséquent $\mathfrak{b}$ est *non homologue à zéro.* Compte tenu du théorème 17.3, on a donc

$$H^*(\mathfrak{a}) \cong H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}).$$

Or $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $\mathfrak{a}/\mathfrak{f}$. On comparera $H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ et $H^*(\mathfrak{f})$ au moyen de l'homomorphisme ${}^t\zeta$ de $C^*(\mathfrak{a})$ sur $C^*(\mathfrak{f})$ qui correspond à l'isomorphisme identique de $\mathfrak{f}$ dans $\mathfrak{a}$. Cet homomorphisme applique isomorphiquement $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ sur $C^*(\mathfrak{f})$. Soit R le sous-espace des cochaînes de $\mathfrak{a}$ engendré par $\theta^*(x).C^*(\mathfrak{a})$ lorsque $x$ parcourt $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$; puisque $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$, $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ est somme directe de $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ et de $R \cap N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. De plus R est stable par $\delta$. Puisque ${}^t\zeta\delta = \delta{}^t\zeta$, on voit donc que $C^*(\mathfrak{f})$ est somme directe des sous-espaces stables par $\delta$, ${}^t\zeta.L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ et ${}^t\zeta.R$. La restriction de ${}^t\zeta$ à $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ étant un isomorphisme, ceci prouve que ${}^t\zeta$ induit un isomorphisme de $H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ sur la sous-algèbre des classes de cohomologie de $\mathfrak{f}$ qui contiennent un cocycle dans ${}^t\zeta.L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

**18. Le cas des sous-algèbres homologues à zéro.** — *Définition.* — Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les notations étant celles des paragraphes précédents, une classe de cohomologie de $\mathfrak{b}$ sera dite *transgressive* si elle contient un cocycle image par ${}^t\varphi$ d'une cochaîne $a$ de $\mathfrak{a}$ telle que $\delta.a \in N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Les classes transgressives constituent un sous-espace de $H^*(\mathfrak{b})$ qui contient visiblement les composantes homogènes de ses éléments.

On désignera par $M_1 \subset H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ l'idéal bilatère des classes de cohomologie relative qui contiennent un cocycle dans $(\partial.B^1) \cap L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Soit $\mathbf{b} \in H^*(\mathfrak{b})$ une

([46]) *Cf.* J. H. C. Whitehead, *On the decomposition of an infinitesimal group* (*Proc. of Camb. Phil. Soc.*, vol. 36, 1936, p. 229-237).

classe transgressive; les cochaînes $a$ de $\mathfrak{a}$ telles que ${}^t\varphi.a$ soit un cocycle de la classe $\mathbf{b}$ sont bien définies modulo $B^1+\delta.C^*(\mathfrak{a})$ ([47]). Par suite, $\delta.a$ est défini, modulo $\delta.B^1$ par la classe $\mathbf{b}$. Tout cocycle dans $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ étant dans $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, si le cocycle $\delta.a$ est dans $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, il appartient à une classe de cohomologie relative $\mathbf{c}(\mathbf{b})$ qui est définie, modulo $M_1$, par la classe $\mathbf{b}$. L'image canonique de $\mathbf{c}(\mathbf{b})$ dans le quotient $H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})/M_1$ ne dépend donc que de $\mathbf{b}$ et en dépend linéairement. On définit ainsi une *application linéaire* $\Psi$ *du sous-espace des éléments transgressifs de* $H^*(\mathfrak{b})$ *dans* $H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})/M_1$ ([48]). Cette application *élève le degré d'une unité* en ce sens que, si $\mathbf{b}$ est une classe transgressive de degré $p$, alors $\Psi.\mathbf{b}\in H^{p+1}(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})/M_1^{p+1}$, où $M_1^{p+1}$ désigne l'intersection $M_1 \cap H^{p+1}(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

Soit $M_0$ l'idéal des zéros de l'homomorphisme ${}^t\bar{\pi} : H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$, c'est-à-dire l'idéal des classes de cohomologie relative qui contiennent un cocycle cohomologue à zéro dans $C^*(\mathfrak{a}) = B^0$.

