BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications

Bulletin de la S. M. F., tome 77 (1949), p. 11-101

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1949__77__11_0>

ÉTUDE SUR LES VARIÉTÉS ET LES OPÉRATEURS DE JULIA, AVEC QUELQUES APPLICATIONS;

PAR M. JACQUES DIXMIER.

Introduction.

Dans son cours à la Faculté des Sciences de Paris, et dans plusieurs publications [1], G. Julia étudie l'analogie entre les fonctions analytiques et les opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert [2]. Il établit notamment plusieurs propriétés fondamentales des domaines d'existence et des domaines des valeurs des opérateurs fermés, montrant ainsi l'intérêt de leur étude. En particulier, il établit un théorème fondamental pour la suite, qu'à ce titre nous appellerons théorème de Julia (*cf.* p. 32). Par là, il montre que les phénomènes *analytiques* singuliers rencontrés antérieurement, en particulier dans l'inversion des opérateurs linéaires bornés, sont de purs phénomènes géométriques, tenant à la position relative de deux variétés linéaires fermées, et notamment des variétés asymptotiques [3] (*cf.* p. 21). Eu égard à l'importance de ces travaux, qui ont mis en évidence le rôle fondamental des variétés linéaires qui sont des domaines d'existence ou des domaines de valeurs d'opérateurs fermés, nous appellerons variétés de Julia (en abrégé *variétés* J) les variétés en question. Le but du présent travail est de poursuivre l'étude de ces variétés, et notamment de leurs propriétés géométriques et analytiques; nous appliquerons les résultats obtenus à plusieurs problèmes. Un résumé a été donné dans trois Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Dixmier [1], [2], [3]).

1. Aux Chapitres 2, 3, 4, 5, on a cherché les propriétés géométriques des variétés J. Jusqu'ici, on s'est surtout occupé des variétés linéaires fermées de l'espace de Hilbert, et une étude générale des variétés linéaires paraît impraticable, parce qu'il existe beaucoup de types distincts de telles variétés, dont certains très *pathologiques*. Or, les variétés J forment précisément un ensemble de variétés

---

(1) *Cf.* en particulier : Julia, [1]. Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie qui termine le travail.

(2) Par espace de Hilbert, nous entendons un espace vérifiant les axiomes A, B, C de B. von Sz. Nagy, [1].

(3) JULIA, [10], [11], [12].

linéaires aux propriétés maniables, plus maniables même, à certains égards, que les variétés linéaires fermées que d'ailleurs elles généralisent. De plus, elles s'introduisent automatiquement, et à plusieurs reprises, dans l'étude des variétés linéaires fermées.

Les variétés J forment, on le verra, un réseau ([1]), que nous étudierons, et dont la généralisation aux espaces de Banach peut avoir de l'importance.

L'essentiel du théorème de base concernant la projection d'une variété linéaire fermée sur une variété linéaire fermée est énoncé dans Julia, [12], p. 226, n° 2.

Köthe [1] a déjà montré l'existence, pour chaque variété J, de ce que nous appellerons au Chapitre 5 une base orthonormale, et Neumark [1] a donné quelques propriétés des domaines d'existence des opérateurs self-adjoints.

2. L'introduction des variétés J permet de se poser, conformément à l'idée directrice de Julia, le problème suivant, étudié surtout aux Chapitres 6, 7, 10 : que peut-on dire d'un opérateur linéaire fermé A quand on connaît son domaine d'existence D_A, ou son domaine des valeurs Δ_A, ou les deux ?

Dans cet ordre d'idées, certains résultats sont bien connus : *a*. Si D est fermé, A est borné; *b*. D'après des résultats de Rellich [1], si A est self-adjoint complètement continu, et B borné self-adjoint avec $\Delta_B \subset \Delta_A$, alors B est aussi complètement continu. Nous étendrons ces résultats, montrant par exemple que la seule étude de Δ_A, (A opérateur linéaire fermé), permet de décider si A est complètement continu ou non.

Au Chapitre 7, on cherche en particulier si l'on peut définir un opérateur linéaire fermé A par la donnée de D_A et Δ_A. La réponse n'est pas triviale puisque, suivant les classes (introduites au Chap. 5) de D_A et Δ_A, le problème peut être impossible ou avoir une infinité de solutions.

D'après une idée de Julia, un opérateur linéaire ne peut être bien connu que quand il est défini dans une variété linéaire fermée. Pour certaines classes d'opérateurs, en particulier pour les opérateurs linéaires fermés (sauf ceux qui sont complètement continus ou d'inverse complètement continu) quelques résultats, qui ramènent les opérateurs considérés aux opérateurs de la première classe de Tœplitz, permettent de satisfaire à cette conception.

3. Von Neumann [1] a indiqué que la somme et le produit de deux opérateurs linéaires fermés, même définis dans des variétés J partout denses, peuvent n'être définis qu'en o. Mais ses démonstrations s'appuient sur une série de résultats antérieurs et sur des exemples construits analytiquement par des calculs difficiles. D'autre part, quand le domaine de définition de la somme ou du produit n'est pas réduit à o, il reste à savoir quels sont les opérateurs obtenus. On étudie ici ces questions à deux points de vue :

a. On met en évidence, au Chapitre 8, par des démonstrations géométriques simples, les difficultés signalées par Von Neumann, et l'on généralise ses résultats.

([1]) Les propriétés de ce réseau ont été étudiées, indépendamment, par Mackey, qui a publié ses résultats avant mes notes citées en (4) (MACKEY [3]).

Les théorèmes obtenus expliquent plusieurs aspects de la *pathologie* des opérateurs non bornés, et l'on en donne des applications au Chapitre 9; par exemple, on retrouve aisément l'existence, établie par Neumark [2], d'opérateurs symétriques dont le carré n'est défini qu'en o; on voit immédiatement que tout opérateur symétrique a une infinité de restrictions symétriques, etc.

b. Sortant du cadre des opérateurs linéaires fermés, on introduit, aux Chapitres 2, 3, des opérateurs linéaires nouveaux, les opérateurs J, qui, à de nombreux égards, sont plus maniables que les opérateurs linéaires fermés que d'ailleurs ils généralisent : principalement, la somme et le produit d'opérateurs J sont des opérateurs J. De plus, ces opérateurs s'introduisent automatiquement, et à plusieurs reprises, dans l'étude des opérateurs linéaires fermés : par exemple, la seule multiplication de deux opérateurs linéaires fermés conduit à l'opérateur J le plus général. Le nom donné à ces opérateurs vient de la caractérisation qu'on prend pour définition au Chapitre 2, et qui les lie aux variétés J grâce à la méthode des images de Von Neumann : on voit ainsi clairement quels sont les opérateurs auxquels conduisent l'addition et la multiplication des opérateurs linéaires fermés. La notion d'opérateur J est très utile en outre dans l'étude des variétés J elles-mêmes. Au passage, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit d'opérateurs linéaires fermés soit fermé.

