BULLETIN DE LA S. M. F.

LEMONNIER.

Sur des fonctions analogues à celles de Sturm

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 149-156

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__149_1>

Sur des fonctions analogues à celles de Sturm;
par M. LEMONNIER.

(Séance du 13 février 1878.)

Soient $F(x), f(x)$ deux fonctions entières de x; a et b deux indéterminées ou deux nombres pris à volonté, qui toutefois n'annulent pas $f(x)$.

Si l'on pose

$$F(x) = f(x)(\lambda x + \mu) - (x-a)(x-b) f_1(x),$$

la fonction $f_1(x)$ est entière, quand λ et μ se déterminent par les deux conditions

$$F(a) = f(a)(\lambda a + \mu),$$
$$F(b) = f(b)(\lambda b + \mu).$$

Par l'élimination de λ et de μ, en faisant

$$(x-a)(x-b) f_1(x) = u,$$

il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} u + F(x) & xf(x) & f(x) \\ F(a) & af(a) & f(a) \\ F(b) & bf(b) & f(b) \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$u(a-b)f(a)f(b) + \begin{vmatrix} F(x) & xf(x) & f(x) \\ F(a) & af(a) & f(a) \\ F(b) & bf(b) & f(b) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{gathered} u(a-b)f(a)f(b) + (a-b)f(a)f(b)F(x) \\ -(x-b)F(a)f(b)f(x) + (x-a)F(b)f(a)f(x) = 0, \end{gathered}$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= (x-a)(x-b)f_1(x) \\ &= -F(x) + f(x)\left[\frac{F(a)}{f(a)}\,\frac{x-b}{a-b} + \frac{F(b)}{f(b)}\,\frac{x-a}{b-a}\right], \end{aligned} \right.$$

a et b supposés différents.

Si les coefficients sont réels dans $F(x)$ et $f(x)$, qu'on prenne

$$a = \alpha + \beta i, \quad b = \alpha - \beta i,$$

en faisant

$$F(\alpha + \beta i) = P + Q i, \quad f(\alpha + \beta i) = p + q i,$$

on obtient

$$\frac{F(a)}{f(a)}\,\frac{x-b}{a-b} + \frac{F(b)}{f(b)}\,\frac{x-a}{b-a} = \frac{\beta(Pp+Qq)-(x-\alpha)(Pq-Qp)}{\beta(p^2+q^2)},$$

et par suite

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(p^2+q^2)[(x-\alpha)^2+\beta^2]f_1(x)\\ &\quad = -(p^2+q^2)F(x) + f(x)\left[Pp+Qq-(x-\alpha)\frac{Pq-Qp}{\beta}\right]. \end{aligned}\right.$$

C'est, en particulier, pour $\alpha + \beta i = i$,

$$(2)'\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+1)(p^2+q^2)f_1(x)\\ &\quad = -(p^2+q^2)F(x) + f(x)[Pp+Qq-x(Pq-Qp)], \end{aligned}\right.$$

avec

$$P = F_1(-1), \quad Q = F_2(-1), \quad p = f_1(-1), \quad q = f_2(-1),$$

si l'on a

$$F(x) = F_1(x^2) + x F_2(x^2), \quad f(x) = f_1(x^2) + x f_2(x^2).$$

En prenant $a = b$, et posant ainsi

$$F(x) = f(x)(\lambda x + \mu) - (x-a)^2 f_1(x),$$

la fonction $f_1(x)$ sera également entière, quand λ et μ seront donnés par

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a)(\lambda a + \mu),\\ F'(a) &= \lambda[f(a) + a f'(a)] + \mu f'(a); \end{aligned}$$

d'où résulte, en faisant $u = (x-a)^2 f_1(x)$,

$$\begin{vmatrix} u + F(x) & x f(x) & f(x) \\ F(a) & a f(a) & f(a) \\ F'(a) & f(a) + a f'(a) & f'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

par suite

$$\begin{vmatrix} u+F(x) & (x-a)f(x) & f(x) \\ F(a) & 0 & f(a) \\ F'(a) & f(a) & f'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u\overline{f(a)}^2 &= -F(x)\overline{f(a)}^2 \\ &\quad + f(x)\{F(a)f(a) - (x-a)[F(a)f'(a) - F'(a)f(a)]\} \\ &= (x-a)^2\overline{f(a)}^2 f_1(x) = \ldots . \end{aligned} \right.$$