THÉORÈME 18.1. — *L'application* $\Psi$ *a pour image le quotient*

$$M_0/M_1 \subset H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})/M_1.$$

*Démonstration.* — L'image de $\Psi$ est dans $M_0/M_1$ car, pour toute classe transgressive $\mathbf{b}$, $\Psi.\mathbf{b}$ s'obtient par passage au quotient à partir de la classe d'un cocycle de $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ de la forme $\delta.a$, c'est-à-dire d'une classe de $M_0$. Inversement, soit un élément de $M_0/M_1$ image canonique d'une classe $\mathbf{c}\in M_0$. Il existe une cochaîne $a$ de $\mathfrak{a}$ telle que $\delta.a$ soit un cocycle de la classe $\mathbf{c}$. Puisque la composante de degré o de $\delta.a$ est nulle et que $L^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})\subset B^1$ pour tout $q > 0$, on voit que ${}^t\varphi.a$ est un *cocycle* de $\mathfrak{b}$ qui appartient à une classe transgressive dont l'image par $\Psi$ est l'image canonique de $\mathbf{c}$ dans $M_0/M_1$.

THÉORÈME 18.2. — *Les images de l'homomorphisme* ${}^t\bar{\varphi} : H^*(\mathfrak{a}) \to H^*(\mathfrak{b})$ *sont transgressives et constituent le sous-espace des zéros de* $\Psi$.

*Démonstration.* — Soient $\mathbf{a}$ une classe de cohomologie de $\mathfrak{a}$ et $a$ un cocycle dans la classe $\mathbf{a}$; ${}^t\bar{\varphi}.\mathbf{a}$ est la classe du cocycle ${}^t\varphi.a$ de $\mathfrak{b}$. Puisque $\delta.a = 0 \in N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, ceci prouve que ${}^t\bar{\varphi}.\mathbf{a}$ est transgressive et que c'est un zéro de $\Psi$. Inversement, si $\mathbf{b}\in H^*(\mathfrak{b})$ est transgressive et si c'est un zéro de $\Psi$, il existe une cochaîne $a$ de $\mathfrak{a}$ telle que ${}^t\varphi.a$ soit un cocycle de la classe $\mathbf{b}$ et que $\delta.a$ soit un cocycle de $L^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ appartenant à $\delta.B^1$. Soit $a'$ une cochaîne dans $B^1$ telle que $\delta.a' = \delta.a$. On a

$${}^t\varphi.(a-a') = {}^t\varphi.a,$$

donc $\mathbf{b}$ est l'image par ${}^t\bar{\varphi}$ de la classe de cohomologie du cocycle $a-a'$ de $\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{b}$ est $\not\sim 0$, l'application $\Psi$ est donc triviale. Les résultats partiels relatifs au cas où $\mathfrak{b}$ est homologue à zéro, auxquels aboutira ce paragraphe, reposent sur le

THÉORÈME 18.3. — *Si* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre réductive dans* $\mathfrak{a}$, *alors tout élément primitif de* $H^*(\mathfrak{b})$ *est transgressif* (*cf.* § 10).

---

([47]) On rappelle que $B^1$ est l'idéal des zéros de ${}^t\varphi$.

([48]) Cette application est essentiellement celle qui a été introduite par M. G. Hirsch sous le nom d'isomorphisme caractéristique réduit dans l'étude de la cohomologie des espaces fibrés; *cf.* [7].

*Démonstration.* — On établira ce théorème en prouvant, par récurrence sur $q$, que, si $\mathbf{b}$ est un élément primitif *de degré* $r$ de $H^*(\mathfrak{h})$ et si l'entier $q$ est $\leqq r+1$, il existe une $r$-cochaîne $a$ de $\mathfrak{a}$ telle que :

(1) $\varphi.a$ soit un cocycle de la classe $\mathbf{b}$;
(2) $\delta.a \in B^q$;
(3) $a$ soit invariante par $\mathfrak{h}$;
(4) $\iota(\varphi.v)\delta.a = 0$ pour tout cycle invariant $v$ de degré $0$ dans $C(\mathfrak{h})$.

Puisque toute $(r+1)$-cochaîne dans $B^{r+1}$ est dans $N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$, l'existence d'une cochaîne $a$ vérifiant ces conditions pour $q = r+1$ prouvera bien que $\mathbf{b}$ est transgressive.