4. On sait qu'un opérateur linéaire A partout défini de l'espace H est borné si, pour toute variété fermée V telle que $H \ominus V$ ait 1 dimension, $A^{-1}(V)$ est fermée. Grâce à l'introduction des variétés J, on peut, au Chapitre 3, étendre ces résultats. On est alors conduit à des définitions purement algébriques, dans le réseau des variétés J, des opérateurs linéaires fermés bornés, et même des opérateurs J.

Je tiens à remercier M. Julia, sans lequel ce travail n'aurait jamais vu le jour; c'est l'intérêt de son cours à la Sorbonne qui m'a attiré vers l'étude de l'espace de Hilbert; c'est dans son cours et dans de nombreux entretiens qu'il a bien voulu m'accorder, que j'ai appris toutes les idées qui sont à l'origine de ma thèse. J'adresse aussi mes remercîments à M. Valiron et à M. Favard, qui ont bien voulu faire partie du Jury. Je dois enfin beaucoup à M. Aronszajn qui a suggéré de très nombreuses améliorations, souvent essentielles, à mon texte initial.

NOTATIONS.

$A \cap B$ et $A \cup B$ désignent respectivement l'intersection et la réunion de deux ensembles A et B; $A \subset B$ signifie l'inclusion au sens large de A dans B.

Dans un ensemble E, une relation $x \sim y$ entre éléments x, y est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive. Une relation $x > y$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive, et si les relations $x > y$, $y > x$ entraînent $y = x$. Si maintenant une relation $x > y$ est seulement réflexive et transitive, écrivons $x \sim y$ lorsque $x > y$ et $y > x$; alors : *a*. la relation $x \sim y$ est une relation d'équivalence; soit $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x. *b*. si $x > y$, $x \sim x'$, $y \sim y'$, on a $x' > y'$; écrivons alors $\dot{x} > \dot{y}$. *c*. la relation $\dot{x} > \dot{y}$ est une relation d'ordre; nous dirons alors que la relation $x > y$ est une relation d'ordre au sens large.

Dans un espace de Hilbert H, on désigne par $\{\mathcal{M}\}$ et $[\mathcal{M}]$ la plus petite variété linéaire et la plus petite variété linéaire fermée contenant un ensemble $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux ensembles, on écrit $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}_2$ s'il existe un opérateur unitaire U tel que $\mathcal{M}_2 = \mathrm{U}(\mathcal{M}_1)$, et $\mathcal{M}_1 \approx \mathcal{M}_2$ s'il existe un opérateur isométrique I tel que $\mathcal{M}_2 = \mathrm{I}(\mathcal{M}_1)$. Si V_1 et V_2 sont deux variétés linéaires, on pose

$$V_1 \dot{+} V_2 = \{V_1 \cup V_2\}, \qquad V_1 \oplus V_2 = [V_1 \cup V_2] = [V_1 \dot{+} V_2].$$

On désigne par o la variété réduite à l'élément o. On dit que deux variétés linéaires V_1, V_2 sont disjointes si $V_1 \cap V_2 = o$. Si V est une variété linéaire fermée, on désigne par P_V l'opérateur de projection sur V, par S_V la symétrie (Julia [13]) par rapport à V. Si V_1 et V_2 sont deux variétés linéaires fermées, avec $V_2 \subset V_1$, on désigne par $V_1 \ominus V_2$ l'ensemble des vecteurs de V_1 orthogonaux à V_2.

Soit V_1, V, deux variétés linéaires avec $V_1 \subset V$; on dit que V_1 est de déficience n dans V si l'espace quotient V/V_1 a n dimensions.

Soit V_1, V_2 deux variétés linéaires fermées ; on écrit $V_2 \ddot{\subset} V_1$ ou $V_1 \ddot{\supset} V_2$ si $V_1 \cap V_2$ est de déficience finie dans V_2, c'est-à-dire si $v = V_2 \ominus (V_1 \cap V_2)$ a un nombre fini de dimensions. Comme $V_1 \oplus V_2 = v \oplus V_1$ et que $v \cap V_1 = o$, il revient au même de dire que V_1 est de déficience finie dans $V_1 \oplus V_2$. La relation $V_1 \ddot{\supset} V_2$ est une relation d'ordre au sens large ([5]). La relation $V_1 \ddot{\supset} V_2$, $V_2 \ddot{\supset} V_1$, qui signifie que $V_1 \cap V_2$ est de déficience finie dans V_1 et V_2, est une relation d'équivalence, que nous notons $V_1 \ddot{=} V_2$. ($V_1 \ddot{=} o$ si et seulement si V_1 a un nombre fini de dimensions.). La relation $V_1 \ddot{\supset} V_2$ est une relation d'ordre entre classes d'équivalence.

Si A est un opérateur, on désigne par D_A son domaine d'existence, par Δ_A son domaine des valeurs, par $\tilde{A}$ son plus petit prolongement linéaire fermé. On appelle opérateur de première classe A un opérateur linéaire biunivoque borné et d'inverse borné tel que $D_A = \Delta_A = H$. On dit que deux opérateurs linéaires A et B sont équivalents s'il existe deux opérateurs de première classe P et Q tels que $B = PAQ$. Si les vecteurs propres d'un opérateur self-adjoint sous-tendent H, on dit que l'opérateur est diagonal (parce qu'on peut le représenter par une matrice diagonale infinie).

Un système de vecteurs est appelé système L s'il est transformé d'une base orthonormale de H par un opérateur linéaire borné.

([5]) *Démonstration* : il est immédiat que $V_1 \ddot{\supset} V_1$. Supposons $V \ddot{\supset} V'$ et $V' \ddot{\supset} V''$. On a

$$V_2 = V' \cap V'' \subset V' \subset V' \oplus V = V_1.$$

Par hypothèse, V_2 est de déficience finie dans V'', et V de déficience finie dans V_1. Un vecteur de V_2 appartient à V si et seulement si il est orthogonal à $V_1 \ominus V$, donc à $P_{V_2}(V_1 \ominus V)$, qui a un nombre fini de dimensions. Donc $V \cap V_2$ est de déficience finie dans V_2, donc dans V''. *A fortiori*, $V \cap V'' \supset V \cap V_2$ est de déficience finie dans V''. Donc $V \ddot{\supset} V''$.

On dit qu'une série de vecteurs est commutativement convergente si elle converge indépendamment de l'ordre des termes.

Soient $S = (a_1, a_2, \ldots)$ et $S' = (a'_1, a'_2, \ldots)$ deux suites de nombres positifs. S et S' sont dites équivalentes si les rapports $a_i'^{-1} a_i$ et $a_i^{-1} a'_i$ sont bornés. S et S' sont dites semblables s'il existe une permutation de la suite S' qui la rende équivalente à la suite S.

RAPPEL DE RÉSULTATS CONNUS.