De là

$$(3)' \quad \left\{ \begin{aligned} x^2\overline{f(0)}^2 f_1(x) &= -F(x)\overline{f(0)}^2 \\ &\quad + f(x)\{F(0)f(0) - x[F(0)f'(0) - F'(0)f(0)]\}, \end{aligned} \right.$$

pourvu que $f(0)$ soit différent de zéro.

D'après les formules (2) et (3), si l'on pose

$$(p^2+q^2)F(x) = f(x)(\lambda x + \mu) - [(x-\alpha)^2 - \beta^2]f_1(x)$$

et

$$\overline{f(a)}^2 F(x) = f(x)(\lambda x + \mu) - (x-a)^2 f_1(x),$$

on a

$$(3)'' \quad \left\{ \begin{aligned} [(x-\alpha)^2+\beta^2]f_1(x) &= -(p^2+q^2)F(x) + f(x)\left[Pp + Qq - (x-\alpha)\frac{Pq-Qp}{\beta}\right], \\ (x-a)^2 f_1(x) &= -[f(a)]^2 F(x) \\ &\quad + f(x)\{F(a)f(a) - (x-a)[F(a)f'(a) - F'(a)f(a)]\}. \end{aligned} \right.$$

Il est à remarquer que la formule (3), quand on fait tendre le module de a vers l'infini, donne un résultat qui revient au reste, changé de signe, que donne la division de $F(x)$ par $f(x)$, au cas de

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots, \\ f(x) &= Bx^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots . \end{aligned}$$

En effet, on a pour lors

$$\begin{aligned} (x-a)^2 f_1(x) &= -F(x) + f(x)\left[-x\frac{F(a)f'(a) - F'(a)f(a)}{\overline{f(a)}^2} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{F(a)f(a) + aF(a)f'(a) - aF'(a)f(a)}{\overline{f(a)}^2}\right] \\ &= -F(x) + f(x)\left[-x\frac{-ABa^{2m-2}+\ldots}{B^2a^{2m-2}+\ldots} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(A_1B - AB_1)a^{2m-2}+\ldots}{B^2a^{2m-2}+\ldots}\right]. \end{aligned}$$

7/10

Dans cette égalité, le second membre, quand le module de a tend vers ∞, a pour limite

$$-F(x)+f(x)\left(\frac{A}{B}x+\frac{A_1B-AB_1}{B^2}\right),$$

ce qui est le reste, changé de signe, de la division de $F(x)$ par $f(x)$.

En désignant ce résultat par V_1, on a ainsi

$$f_1(x)=\frac{V_1a^{2m-2}+\dots}{(a^{2m-2}+\dots)(x-a)^2}=\frac{1}{a^2}\,\frac{V_1a^{2m-2}+\dots}{(a^{2m-2}+\dots)\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)},$$

par où l'on voit que $a^2f_1(x)$ a pour limite V_1. Le procédé de la division répond en conséquence à l'hypothèse de $a=\pm\infty$.

A la place des formules qui précèdent, on peut en établir d'autres qui dépendent d'un plus grand nombre d'indéterminées, en faisant varier le nombre des indéterminées distinctes et leur degré de multiplicité.