La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ étant supposée réductive, il existe un sous-espace $F^1$ de 1-cochaînes de $\mathfrak{a}$, stable par $\mathfrak{h}$ et supplémentaire de $N^1(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$. Soit $F^*$ la sous-algèbre de $C^*(\mathfrak{a})$ engendrée par l'unité et le sous-espace $F^1$, Elle est stable par $\mathfrak{h}$ ainsi que par tout endomorphisme $\iota(u)$ associé à une chaîne $u$ de $\mathfrak{h}$ (2.10). Compte tenu de la relation (15.1), ceci montre que

(18.1) *chaque sous-espace* $F \wedge N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{h}) \subset C^*(\mathfrak{a})$ *est stable par* $\mathfrak{h}$ *ainsi que par les endomorphismes* $\iota(\varphi.v)$ *où* $v \in C(\mathfrak{h})$.

On a par ailleurs $B^q = B^{q+1} + F^* \wedge N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$ quel que soit $q$, car $F^*$ est un supplémentaire de $B^1$ et $B^q = B^{q+1} + C^*(\mathfrak{a}) \wedge N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$. La dimension de $F^* \wedge N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$ est au plus égale à celle de $C^*(\mathfrak{h}) \otimes N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$; or on a vu (théorème 15.1) que $C^*(\mathfrak{h}) \otimes N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$ est isomorphe à $B^q/B^{q+1}$. Par conséquent,

(18.2) *chaque idéal* $B^q$ *est somme directe de* $B^{q+1}$ *et de* $F^* \wedge N^q(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$.

On commencera par montrer l'existence d'une $r$-cochaîne $a$ satisfaisant aux quatre conditions précédentes pour $q=1$. D'après (18.2), ${}^t\varphi$ applique isomorphiquement $F^*$ sur $C^*(\mathfrak{h})$. Soit $a$ la $r$-cochaîne dans $F^*$ telle que ${}^t\varphi.a$ soit le cocycle *invariant* de la classe primitive $\mathbf{b}$. Les conditions (1) et (2) sont alors satisfaites. De plus

$$
{}^t\varphi\theta^*(\varphi.y).a = \theta^*(y)\,{}^t\varphi.a = \theta^*(y).b = 0,
$$

quel que soit $y \in \mathfrak{h}$. Compte tenu de la stabilité de $F^*$ par $\mathfrak{h}$ (18.1), ceci montre que la condition (3) est également satisfaite. Soient $v$ et $v'$ des cycles invariants de degré $> 0$ dans $C(\mathfrak{h})$. Puisque $\mathbf{b}$ est primitif, c'est que

$$
\langle v', \iota(v).b \rangle = \langle v \wedge v', b \rangle = 0.
$$

Or $\iota(v).b$ est un cocycle invariant, car les endomorphismes $\theta(y)$ sont des dérivations. On voit donc que, pour tout cycle invariant $v$ de degré $> 0$, le cocycle invariant $\iota(v).b$ est orthogonal à tous les cycles de degré $> 0$ de $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est réductive, ceci prouve que $\iota(v).b \in C^0(\mathfrak{h})$. Par suite,

$$
{}^t\varphi\,\iota(\varphi.v).a = \iota(v)\,{}^t\varphi.a \in C^0(\mathfrak{h}),
$$

c'est-à-dire que $\iota(\varphi.v).a \in C^0(\mathfrak{a}) + B^1$. Compte tenu de (18.1), il en résulte que

$\iota(\varphi.v).a \in C^0(\mathfrak{a})$. D'après (4.6), l'endomorphisme $\iota(\varphi.\bar{v})\partial + \partial\iota(\varphi.v)$ est nul sur la sous-algèbre des cochaînes de $\mathfrak{a}$ invariantes par $\mathfrak{b}$; on voit donc que

$$\iota(\varphi.\bar{v})\delta.a \in \delta.C^0(\mathfrak{a}) = \{0\},$$

c'est-à-dire que la condition (4) est satisfaite.

On supposera maintenant déterminée une $r$-cochaîne $a$ satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) et (4) pour $q = k$, l'entier $k$ étant tel que $0 < k < r+1$, et l'on montrera que l'on peut en déduire une $r$-cochaîne satisfaisant aux mêmes conditions pour $q = k+1$. La cochaîne $\delta.a$ est un $(r+1)$-cocycle dans $B^k$ (2). En posant

$$e = \eta_0^k\, \delta.a \in E_0^{r-k+1,k},$$

on a

$$\Delta_0.e = \Delta_0 \eta_0^k\, \delta.a = \eta_0^k\, \delta\delta.a = 0$$

et

$$\theta^*(y).e = \theta^*(y)\,\eta_0^k\, \delta.a = \eta_0^k\, \theta^*(\varphi.y)\,\delta.a = \eta_0^k\,\delta\theta^*(\varphi.y).a = 0$$

quel que soit $y \in \mathfrak{b}$ (3). Ainsi $e$ est un *cocycle invariant* de $E_0$.