1. **Bases faibles.** — Une suite de vecteurs $(A_1, A_2, \ldots)$ de l'espace de Hilbert séparable H est appelée base faible si :

a. Les A_i sous-tendent H; *b.* $A_i \notin [A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots]$ pour tout i; *c.* L'intersection des variétés $[A_n, A_{n+1}, \ldots]$ pour $n = 1, 2, \ldots$, est o. Dans ces conditions (Julia [7] et [8]; Markouchevitch [1]), il existe une suite duale $(B_1, B_2, \ldots)$ qui est une base faible, et dont la suite duale est la suite (A_i). Tout vecteur X admet alors par rapport aux A_i des coordonnées contravariantes $(x^1, x^2, \ldots)$ définies par $X = x^i A_i + X_i$, $X_i \in [A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots]$ pour tout i, égales aux coordonnées covariantes (B_i, X) de X par rapport aux B_i. Il y a correspondance biunivoque entre X et la suite de ses coordonnées covariantes ou contravariantes par rapport aux A_i.

2. **Systèmes hétérogonaux.** — Lorch [1] a introduit, pour les espaces de Banach, des notions que nous exposons dans le cas restreint de l'espace de Hilbert séparable. Appelons système hétérogonal dans H toute suite de vecteurs $(A_1, A_2, \ldots)$ tels que, pour tout i, $A_i = Le_i$, où (e_i) est une base orthonormale de H, et où L est un opérateur de première classe. Si S est une suite d'entiers, soit W_S la variété linéaire fermée sous-tendue par les A_i où $i \in S$. Désignons par $\overline{S}$ la suite complémentaire de S. On a le :

Théorème de Lorch. — *Pour que la suite* $(A_1, A_2, \ldots)$ *soit un système hétérogonal, il faut et il suffit que* : 1° $\inf_i \| A_i \| > 0$, $\sup_i \| A_i \| < +\infty$; 2° *pour toute suite* S *d'entiers*, $W_S \cap W_{\overline{S}} = 0$, $W_S \dotplus W_{\overline{S}} = H$.

La condition 1 n'intéresse que les normes des A_i, la condition 2 n'intéresse que les directions des A_i (elle exprime que les A_i sous-tendent H, et que le plus petit angle de W_S et $W_{\overline{S}}$ est positif : *cf.* Chap. 1, § 5). Si une suite A_i de vecteurs non nuls vérifie la condition 2 seulement, nous disons qu'elle est hétérogonale en direction; alors, la suite $\| A_i \|^{-1} A_i$ est hétérogonale. Tout système hétérogonal en direction est une base faible. Le dual d'un système hétérogonal est hétérogonal.

3. Supposons toujours H séparable.

Théorème de Köthe ([6]). — *Soient* A *et* B *deux opérateurs self-adjoints positifs bornés diagonaux, sans zéros non nuls, équivalents. Leurs suites de valeurs propres sont semblables.*

Corollaire. — *Soient deux systèmes hétérogonaux* (A_i) *et* (B_i), *deux suites de nombres positifs bornés* (a_i) *et* (b_i), *et soient* S *et* T *les opérateurs linéaires fermés bornés définis dans tout* H *par*

$$SA_i = a_i A_i, \qquad TB_i = b_i B_i.$$

Si S *et* T *sont équivalents les suites* (a_i) *et* (b_i) *sont semblables.*

Démonstration. — Soit (e_i) une base orthonormale de H. Par les formules $Pe_i = A_i$, $Qe_i = B_i$, on définit deux opérateurs de première classe P et Q. On a

$$P^{-1}SPe_i = a_i e_i, \qquad Q^{-1}TQe_i = b_i e_i,$$

donc $P^{-1}SP$ et $Q^{-1}TQ$ sont deux opérateurs self-adjoints positifs bornés diagonaux, sans zéros non nuls, équivalents à S et T, donc équivalents entre eux : on peut leur appliquer le théorème de Köthe.

I. — Étude de la figure constituée par deux variétés fermées.

1. Bornes d'une suite de vecteurs. — Étant donnée une suite de vecteurs $(A_1, A_2, \ldots)$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on appellera bornes inférieure et supérieure de cette suite les nombres

$$l = \inf_{x_1, x_2, \ldots, x_n, n} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \right\|, \qquad L = \sup_{x_1, x_2, \ldots, x_n, n} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \right\|,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres complexes $(0 \leqq l \leqq L \leqq +\infty)$.

Si (A_{ν_i}) est suite extraite de (A_i), ses bornes sont comprises entre l et L.

Lemme 1, 1. — *Supposons* $0 \leqq m \leqq \|A_i\| \leqq M \leqq +\infty$ *pour tout* i, *et* $|(A_i, A_j)| \leqq q^{j-i} (q > 0)$ *pour* $j > i$ *quelconques. Alors les bornes de la suite* (A_i) *sont comprises entre* $m - \varepsilon$ *et* $M + \varepsilon$, *avec* $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit pour* q *assez petit.*

Démonstration. — On a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \|A_i\|^2 + 2\mathcal{R} \sum_{i<j}^{n} \bar{x}_i x_j (A_i, A_j).$$

Or

$$\left| \mathcal{R} \sum_{i<j}^{n} \bar{x}_i x_j (A_i, A_j) \right| \leqq \sum_{i<j}^{n} |x_i|\,|x_j|\, q^{j-i} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)(q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

([6]) Köthe [1]. Nous restreignons ici beaucoup le résultat de Köthe. La démonstration se fait sans l'aide de la théorie spectrale.

Donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)[m^2-2(q+q^2+\ldots+q^{n-1})] \leqq \left\|\sum_{i=1}^{n}x_i A_i\right\|^2$$
$$\leqq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)[M^2+2(q+q^2+\ldots+q^{n-1})].$$

Lemme 1, 2. — *Soit une suite de vecteurs* (A_i), *avec* $A_i \to 0$ *quand* $i \to \infty$, *et* $0 \leqq m \leqq \|A_i\| \leqq M < +\infty$ *pour tout* i. *On peut en extraire une suite* (A_{n_i}) *dont les bornes sont comprises entre* $m-\varepsilon$ *et* $M+\varepsilon$, *avec* $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit.*

Démonstration. — $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_{p-1}}$ étant choisis, il suffit de choisir A_{n_p} de façon que $|(A_{n_k}, A_{n_p})| \leqq q^{p-k}$ pour $k < p$, ce qui est possible puisque $A_n \to 0$. Il suffit alors d'appliquer le lemme (1, 1).