Par exemple, en prenant

$$u=(x-a)(x-b)(x-c)f_1(x),$$

on aura

$$u\begin{vmatrix} a^2f(a) & af(a) & f(a)\\ b^2f(b) & bf(b) & f(b)\\ c^2f(c) & cf(c) & f(c)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} F(x) & x^2f(x) & xf(x) & f(x)\\ F(a) & a^2f(a) & af(a) & f(a)\\ F(b) & b^2f(b) & bf(b) & f(b)\\ F(c) & c^2f(c) & cf(c) & f(c)\end{vmatrix}=0$$

ou

$$u(a-b)(a-c)(b-c)f(a)f(b)f(c)$$
$$=\begin{vmatrix} F(x) & (x-a)^2f(x) & (x-a)f(x) & f(x)\\ F(a) & 0 & 0 & f(a)\\ F(b) & (b-a)^2f(b) & (b-a)f(b) & f(b)\\ F(c) & (c-a)^2f(c) & (c-a)f(c) & f(c)\end{vmatrix}.$$

Pour $u=(x-a)^3f_1(x)$, on aurait

$$\begin{vmatrix} u+F(a) & x^2f(x) & xf(x) & f(x)\\ F(a) & a^2f(a) & af(a) & f(a)\\ F'(a) & 2af(a)+a^2f'(a) & f(a)+af'(a) & f'(a)\\ F''(a) & 2f(a)+4af'(a)+a^2f''(a) & 2f'(a)+af''(a) & f''(a)\end{vmatrix}=0,$$

d'où

$$2u\overline{f(a)}^3 = \begin{vmatrix} F(x) & (x-a)^2 f(x) & (x-a) f(x) & f(x) \\ F(a) & 0 & 0 & f(a) \\ F'(a) & 0 & f(a) & f'(a) \\ F''(a) & 2f(a) & 2f'(a) & f''(a) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} 2(x-a)^3 f_1(x)\overline{f(a)}^3 = & -2\overline{f(a)}^2 [F(x) f(a) - f(x) F(a)] \\ & - (x-a)^2 f(x) f(a) [F(a) f''(a) - f(a) F''(a)] \\ & + 2(x-a) f(x) [F(a) f'(a) - F'(a) f(a)] \\ & \times [(x-a) f'(a) - f(a)]. \end{aligned}$$

Les formules que nous avons ainsi établies peuvent servir à la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers en x, lorsque les coefficients y sont numériques, et, en s'appliquant à deux polynômes dont l'un soit la dérivée de l'autre, peuvent conduire à des séries de polynômes susceptibles de remplacer la série des fonctions de Sturm.

Reprenons, en effet, l'égalité

$$F(x) = (\lambda x + \mu) f(x) - (x-a)(x-b) f_1(x)$$

ou

$$F(x) = (\lambda x + \mu) f(x) - (x-a)^2 f_1(x).$$

Si ni a, ni b, n'annule $f(x)$, les diviseurs communs de $F(x)$ et $f(x)$ sont les mêmes que ceux de $f(x)$ et $f_1(x)$.

Lorsque $F(x)$ est du degré m, et $f(x)$ d'un degré inférieur, le degré de $f_1(x)$ est $m-2$ au plus. Quand $f(x)$ est comme $F(x)$ du degré m, le degré de $f_1(x)$ est $m-1$, et si, $f(x)$ étant du degré m, $F(x)$ est d'un degré moindre, c'est encore du degré $m-1$ que se trouve $f_1(x)$.

D'après cela, en remplaçant $F(x)$ par $f_1(x)$, puis en continuant de la même manière jusqu'à un résultat constant ou nul, soit qu'on emploie à chaque calcul d'une nouvelle fonction les mêmes nombres a et b, soit qu'on les change, on arrivera à connaître le plus grand commun diviseur.

Si au point de départ $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, ces polynômes $F(x)$, $f(x)$ et les suivants $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... constitueront une suite de polynômes jouissant des mêmes propriétés que les fonctions de Sturm à l'égard de valeurs de x situées d'un même côté des nombres a et b, à l'égard de valeurs réelles de x quelconques, si a et b sont des nombres imaginaires conjugués ou des nombres réels égaux, aucun d'eux d'ailleurs ne devant annuler $f(x)$.