La stabilité des idéaux $B^q$ vis-à-vis des endomorphismes $\iota(\varphi.v)$ (15.2) permet de définir, pour chaque chaîne $v$ de $\mathfrak{b}$, un endomorphisme linéaire $I(v)$ de $E_0$ en posant

(18.3) $$I(v)\eta_0^q = \eta_0^q\,\iota(\varphi.v)$$

sur chaque idéal $B^q$. Compte tenu de (15.1), on voit que l'isomorphisme $\alpha : C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^* \rightarrow E_0$ défini par (15.4) vérifie la relation

$$\alpha.((\iota(v).b)\otimes c) = I(v)\alpha.(bc),$$

quels que soient $v \in C(\mathfrak{b})$ et $b \otimes c \in C^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$ ([49]). En identifiant $E_0$ avec $C^*(\mathfrak{b}) \otimes N$ au moyen de $\alpha$, on a donc

(18.4) $$I(v).(b\otimes c) = (\iota(v).b)\otimes c.$$

Soit X l'idéal (bilatère) de $C(\mathfrak{b})$ engendré par les cycles invariants de degré $> 0$; le lemme 4.1 montre que cet idéal est stable par $\partial$ et donc par les dérivations $\theta(y) = \varepsilon(y)\partial + \partial\varepsilon(y)$. Soit X' le sous-espace de $C^*(\mathfrak{b})$ orthogonal à X. La relation (18.4) prouve que $X' \otimes N$ *est le sous-espace des zéros communs aux* $I(v)$ *lorsque* $v$ *parcourt le sous-espace des cycles invariants de degré* $> 0$ de $\mathfrak{b}$. Par conséquent la condition (4) se traduit par l'inclusion $e \in X' \otimes N^*$.

Puisque l'on suppose $k < r+1$, X contient tous les cycles invariants de degré $r-k+1$; les éléments de degré $r-k+1$ de X' sont donc dans le sous-espace $T^*(\mathfrak{b})$ engendré par $\theta^*(y).C^*(\mathfrak{b})$ lorsque $y$ parcourt $\mathfrak{b}$. Du fait que $e \in E_0^{r-k+1,k}$, on a donc $e \in T^*(\mathfrak{b}) \otimes N^*$. Or on a montré (15.16) que tout cocycle invariant dans $T^*(\mathfrak{b}) \otimes N^* \subset E_0$ est dans $\Delta_0.J$, où J désigne la sous-algèbre des éléments invariants de $E_0$. Par conséquent $e \in \Delta_0.J$. On démontrera plus loin le

---

([49]) On pose comme plus haut $N^* = N^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$.

LEMME 18.1. — *Soient* $\mathfrak{b}$ *une algèbre de Lie réductive et* $X \subset C(\mathfrak{b})$ *un idéal de chaînes de* $\mathfrak{b}$ *stable par* $\partial$ *et somme directe des intersections* $X_p = X \cap C_p(\mathfrak{b})$. *Il existe un supplémentaire* Y *de* X *dans* $C(\mathfrak{b})$ *stable par* $\partial$ *ainsi que par les dérivations* $\theta(y)$ $(y \in \mathfrak{b})$.

Soit $Y'$ le sous-espace orthogonal au supplémentaire de X dont ce lemme affirme l'existence; l'espace $E_0$ est somme directe des sous-espaces $X' \otimes N^*$ et $Y' \otimes N^*$. De la stabilité de X et Y par $\partial$ résulte la stabilité de $X'$ et $Y'$ par $\delta$ et donc la stabilité de $X' \otimes N^*$ et $Y' \otimes N^*$ par l'opérateur $\Delta$ défini en (15.11). La relation (15.9) montre de même que la stabilité de X et Y par $\theta(y)$ se traduit par la stabilité de $X' \otimes N^*$ et $Y' \otimes N^*$ par $\Theta^*(y)$ pour tout $y \in \mathfrak{b}$. Il en résulte que J est somme directe de $J \cap (X' \otimes N^*)$ et de $J \cap (Y' \otimes N^*)$. Puisque $\Delta = \Delta_0$ sur J (15.12) et que $e \in (X' \otimes N^*) \cap J$, on voit donc que $e \in \Delta_0 . (J \cap (X' \otimes N)^*)$. Du fait que $e \in E_0^{r-k+1,k}$, on peut choisir un $e' \in E_0^{r-k,k} \cap J \cap (X' \otimes N^*)$ tel que $\Delta_0 . e' = e$. Compte tenu de (18.2), il existe une $r$-cochaîne $a'$ dans $F^* \wedge N^k$ telle que $\eta_0^k . a' = e'$. *La* $r$*-cochaîne* $a - a'$ *vérifie les conditions* (1), (2) (3) *et* (4) *pour* $q = k + 1$. En effet,