2. **Variétés en position** p, p', p''. — Dans ce Chapitre, V_1 et V_2 étant deux variétés linéaires fermées de $\mathcal{H}$, on pose

$$\mathcal{H}\ominus V_1 = V'_1, \qquad \mathcal{H}\ominus V_2 = V'_2,$$
$$V_1\cap V_2 = \nu_{12}, \qquad V_1\cap V'_2 = \nu_{12'}, \qquad V'_1\cap V_2 = \nu_{1'2}, \qquad V'_1\cap V'_2 = \nu_{1'2'},$$
$$P_{V_2}V_1 = D_{12}, \qquad P_{V'_2}V_1 = D_{12'}, \qquad P_{V_2}V'_1 = D_{1'2}, \qquad P_{V'_2}V'_1 = D_{1'2'}, \qquad P_{V_1}V_2 = D_{21}, \qquad \ldots$$
$$H = \mathcal{H}\ominus(\nu_{12}\oplus\nu_{12'}\oplus\nu_{1'2}\oplus\nu_{1'2'}),$$
$$W_1 = V_1\cap H, \qquad W_2 = V_2\cap H, \qquad W'_1 = V'_1\cap H, \qquad W'_2 = V'_2\cap H.$$

Les deux circonstances suivantes sont équivalentes

$$[D_{21}] = V_1, \qquad \nu_{12'} = 0.$$

Elle signifient en effet toutes deux qu'il n'y a pas de vecteur de V_1 orthogonal à V_2. Ceci posé

a. Si $[D_{21}] = V_1$ et $[D_{12}] = V_2$, nous dirons que V_1 et V_2 sont en position p'; c'est une relation symétrique entre V_1 et V_2. Il revient au même de dire, par exemple, que $\nu_{12'} = \nu_{1'2} = 0$. Donc, si V_1 et V_2 sont en position p', il en est de même de V'_1 et V'_2, et réciproquement (mais pas forcément de V_2 et V'_1, ou de V_1 et V'_2). Quelles que soient V_1 et V_2, $V_1\ominus\nu_{12'}$ et $V_2\ominus\nu_{21'}$, sont en position p'.

b. Si V_1 et V_2 sont disjointes et sous-tendent $\mathcal{H}$, nous dirons que V_1 et V_2 sont en position p'' (relation symétrique entre V_1 et V_2). Voici des affirmations équivalentes : $\nu_{12} = \nu_{1'2'} = 0$; V'_1 et V'_2 en position p''; V_2 et V'_1 en position p'; V'_2 et V_1 en position p'. Quelles que soient V_1 et V_2, $V_1\ominus\nu_{12}$ et $V_2\ominus\nu_{12}$ sont en position p'' dans l'espace $(V_1\ominus\nu_{12})\oplus(V_2\ominus\nu_{12})$.

c. Si V_1 et V_2 sont à la fois en position p' et en position p'', nous dirons que V_1 et V_2 sont en position p (relation symétrique entre V_1 et V_2). Il en est de même alors de V_1 et V'_2, V_2 et V'_1, V'_1 et V'_2. Affirmations équivalentes : $\nu_{12} = \nu_{1'2} = \nu_{12'} = \nu_{1'2'} = 0$;

$v_{21} = v_{21'} = 0$, $[D_{21}] = V_1$, $[D_{21'}] = V'_1$. L'opérateur P_{V_1}, restreint à V_2, est alors biunivoque, donc $\dim V_1 \geq \dim V_2$. De même, $\dim V_2 \geq \dim V_1$. Ainsi

$$\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V'_1 = \dim V'_2.$$

(Si $\mathcal{H}$ a n dimensions, V_1, V'_1, V_2, V'_2 ont $\frac{1}{2} n$ dimensions : la disposition considérée ne peut exister que si n est infini ou pair).

Lemme 1, 3. — *a. Les variétés* v_{12}, $v_{12'}$, $v_{1'2}$, $v_{1'2'}$, H *sont deux à deux orthogonales et sous-tendent* $\mathcal{H}$.

b.
$$\begin{cases} V_1 = W_1 \oplus v_{12} \oplus v_{12'}; & V_2 = W_2 \oplus v_{21} \oplus v_{21'}; \\ V'_1 = W'_1 \oplus v_{1'2} \oplus v_{1'2'}; & V'_2 = W'_2 \oplus v_{2'1} \oplus v_{2'1'}; \end{cases}$$

c.
$$W'_1 = H \ominus W_1; \qquad W'_2 = H \ominus W_2.$$

d. W_2 *et* W'_2 *sont en position p avec* W_1 *et* W'_1 *dans* H.

Démonstration. — *a.* résulte de la définition de H, et de ce que, par exemple, $v_{12} \subset V_2$, $v_{12'} \subset V'_2$.

W_1 est l'ensemble des vecteurs de V_1 orthogonaux à $v_{12} \oplus v_{12'} \oplus v_{1'2} \oplus v_{1'2'}$, donc, puisque $v_{1'2} \oplus v_{1'2'} \subset V'_1$, à $v_{12} \oplus v_{12'} \subset V_1$. Donc $W_1 = V_1 \ominus (v_{12} \oplus v_{12'})$. On démontre ainsi toutes les formules de *b*.

De ces formules, on déduit que W_1, v_{12}, $v_{12'}$, W'_1, $v_{1'2}$, $v_{1'2'}$, qui sont deux à deux orthogonales, sont aussi complémentaires dans $\mathcal{H}$; donc W_1 et W'_1 sont complémentaires dans H. D'où *c*.

Enfin, puisque $W_1 \subset V_1$ et $W_2 \subset V_2$ sont orthogonales à $v_{12} = V_1 \cap V_2$, on voit que $W_1 \cap W_2 = 0$. De même,

$$W_1 \cap W'_2 = W'_1 \cap W_2 = W'_1 \cap W'_2 = 0.$$

D'où *d*.

Ce lemme permet de ramener l'étude de V_1 et V_2 dans le cas général à l'étude de variétés en position *p*.

Remarque $\mathcal{R}$. — On aura à plusieurs reprises besoin des remarques suivantes. V_1 et V_2 étant quelconques, soit $X \in V'_1$, et

$$Y = P_{V_2} X, \qquad Z = P_{V'_2} X.$$

On a

$$X = Y + Z,$$
$$0 = P_{V_1} X = P_{V_1} Y + P_{V_1} Z,$$
$$P_{V_1} Y = - P_{V_1} Z = T.$$

Soit, réciproquement, un vecteur $T \in D_{21} \cap D_{2'1}$. Il existe un $Y \in V_2$ et un $Z \in V'_2$, avec

$$P_{V_1} Y = - P_{V_1} Z = T.$$

Donc

$$P_{V_1} Y + P_{V_1} Z = 0 = P_{V_1}(Y + Z).$$

Donc

$$X = Y + Z \in V'_1$$

et l'on a

$$Y = P_{V_2} X, \qquad Z = P_{V'_2} X.$$

Conclusion

(1) $$D_{21} \cap D_{2'1} = P_{V_1} D_{12} = P_{V_1} D_{12'}.$$

D'autre part

$$D_{21} \dot{+} D_{2'1} = P_{V_1}(V_2 \dot{+} V'_2) = P_{V_1}\mathcal{H},$$

donc

(2) $$D_{21} \dot{+} D_{2'1} = V_1.$$

Exemple 6. — Soient V_1 et V'_1 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires. Soient (e_i) et (e'_i) des systèmes orthonormaux de V_1 et V'_1 (i parcourt un ensemble d'indices I). Soit

$$\varepsilon_i = (\cos\alpha_i) e_i + (\sin\alpha_i) e'_i, \qquad \text{où} \quad 0 \leqq \alpha_i \leqq \frac{\pi}{2} \qquad (i \in \mathrm{I}).$$