Comme exemple, sous ce rapport, prenons

$$\begin{aligned} F(x) &= x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1, \\ f(x) &= 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 2x - 1. \end{aligned}$$

En usant de la formule $(3)''$, on a

$$\begin{aligned} x^2 f_1(x) &= -(x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \\ &\quad + (6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)(-1 - x) \\ &= -7x^6 - 12x^5 + 18x^3, \end{aligned}$$

d'où

$$f_1(x) = -7x^4 - 12x^3 + 8x.$$

Qu'on pose, en second lieu,

$$\begin{aligned} F(x) &= 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1, \\ f(x) &= -7x^4 - 12x^3 + 8x, \end{aligned}$$

et qu'on observe qu'on a

$$\begin{aligned} F(-1) &= -3, \quad f(-1) = -3, \\ F'(-1) &= 6, \quad f'(-1) = 0, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} (x+1)^2 f_1(x) &= -(6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)9 \\ &\quad + (-7x^4 + 12x^3 + 8x)[9 - (x+1)18], \\ \tfrac{1}{9}(x+1)^2 f_1(x) &= -\ 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \\ &\quad + (7x^4 + 12x^3 - 8x)(1 + 2x) \\ &= 8x^5 + 26x^4 + 16x^3 - 10x^2 - 10x + 1. \end{aligned}$$

De là

$$f_2(x) = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1.$$

Soit, en troisième lieu,

$$\begin{aligned} F(x) &= -7x^4 - 12x^3 + 8x, \\ f(x) &= 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} F(-1) &= -3, \quad f(-1) = 15, \\ F'(-1) &= 0, \quad f'(-1) = -8, \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$(x+1)^2 f_1(x) = (7x^4+12x^3-8x).\overline{15}^2$$
$$+(8x^3+10x^2-12x+1)[-3.15-(x+1)3.8],$$
$$\tfrac{1}{3}(x+1)^2 f_1(x) = (7x^4+12x^3-8x)75$$
$$-(8x^3+10x^2-12x+1)(8x-23)$$
$$= 461x^4+636x^3+134x^2-332x-23,$$

d'où

$$f_3(x) = 461x^2-286x-23.$$

Faisant là

$$F(x) = 8x^3+10x^2-12x+1,$$
$$f(x) = 461x^2-286x-23,$$

on a

$$F(0)=1, \qquad f(0) = -\ 23,$$
$$F'(0) = -12, \quad f'(0) = -286,$$
$$x^2 f_1(x) = -(8x^3+10x^2-12x+1)529$$
$$+(461x^2-286x-23)(-23+562x)$$
$$= 254850x^3-176625x^2,$$

de sorte que

$$f_4(x) = 254850x-176625,$$

ou mieux

$$f_4(x) = 3398x-2355;$$

puis par

$$F(x) = 461x^2-286x-23, \quad F(1)=152, \quad f(1) = 1043,$$
$$f(x) = 3398x-2355, \qquad F'(1) = 636, \quad f'(1) = 3398,$$

on obtient

$$(x-1)^2 f_1(x) = (-461x^2+286x+23)1087849$$
$$+(3398x-2355)(11684+146852x)$$
$$= -2495293x^2+4990586x-2495293,$$

d'où

$$f_5(x) = -2495293.$$

De gros coefficients, à mesure qu'on avance, paraissent inévitables; les suppressions de facteurs communs sont accidentelles, toujours avantageuses. Il y a à chaque opération un contrôle des calculs qui s'étend à tous les coefficients, pour peu qu'on recoure à d'autres nombres auxiliaires que zéro, ce qui est chose précieuse. Cependant la méthode de calcul par des déterminants, à laquelle j'ai été conduit par d'autres considérations, me paraît en général préférable; elle se distingue surtout par son heureuse application à la résolution de deux équations entières en x et y.