(1) on a $k > 0$, donc ${}^t\varphi.(a - a') = {}^t\varphi.a$ est dans la classe de cohomologie primitive $\mathbf{b}$ :

(2) on a

$$\eta_0^k \, \delta.(a - a') = e - \Delta_0.e' = 0,$$

donc $\delta.(a - a') \in B^{k+1}$;

(3) on a

$$\eta_0^k \, \theta^*(\varphi.y).a' = \Theta^*(y).e' = 0,$$

car $e' \in J$. D'après (18.1) ceci prouve que $a'$, et par suite $a - a'$, sont invariantes par $\mathfrak{b}$.

(4) pour tout cycle invariant $v$ de degré $> 0$ dans $C(\mathfrak{b})$, on a, d'après (18.3),

$$\eta_0^k \, \iota(\varphi, v).a' = I(v).e' = 0$$

car $e' \in X' \otimes N$. D'après (18.1), ceci prouve que $\iota(\varphi.v).a' = 0$. Compte tenu du lemme 4.2, on a donc bien

$$\iota(\varphi.v)\,\delta.(a - a') = \iota(\varphi.v)\,\delta.a' = \delta\iota(\varphi.\bar{v}).a' = 0$$

pour tout cycle invariant $v$ de degré $> 0$. Le théorème 18.3 découlera donc de la

*Démonstration du lemme* 18.1. — On prouvera l'existence dans chaque sous-espace $C_p(\mathfrak{b})$ d'un sous-espace $Y_p$ supplémentaire de $X_p$ tel que $\partial . Y_p \subset Y_{p-1}$ et $\theta(x).Y_p$ pour tout $y \in \mathfrak{b}$. On procède par récurrence en supposant obtenus de tels sous-espaces $Y_p$ pour les valeurs de $p < s$ (la détermination de $Y_0$ est triviale). Puisque l'idéal X est stable par $\partial$, il est stable par toutes les dérivations $\theta(y) = \varepsilon(y)\,\partial + \partial\varepsilon(y)$. Soit $\bar{Y}_s$ le sous-espace des $v \in C_s(\mathfrak{b})$ tels que $\partial . v \in Y_{s-1}$; il est stable par $\mathfrak{b}$. Puisque $\mathfrak{b}$ est réductive, le sous-espace $X_s + \bar{Y}_s$ possède un supplémentaire $K_s$ dans $C_s(\mathfrak{b})$ stable par $\mathfrak{b}$. Soit $u$ une chaîne dans $K_s$; $C_{s-1}(\mathfrak{b})$ étant somme directe de $X_{s-1}$ et de $Y_{s-1}$, $\partial.u$ est somme d'une chaîne $w \in X_{s-1}$ et d'une chaîne $w' \in Y_{s-1}$. On a $\partial.w = 0$, car

$$\partial\partial.u = 0 \qquad \text{et} \qquad (\partial.X_{s-1}) \cap (\partial.Y_{s-1}) \subset X_{s-2} \cap Y_{s-2} = \{0\}.$$

Par suite

$$\theta(y).w = \partial\varepsilon(y).w + \varepsilon(y)\partial.w = \partial\varepsilon(y).w \in X_s,$$

quel que soit $y \in \mathfrak{b}$, il en résulte que

$$\partial\theta(y).u = \theta(y)\partial.u = \theta(y).w + \theta(y).w' \in \partial.X_s + Y_{s-1}.$$