Les ε_i forment un système orthonormal qui sous-tend une variété linéaire fermée V_2. Tout $Z \in V_2$ est de la forme $X + Y$, avec

$$X = \sum_{i \in \mathrm{I}} (\cos\alpha_i) x_i e_i, \qquad Y = \sum_{i \in \mathrm{I}} (\sin\alpha_i) x_i e_i,$$

où $\sum_{i \in \mathrm{I}} |x_i|^2 < +\infty$. On voit que : 1° D_{21} est partout dense dans la variété fermée sous-tendue par les e_i pour lesquels $\alpha_i \neq \frac{\pi}{2}$; de même, $D_{21'}$ est partout dense dans la variété fermée sous-tendue par les e'_i pour lesquels $\alpha_i \neq 0$. 2° On a $Z \in V_1$ si et seulement si $Y = 0$, c'est-à-dire si $x_i = 0$ pour $\alpha_i \neq 0$; donc v_{12} est sous-tendue par les e_i pour lesquels $\alpha_i = 0$; de même, $v_{21'}$ est sous-tendue par les e'_i pour lesquels $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$.

Conséquences. — 1° V_1 et V_2 sont en position p si

$$0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } i; \qquad [e_i;\, i \in \mathrm{I}] = V_1, \qquad [e'_i;\, i \in \mathrm{I}] = V'_1.$$

2° V_1 et V_2 sont en position p' si

$$0 \leqq \alpha_i < \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } i; \qquad [e_i;\, i \in \mathrm{I}] = V_1.$$

3° V_1 et V_2 sont en position p'' si

$$0 < \alpha_i \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } i; \qquad [e'_i;\, i \in \mathrm{I}] = V'_1.$$

Si

$$[e_i;\, i \in \mathrm{I}] = V_1, \qquad [e'_i;\, i \in \mathrm{I}] = V'_1,$$

V'_2 est sous-tendue par les vecteurs

$$\varepsilon'_i = -(\sin\alpha_i) e_i + (\cos\alpha_i) e'_i.$$

On verra plus loin le degré de généralité de cet exemple.

3. Unitaires attachés à V_1, V'_1, V_2, V'_2. — THÉORÈME **1,1**. — *Si* V_1 *et* V_2 *sont en position* p' [7], *il existe des symétries de* $\mathcal{H}$ *qui échangent* V_1 *et* V_2 (*donc aussi* V'_1 *et* V'_2).

THÉORÈME **1,2**. — *Si* V_1 *et* V_2 *sont en position* p, *il existe des unitaires de* $\mathcal{H}$, *chacun étant produit de deux symétries, qui échangent* V_1 *et* V'_1 *d'une part,* V_2 *et* V'_2 *d'autre part.*

Ces théorèmes sont démontrés et précisés dans Dixmier [4].

Dans le présent travail, ils ne seront utiles que pour des points secondaires. Par exemple :

1° Si V_1 et V_2 sont en position p, on voit que

$$D_{21} \simeq D_{12} \simeq D_{2'1'} \simeq D_{1'2'}, \qquad D_{21'} \simeq D_{1'2} \simeq D_{2'1} \simeq D_{12'}.$$

Nous comparerons plus tard D_{21} et $D_{2'1}$.

2° Supposons V_1 et V_2 quelconques. On a

$$D_{21} = P_{V_1}(W_2 \dot{+} v_{12} \dot{+} v_{1'2}) = v_{12} + P_{W_1} W_2,$$
$$D_{12} = P_{V_2}(W_1 \dot{+} v_{12} \dot{+} v_{12'}) = v_{12} + P_{W_2} W_1.$$

D'après le lemme 1,3, (d) et le théorème **1,2**, on a

$$P_{W_1} W_2 \simeq P_{W_2} W_1.$$

Donc

$$D_{21} \simeq D_{12}.$$

4. Angles de deux variétés fermées. — L'angle $\alpha(X_1, X_2)$, **compris entre** 0 et $\frac{\pi}{2}$, de deux vecteurs X_1, X_2 non nuls, est défini par

$$\cos\alpha(X_1, X_2) = \|X_1\|^{-1}\,\|X_2\|^{-1}\,|(X_1, X_2)|;$$

$\alpha(X_1, X_2)$ ne change pas si l'on remplace X_1 et X_2 par $\lambda_1 X_1$ et $\lambda_2 X_2$ où λ_1 et λ_2 sont deux scalaires non nuls. Soit d'autre part

$$X_3 = P_{X_2} X_1.$$

On a

$$|(X_1, X_2)| = |(X_3 + X_1 - P_{X_2}X_1, X_2)| = |(X_3, X_2)| = \|X_3\|\,\|X_2\|.$$

Donc

$$\cos\alpha(X_1, X_2) = \|X_3\|.\|X_1\|^{-1},$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha(X_1, X_2) = \|X_1\|^2\,\|X_3\|^{-2} - 1 = \|X_1 - X_3\|^2\,\|X_3\|^{-2},$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha(X_1, X_2) = \|X_1 - X_3\|.\|X_3\|^{-1},$$
$$\sin\alpha(X_1, X_2) = \|X_1 - X_3\|\,\|X_1\|^{-1}.$$

Étant donnés un vecteur X_1 et une variété linéaire fermée V_2, on suppose un

---

(7) Plus généralement : si dim. $v_{12'}$ = dim. $v_{1'2}$.

vecteur variable X_2 dans V_2, et l'on prend la borne inférieure de $\alpha(X_1, X_2)$. C'est ce qu'on appelle l'angle de X_1 et V_2, $\alpha(X_1, V_2)$.

On a

$$\|X_1\| \sin\alpha(X_1, X_2) = \|X_1 - P_{X_2}X_1\|,$$

donc

$$\alpha(X_1, V_2) = \alpha(X_1, P_{V_2}X_1).$$

Étant données maintenant deux variétés linéaires fermées V_1 et V_2, on suppose que X_1 parcourt V_1, et l'on étudie $\alpha(X_1, V_2)$.

a. Soit $\alpha(V_1, V_2)$ la borne inférieure des $\alpha(X_1, V_2)$. C'est la borne inférieure de l'angle de X_1 parcourant V_1 avec X_2 parcourant V_2. Donc $\alpha(V_1, V_2) = \alpha(V_2, V_1)$. C'est ce qu'on appellera le plus petit angle de V_1 et V_2. Si l'une des variétés n'a qu'un nombre fini de dimensions, V_1 par exemple, la borne inférieure $\alpha(V_1, V_2)$ est atteinte pour un vecteur X_1 de V_1 et le vecteur $X_2 = P_{V_2}X_1$ de V_2, à cause de la compacité, dans la topologie forte, de la sphère $\|X\| = 1$ dans V_1. Mais dès que V_1 et V_2 ont ∞ dimensions, il n'y a pas forcément de vecteur $X_1 \in V_1$ tel que $\alpha(X_1, V_2) = \alpha(V_1, V_2)$. En particulier, on peut avoir $\alpha(V_1, V_2) = 0$ avec $v_{12} = 0$. Cette circonstance se présente sur l'exemple $\mathcal{E}$ dès que $\inf_{i \in I} \alpha_i = 0$, $\alpha_i \neq 0$ pour tout i.