Or $Y_s$ contient tous les $s$-cycles; on a donc

$$\theta(y).K_s \subset X_s + \overline{Y}_s$$

pour tout $y \in \mathfrak{b}$. Puisque $K_s$ est stable par $\mathfrak{b}$, ceci prouve que les éléments de $K_s$ sont des chaînes invariantes; ce sont donc des cycles puisque $\mathfrak{b}$ qui est réductive est, *a fortiori*, unimodulaire (théorème 6.1). Il en résulte que

$$K_s \subset K_s \cap \overline{Y}_s = \{0\}.$$

Soit $Y_s$ un supplémentaire de $X_s \cap \overline{Y}_s$ dans $\overline{Y}_s$ stable par $\mathfrak{b}$; c'est un supplémentaire de $X_s$ dans $C_s(\mathfrak{b})$ pour lequel $\partial.Y_s \subset Y_{s-1}$.

Les théorèmes 18.1, 18.2 et 18.3 montrent que, si $H^*(\mathfrak{b})$ possède des éléments primitifs de degré $p$ étrangers à l'image de ${}^t\varphi$, alors $H^{p+1}(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}) \neq \{0\}$. On en déduira, en fait, des résultats beaucoup plus précis, car, dans les cas importants, les éléments de $M_0/M_1$ correspondent à des générateurs de l'algèbre $H^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$.

On pose $M_0^p = H^p(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}) \cap M_0$ et l'on désigne par $S^p$ le sous-espace des éléments de $H^p(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$ qui appartiennent à la sous-algèbre engendrée par les éléments de $H^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$ de degré inférieur à $p$.

Lemme 18.2. — *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre dans une algèbre réductive $\mathfrak{a}$ et si le corps de base est de caractéristique* 0, *alors*

$$S^p \cap M_0 \subset M_1, \tag{18.5}$$

*quel que soit $p$.*

*Démonstration.* — Soient $c$ un cocycle de degré $> 0$ dans $L^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$ et $c'$ un cocycle dans $L^*(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b})$ cohomologue à zéro. Si $a$ est une cochaîne de $\mathfrak{a}$ telle que $\delta.a = c'$, on a

$$c \wedge c' = c \wedge (\delta.a) = \delta.(\bar{c} \wedge a).$$

Or $c \in B^1$, car $L^q(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}) \subset B^1$ pour $q > 0$. Par suite, $c \wedge c' \in \delta.B^1$. Ceci prouve que

$$H^q(\mathfrak{a};\, \mathfrak{b}) \cap M_0 \subset M_1 \tag{18.6}$$

pour tout $q > 0$.

On sait d'autre part (théorème 13.2) que l'image de ${}^t\pi$ dans $H^*(\mathfrak{a})$ est engendrée par l'unité et un sous espace d'éléments primitifs; c'est donc une algèbre extérieure (théorème 10.3). Par un raisonnement identique au raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème 17.3, on en déduit qu'il existe une sous-algèbre G supplémentaire de l'idéal $M_0$ dans $H(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. Soit $G^+$ le sous-espace engendré par les éléments de degré $> 0$ dans G. On a

$$S^p \subset (G^+ + M_0) \smile (G^+ + M_0) = G \smile G^+ + G^+ \smile M_0 + M_0 \smile M_0.$$

Or l'idéal $M_0$ est engendré par des éléments de degré $> 0$; compte tenu de (18.6), on a donc

$$M_0 \smile M_0 \subset M_1 \qquad \text{et} \qquad G^+ \smile M_0 \subset M_1.$$

Puisque G est une sous-algèbre, on a par ailleurs $G \smile G^+ \subset G^+$, ce qui prouve bien que $S^p \cap M_0 \subset M_1$.

Toute base minimale de générateurs homogènes de l'algèbre $H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ comporte des éléments de degré $p$ en nombre égal à la dimension de $H^p(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) / S^p$. Il existe même des bases minimales adaptées à l'idéal des zéros de ${}^t\tilde{\pi}$ qui contiennent dans chaque sous-espace $M_0^p$ un nombre d'éléments égal à la dimension de $M_0^p / (S^p \cap M_0)$. D'après (18.5), la dimension de $M_0^p / (S^p \cap M_0)$ est au moins égale à celle de $M_0^p / M_1^p$ qui est l'image par $\Psi$ des classes transgressives de degré $p - 1$ de $H^*(\mathfrak{b})$ (théorème 18.1). Si l'on suppose de plus que la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est réductive, le théorème 18.3 montre que la dimension de $M_0^p / M_1^p$ est au moins égale au nombre des éléments primitifs de degré $p - 1$ de $H^*(\mathfrak{b})$ linéairement indépendants modulo ${}^t\tilde{\varphi} . H^*(\mathfrak{a})$. On a ainsi démontré le