b. Soit $\beta(V_1, V_2)$ la borne supérieure des $\alpha(X_1, V_2)$. On a aussitôt :

$$\beta(V_1, V_2) = \frac{\pi}{2} - \alpha(V_1, V_2').$$

Donc, de même que la borne inférieure $\alpha(V_1, V_2)$, la borne supérieure $\beta(V_1, V_2)$ peut ne pas être atteinte. On peut avoir $\beta(V_1, V_2) \neq \beta(V_2, V_1)$ (par exemple si $V_1 \subsetneq V_2$), mais, si V_1 et V_2 sont en position p', $\beta(V_1, V_2) = \beta(V_2, V_1)$ à cause du théorème 1,1.

5. **Variétés asymptotiques** (8). — V_1 et V_2 seront dites asymptotiques si $V_1 \dotplus V_2$ est non fermé.

Proposition 1,1. — *a. Si $v_{12} = 0$, V_1 et V_2 sont asymptotiques si et seulement si $\alpha(V_1, V_2) = 0$, donc si et seulement si $\|X\| \, \|P_{V_1'}X\|^{-1}$ est non borné quand X décrit V_2.*

b. Il existe alors deux suites de vecteurs orthonormaux, (X_i) dans V_1, (Y_i) dans V_2, tels que $\alpha(X_i, Y_i) \to 0$ quand $i \to \infty$. De plus, on peut supposer X_i orthogonal à Y_j pour $i \neq j$ (8').

Démonstration. — *a.* a été démontré par de nombreux auteurs (Murray [2], Lorch [2], Kober [1], Mackey [2]).

(8) Cette notion a été introduite, avec la terminologie de variétés *asymptotes* par Julia, [10], [11], [12].

(8') Sous cette forme, le *b.* de la proposition m'a été indiqué par M. Esser. Je dois également à M. Esser la démonstration donnée plus loin de la proposition 1,3.

b. Construisons les X_i et les Y_i par récurrence. Soit H_i la variété linéaire sous-tendue par X_1, Y_1, X_2, Y_2, ..., X_{i-1}, Y_{i-1}. Les deux variétés $V_1 \ominus P_{V_1} H_i$ et $V_2 \ominus P_{V_2} H_i$ sont asymptotiques (car, si leur somme était fermée, il en serait de même de $V_1 \dot{+} V_2$ puisque $P_{V_1} H_i$ et $P_{V_2} H_i$ ont un nombre fini de dimensions), et l'on peut choisir dans ces variétés deux vecteurs X_i et Y_i tels que $\alpha(X_i, Y_i) < i^{-1}$.

Si maintenant $v_{12} \neq 0$, soit $\overline{V}_2 \subset V_2$ une variété linéaire fermée disjointe de v_{12} donc de V_1, et telle que $V_2 = \overline{V}_2 \dot{+} v_{12}$, c'est-à-dire (prop. 1,1) telle que

$$(1) \qquad V_2 = \overline{V}_2 \oplus v_{12}, \qquad \alpha(\overline{V}_2, v_{12}) > 0$$

(par exemple, $\overline{V}_2 = V_2 \ominus v_{12}$). On a $V_1 \dot{+} V_2 = V_1 \dot{+} \overline{V}_2$, donc V_1 et V_2 sont asymptotiques si et seulement si $\alpha(\overline{V}_2, V_1) = 0$, et cette condition est alors satisfaite pour toutes les $\overline{V}_2 \subset V_2$ vérifiant (1). (On peut, dans ceci, échanger les rôles de V_1 et V_2).

Cherchons, dans l'exemple $\mathcal{E}$, et lorsque V_1, V_2 sont en position p, dans quels cas V_1 et V_2 sont asymptotiques : la condition $\inf\limits_{i \in I} \alpha_i = 0$ est suffisante; pour montrer qu'elle est nécessaire, observons que, si

$$Z = \sum_{i \in I} (\cos \alpha_i) x_i e_i + \sum_{i \in I} (\sin \alpha_i) x_i e_i \in V_2,$$

on a

$$\cos^2 \alpha(Z, V_1) = \Big(\sum_{i \in I} |x_i|^2\Big)^{-1} \Big(\sum_{i \in I} \cos^2 \alpha_i |x_i|^2\Big),$$

donc

$$\inf_{i \in I} \alpha_i \leq \alpha(Z, V_1) \leq \sup_{i \in I} \alpha_i.$$

On peut, à partir de là, construire des variétés V_2 asymptotiques à la fois à V_1 et V'_1, ce qui prouve en particulier que la relation V_1 *et* V_2 *asymptotiques* n'est pas transitive.

Lemme 1,4. — *Soit v une variété linéaire, v' une variété linéaire fermée orthogonale à v; $v \dot{+} v'$ est fermé si et seulement si v est fermée.*

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire car, si $Z = X + Y$ ($X \in v$, $Y \in v'$) est dans $[v]$, Z est orthogonal à v', donc $(Z, Y) = \| Y \|^2 = 0$; donc $Z \in v$, de sorte que

$$v = [v] \cap (v \dot{+} v').$$

Théorème 1,3. — *V_1 et V_2 sont asymptotiques si et seulement si $D_{21'}$ est non fermé.*

Démonstration. — Si $X \in V_2$, on a $P_{V'_1} X = X - P_{V_1} X \in V_1 \dot{+} V_2$, donc $D_{21'} \subset V_1 \dot{+} V_2$, $V_2 \subset V_1 \dot{+} D_{21'}$. Donc $V_1 \dot{+} V_2 = V_1 \dot{+} D_{21'}$ et il suffit d'appliquer le lemme 1,4.

(Ainsi, si $V_2 \overset{..}{=} 0$, $D_{21'}$ a un nombre fini de dimensions donc est fermé : V_1 et V_2 sont non asymptotiques).

LEMME 1,5. — *V_1 et V_2 sont asymptotiques si et seulement si W_1 et W_2 sont asymptotiques.*

Démonstration. — D'après le lemme 1,3, on a

$$D_{21'} = P_{V'_1}(W_2 \dot{+} v_{12} \dot{+} v_{12'}) = v_{12'} \dot{+} P_{V'_1} W_2 = v_{12'} \dot{+} P_{W'_1} W_2.$$

Donc (lemme 1,4) $D_{21'}$ est fermé si et seulement si $P_{W'_1} W_2$ est fermé. D'où le lemme, par application du théorème 1,3.

PROPOSITION 1,2. — *Si V_1 et V_2 sont asymptotiques, V'_1 et V'_2 sont asymptotiques.*

Démonstration. — Si V_1 et V_2 sont asymptotiques, W_1 et W_2 sont asymptotiques (lemme 1,5), donc W'_1 et W'_2 sont asymptotiques (lemme 1,3 et th. 1,2), donc V'_1 et V'_2 sont asymptotiques (lemme 1,5).