Théorème 18.4. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie réductive sur un corps de caractéristique* 0 *et soit* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre réductive dans* $\mathfrak{a}$. *S'il existe* $l$ *éléments primitifs de degré* $p - 1$ *dans* $H^*(\mathfrak{b})$ *linéairement indépendants modulo* ${}^t\tilde{\varphi} . H^*(\mathfrak{a})$, *alors toute base minimale de générateurs homogènes de l'algèbre* $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *contient au moins* $l$ *éléments de degré* $p$ *qui peuvent être choisis dans l'idéal des zéros de* ${}^t\tilde{\pi} : H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$.

Avec les hypothèses de ce théorème, l'image de ${}^t\tilde{\varphi}$ est engendrée par l'unité et des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{b})$. De plus, tous les éléments primitifs homogènes de $H^*(\mathfrak{b})$ sont de degré impair (théorème 10.1). On voit donc que *si la sous-algèbre* $\mathfrak{b}$ *est homologue à zéro, toute base de générateurs homogènes de* $H^*(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ *contient des éléments de degré pair*.

*Le théorème* 18.4 *est toujours applicable dans le cas compact*, en vertu du théorème 9.1. Les théorèmes de H. Samelson concernant les groupes transitifs sur les sphères de dimension paire en sont un cas particulier. On en trouvera d'autres illustrations notamment dans les travaux de M. Ehresmann [polynômes de Poincaré de certains espaces homogènes symétriques ([50])] de M. Stiefel ([51]) et de M. Leray [cohomologie des espaces homogènes définis par des sous-groupes abéliens maxima ([52])].

---

([50]) Cf. *Sur la topologie de certains espaces homogènes* (*Annals of Math.*, vol. 35, 1934, p. 394-443).

([51]) Cf. *Richtungfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten* (*Comm. Math. Helv.*, t., 8, 1936, p. 3-51).

([52]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1946, p. 413-415.

On montrera, pour terminer, que le théorème 18.3 permet de préciser, dans une certaine mesure, la suite $\{E_s\}$ attachée à une sous-algèbre réductive.

Soit $e$ un élément de $E_s^{p,0}$, donc de la forme $\eta_s^0 . a$, où $a$ désigne une $p$-cochaîne de $\mathfrak{a}$ dans $Z_s^0$. Si $s \geqq 1$, alors ${}^t\varphi . a$ est un cocycle de $\mathfrak{b}$ dont la classe de cohomologie ne dépend pas du choix de $a$. Si le cocycle ${}^t\varphi . a$ était cohomologue à zéro, on aurait

$$a \in (\delta . B^0 + B^1) \cap Z_s^0 \subset Z_{s-1}^1 + D_{s-1}^0$$

et par suite $e \doteq 0$. On définit ainsi, pour tout $s \geqq 1$, un isomorphisme

$$ {}^t\varphi_s : E_s^0 \rightarrow H^*(\mathfrak{b})$$

qui est visiblement compatible avec les structures d'algèbres graduées de ces espaces. De l'inclusion $Z_s^0 \subset Z_{s+1}^0$ résulte que ${}^t\varphi_s . E_s^0 \supset {}^t\varphi_{s+1} . E_{s+1}^0$. Compte tenu des théorèmes 15.1 et 15.2, on a

$$ {}^t\varphi_1 . E_1^0 = {}^t\varphi_2 . E_2^0 = H^*(\mathfrak{b}).$$

Par ailleurs, les images de ${}^t\varphi_\infty$ sont les classes de cohomologie des images par ${}^t\varphi$ des *cocycles* de $\mathfrak{a}$; on a donc

$$ {}^t\varphi_\infty . E_\infty^0 = {}^t\bar{\varphi} . H^*(\mathfrak{a}).$$

On obtient ainsi une suite de sous-algèbres emboîtées

$$H^*(\mathfrak{b}) = {}^t\varphi_1 . E_1^0 = {}^t\varphi_2 . E_2^0 \supset \ldots \supset {}^t\varphi_s . E_s^0 \supset {}^t\varphi_{s+1} . E_{s+1}^0 \supset \ldots \supset {}^t\bar{\varphi} . H^*(\mathfrak{a})$$

dont la connaissance équivaut à celle des $E_s^0$.

Lemme 18.3. — *Si le corps de base est de caractéristique* 0 *et si la sous-algèbre* $\mathfrak{b}$ *est réductive dans* $\mathfrak{a}$, *alors chaque sous-algèbre* ${}^t\varphi_s . E_s^0$ *est engendrée par l'unité et des éléments primitifs de* $H^*(\mathfrak{b})$.

*Démonstration.* — Soit $\mathbf{b}$ une classe de cohomologie dans ${}^t\varphi_s . E_s^0$ ; il existe une cochaîne $a \in Z_s^0$ telle que $\eta_s^0 . a$ soit dans la classe $\mathbf{b}$. Du fait que $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$ résulte que l'on peut choisir pour $a$ une cochaîne invariante par $\mathfrak{b}$. D'après le lemme 4.2, on a alors

$$\delta\iota(\varphi . v) . a = \iota(\varphi . \bar{v})\, \delta . a \in \iota(\varphi . \bar{v}) . B^s \subset B^s$$

pour tout cycle invariant $v$ de $\mathfrak{b}$. Par suite $\iota(\varphi . v) . a \in Z_s^0$ et $\iota(v) {}^t\varphi . a = {}^t\varphi\,\iota(\varphi . v) . a$ est donc encore un cocycle dans une classe de ${}^t\varphi_s . E_s^0$. Compte tenu du lemme 2.2, cette stabilité de la sous-algèbre ${}^t\varphi_s . E_s^0$ vis-à-vis des endomorphismes de $H^*(\mathfrak{b})$ induits par $\iota(v)$ lorsque $v$ parcourt la sous-algèbre des cycles invariants prouve que ${}^t\varphi_s . E_s^0$ est engendrée par l'unité et des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{b})$.

Toute classe primitive de degré $\geqq p$ dans $H^*(\mathfrak{b})$ est dans ${}^t\varphi_{p+1} . E_{p+1}^0$ car, d'après le théorème 18.3, elle est transgressive, ce qui signifie qu'elle contient un cocycle dans ${}^t\varphi . Z_{p+1}^0$. D'autre part, si une classe primitive $\mathbf{b}$ de degré $q < p$ est dans ${}^t\varphi_{p+1} . E_{p+1}^0$, c'est qu'elle contient l'image par ${}^t\varphi$ d'une $q$-cochaîne $a \in Z_{p+1}^0$ ;

mais puisque $q+1<p+1$, la $q+1$ cochaîne $\delta.a$ qui est dans $B^{p+1}$ est nécessairement nulle et par conséquent $\mathfrak{b} \in {}^t\tilde{\varphi}.H^*(\mathfrak{a})$. Ceci prouve le

THÉORÈME 18.5. — *Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$ et si le corps de base est de caractéristique* o, *chaque sous-algèbre ${}^t\varphi_s.E_s^0 \subset H^*(\mathfrak{b})$ est engendrée par l'unité et les éléments primitifs dont les composantes de degré $< s-1$ appartiennent à ${}^t\tilde{\varphi}.H^*(\mathfrak{a})$.*

Ce théorème montre que, *si* $H^*(\mathfrak{b})$ *possède des éléments primitifs de degré $p$ étrangers à l'image de* $H^*(\mathfrak{a})$, *alors* $E_{p+1}^0 \neq E_{p+2}^0$ *et par suite*,

$$\Delta_{p+1}.E_{p+1} \neq \{0\}.$$

Par ailleurs, les classes transgressives de degré $p$ dans $H^*(\mathfrak{b})$ sont les éléments de

$$H^p(\mathfrak{b}) \cap ({}^t\varphi_{p+1}.E_{p+1}^0) = {}^t\varphi_{p+1}.E_{p+1}^{p,0}.$$

Avec les hypothèses du théorème 18.5, on en déduit que *toute classe transgressive de* $H^*(\mathfrak{b})$ *est somme d'un élément primitif et d'un élément de* ${}^t\tilde{\varphi}.H^*(\mathfrak{a})$. L'application linéaire $\Psi$ peut d'autre part s'obtenir en prenant les restrictions de chaque opérateur différentiel $\Delta_s$ au sous-espace $E_s^{s-1,0}$.

(Thèse soutenue le 10 juin 1949.)