PROPOSITION 1,3. — *Si V_1 et V_2 sont asymptotiques, on peut extraire de V_2 une variété linéaire fermée $\overline{V}_2$, disjointe de V_1, à ∞ dimensions, asymptotique à V_1, et telle que $\beta(\overline{V}_2, V_1)$ soit arbitrairement petit.*

Démonstration. — On peut d'abord extraire de V_2 une variété linéaire fermée $\overline{\overline{V}}_2$, à ∞ dimensions, disjointe de V_1, asymptotique à V_1. Soit (prop. 1, 1, *b*) X_i des vecteurs orthonormaux dans V_1, Y_i des vecteurs orthonormaux dans $\overline{\overline{V}}_2$, avec X_i orthogonal à Y_j pour $i \neq j$, et $\alpha(X_i, Y_i) < i^{-1}$. Alors, par les relations qui précèdent le lemme 1,4, on a, en appelant $\overline{V}_2$ la variété linéaire fermée sous-tendue par Y_i, Y_{i+1}, ... : $\beta(\overline{V}_2, V_1) < i^{-1}$.

6. **Variétés complètement asymptotiques.** — On dira que V_2 est complètement asymptotique à V_1 si toute variété linéaire fermée $\overline{V}_2 \subset V_2$, à ∞ dimensions, disjointe de v_{12} donc de V_1, est asymptotique à V_1.

Si $V_2 \ddot{\subset} V_1$, il n'existe aucune variété linéaire fermée $\overline{V}_2 \subset V_2$, à ∞ dimensions, disjointe de v_{12}. Donc V_2 est complètement asymptotique à V_1, mais n'est pas asymptotique à V_1 ([9]) (c'est là un défaut de la notation, qu'il est impossible d'éviter sans complications). Mais si V_2 est complètement asymptotique à V_1 avec une variété linéaire fermée $V_2 \ominus v_{12}$ à ∞ dimensions, $V_2 \ominus v_{12}$ est une $\overline{V}_2$ donc est asymptotique à V_1, donc V_1 et V_2 sont asymptotiques.

Si V_2 est complètement asymptotique à V_1 et V_1 complètement asymptotique à V_2, on dira que V_1 et V_2 sont complètement asymptotiques. Par exemple, si $V_1 \ddot{=} V_2$, V_1 et V_2 sont complètement asymptotiques.

THÉORÈME 1,4. — *Pour que V_2 soit complètement asymptotique à V_1, il faut et il suffit que $D_{21'}$ ne contienne aucune variété linéaire fermée à ∞ dimensions.*

Démonstration. — Si $D_{21'} \supset d$, avec d variété linéaire fermée à ∞ dimensions,

---

([9]) Car $D_{21'}$ a un nombre fini de dimensions.

d est projection sur V'_1 d'une variété linéaire fermée $\bar{d}$ de $V_2 \ominus v_{12}$ à ∞ dimensions. Puisque $P_{V'_1}\bar{d}$ est fermée, c'est que (th. 1,3) $\bar{d}$ est non asymptotique à V_1 : V_2 n'est pas complètement asymptotique à V_1.

Réciproquement, si V_2 n'est pas complètement asymptotique à V_1, il existe dans V_2 une variété linéaire fermée $\bar{d}$ à ∞ dimensions, disjointe de V_1, non asymptotique à V_1; alors (th. 1,3), $P_{V'_1}\bar{d} \subset D_{21'}$ est une variété linéaire fermée, à ∞ dimensions.

Lemme 1,6. — V_2 *est complètement asymptotique à* V_1 *si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :* 1° $v_{21'} \ddot{=} 0$; 2° W_2 *est complètement asymptotique à* W_1.

Démonstration. — On a vu que $D_{21'} = v_{21'} \dotplus P_{W'_1} W_2$

a. Si V_2 est complètement asymptotique à V_1, $D_{21'}$ ne contient aucune variété linéaire fermée à ∞ dimensions, donc il en est de même de $v_{21'}$ et $P_{W'_1} W_2$. Donc $v_{21'} \ddot{=} 0$, et W_2 est complètement asymptotique à W_1 (th. 1,4).

b. Si V_2 n'est pas complètement asymptotique à V_1, D_{21}' contient une variété linéaire fermée N à ∞ dimensions. Si de plus $v_{21'} \ddot{=} 0$, les vecteurs de N orthogonaux à $v_{21'}$ forment une variété linéaire fermée à ∞ dimensions, contenue dans $P_{W'_1} W_2$; donc W_2 n'est pas complètement asymptotique à W_1 (th. 1,4).

Proposition 1,4. — *a. Si* V_2 *est complètement asymptotique à* V_1, V'_1 *est complètement asymptotique à* V'_2.

b. Si V_1 *et* V_2 *sont complètement asymptotiques,* V'_1 *et* V'_2 *sont complètement asymptotiques.*

Démonstration. — *a.* Si V_2 est complètement asymptotique à V_1, $v_{21'} \ddot{=} 0$, et W_2 est complètement asymptotique à W_1; d'après le lemme 1,3, (*d*), les théorèmes 1,1 et 1,2, W'_1 est complètement asymptotique à W'_2. Donc (lemme 1,6) V'_1 est complètement asymptotique à V'_2.

b. résulte immédiatement de *a*.

Proposition 1,5. — *Si* V_2 *est complètement asymptotique à* V_1, V_1 *et* V_2 *sont complètement asymptotiques si et seulement si* $v_{12'} \ddot{=} 0$.

Démonstration. — Comme V_2 est complètement asymptotique à V_1, W_2 est complètement asymptotique à W_1, donc [lemme 1,3, (*d*) et th. 1,1] W_1 est complètement asymptotique à W_2. Alors (lemme 1,6) V_1 est complètement asymptotique à V_2 si et seulement si $v_{12'} \ddot{=} 0$.

Théorème 1,5. — *Pour que* V_2 *soit complètement asymptotique à* V_1, *il faut et il suffit que, étant donnée une suite quelconque* (Y_n) *de vecteurs unitaires de* V_2 *avec* $Y_n \rightharpoonup 0$, *on ait* $\alpha(Y_n, V_1) \to 0$.

Démonstration. — *a.* Soit une suite (Y_n) de vecteurs unitaires de V_2, avec $Y_n \rightharpoonup 0$, et $\alpha(Y_n, V_1) \geqq \alpha_0 > 0$ pour tout i. Soit $X_n = P_{V_1} Y_n$. On a

$$\| X_n \| \leqq \cos\alpha_0, \qquad X_n \rightharpoonup 0.$$

Par double extraction on peut supposer les bornes de la suite Y_n aussi voisines qu'on veut de 1, et celles de la suite (X_n) inférieures à $\cos\alpha_0 + \varepsilon < 1$ (pour ε assez petit). Dans la variété linéaire fermée $\overline{V}_2$ (forcément à ∞ dimensions) sous-tendue par les Y_i, l'opérateur P_{V_1} a alors une borne inférieure à 1, de sorte que $\alpha(\overline{V}_2, V_1) > 0$: $\overline{V}_2$ et V_1 sont non asymptotiques, V_2 n'est pas complètement asymptotique à V_1.

b. Si V_2 n'est pas complètement asymptotique à V_1, il existe une variété linéaire fermée à ∞ dimensions $\overline{V}_2 \subset V_2$, disjointe de V_1, non asymptotique à V_1. Pour toute suite Y_n de vecteurs de $\overline{V}_2$, on a $\underline{\lim}_{n=\infty} \alpha(Y_n, V_1) \geqq \alpha(\overline{V}_2, V_1) > 0$.

Proposition 1,6. — *a. La relation* V_2 complètement asymptotique à V_1 *est une relation d'ordre au sens large. b. La relation* V_1 et V_2 complètement asymptotiques *est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — La relation V_2 *complètement asymptotique à* V_1 est évidemment réflexive. Montrons que : si V_1 est complètement asymptotique à V_2 et V_2 complètement asymptotique à V_3, V_1 est complètement asymptotique à V_3. Soit (X_i) une suite de vecteurs unitaires de V_1 avec $X_i \rightharpoonup 0$, $Y_i = P_{V_2} X_i$, $Z_i = P_{V_3} Y_i$. D'après le théorème 1,5, $Y_i - X_i \to 0$, donc $Y_i \rightharpoonup 0$, et $\| Y_i \| \to 1$; par suite $\| Y_i \|^{-1} Y_i \rightharpoonup 0$, et une nouvelle application du théorème 1,5 donne $\| Y_i \|^{-1}(Y_i - Z_i) \to 0$, d'où $Y_i - Z_i \to 0$. Donc $X_i - Z_i \to 0$, et, *a fortiori*, $\alpha(X_i, V_3) \to 0$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 1,5 en sens inverse.

(*b*) résulte aussitôt de (*a*).

Proposition 1,7. — *Si* V_2 *est complètement asymptotique à* V_1, V_2 *et* V'_1 *sont non asymptotiques.*

Démonstration. — Si V_2 et V'_1 étaient asymptotiques, on pourrait (prop. 1,3) trouver une variété linéaire fermée $\overline{V}_2 \subset V_2$ à ∞ dimensions telle que $\beta(\overline{V}_2, V'_1) < \frac{\pi}{4}$, donc telle que $\alpha(\overline{V}_2, V_1) > \frac{\pi}{4}$; $\overline{V}_2$ serait non asymptotique à V_1 et disjointe de V_1, V_2 ne serait pas complètement asymptotique à V_1 [10].

7. Étude détaillée de la position relative de deux variétés fermées [11]. —

---

[10] Signalons encore les propositions suivantes : Quand $\rho_{12} = 0$, V_1 et V_2 sont asymptotiques, si et seulement si l'on peut extraire de V_1 et V_2 des variétés linéaires fermées à ∞ dimensions complètement asymptotiques. Si V_1 et V_2 sont disjointes et non asymptotiques, et si V_3 est complètement asymptotique à V_1, V_3 et V_2 sont non asymptotiques, et $V_3 \cap V_2 \doteq 0$.

[11] Les idées de ce paragraphe ont déjà été introduites, sous une forme plus ou moins équivalente par Neumark et Aronszajn.

Supposons V_1 et V_2 en position p. Soit $K = P_{V_2}P_{V_1}$, restreint à V_2. K, considéré dans V_2, est self-adjoint, et $0 < K < 1$. En effet, si $X \in V_2$, $Y \in V_2$, on a

$$(KX, Y) = (P_{V_2}P_{V_1}X, Y) = (P_{V_1}X, Y) = (X, P_{V_1}Y) = (X, P_{V_2}P_{V_1}Y) = (X, KY),$$
$$(KX, X) = (P_{V_2}P_{V_1}X, X) = (P_{V_1}X, X) = \| P_{V_1}X \|^2$$

et $0 < \| P_{V_1}X \|^2 < 1$ pour $\| X \| = 1$ (parce que V_1 et V_2 sont en position p).

Soit θ un angle tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Soit V_2^θ et $\bar{V}_2^\theta$ les variétés linéaires fermées réduisant K telles que

$$(KX, X) < \cos^2\theta \quad \text{pour} \quad X \in V_2^\theta, \quad \| X \| = 1$$
$$(KX, X) \geq \cos^2\theta \quad \text{pour} \quad X \in \bar{V}_2^\theta, \quad \| X \| = 1.$$

Puis, posons

$$[P_{V_1}V_2^\theta] = V_1^\theta, \qquad [P_{V_1}\bar{V}_2^\theta] = \bar{V}_1^\theta.$$

Soient $X \in V_2^\theta$, $Y \in \bar{V}_2^\theta$. On a $KX \in V_2^\theta$, donc

$$0 = (KX, Y) = (P_{V_2}P_{V_1}X, Y) = (P_{V_1}X, Y) = (P_{V_1}X, P_{V_1}Y).$$

Donc tout vecteur de $P_{V_1}V_2^\theta$ est orthogonal à tout vecteur de $P_{V_1}\bar{V}_2^\theta$, et par suite V_1^θ, $\bar{V}_1^\theta$ sont orthogonales. De plus

$$[P_{V_1}V_2^\theta \dotplus P_{V_1}\bar{V}_2^\theta] = [P_{V_1}(V_2^\theta \dotplus \bar{V}_2^\theta)] = [P_{V_1}V_2] = V_1$$

(parce que V_1 et V_2 sont en position p), donc $V_1^\theta \oplus \bar{V}_1^\theta = V_1$: V_1^θ et $\bar{V}_1^\theta$ sont orthogonales complémentaires dans V_1 comme V_2^θ et $\bar{V}_2^\theta$ dans V_2.

De même, si l'on pose

$$V_1'^\theta = [P_{V_1'}V_2^\theta], \qquad \bar{V}_1'^\theta = [P_{V_1'}\bar{V}_2^\theta],$$

on voit aisément que $V_1'^\theta$, $\bar{V}_1'^\theta$ sont orthogonales complémentaires dans V_1'.

Soient $\mathcal{H}^\theta = V_1^\theta \oplus V_1'^\theta$, $\bar{\mathcal{H}}^\theta = \bar{V}_1^\theta \oplus \bar{V}_1'^\theta$. $\mathcal{H}^\theta$ et $\bar{\mathcal{H}}^\theta$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{H}$, et l'on a $V_2^\theta \subset \mathcal{H}^\theta$, $\bar{V}_2^\theta \subset \bar{\mathcal{H}}^\theta$.

Soient enfin $V_2'^\theta = \mathcal{H}^\theta \ominus V_2^\theta$, $\bar{V}_2'^\theta = \bar{\mathcal{H}}^\theta \ominus \bar{V}_2^\theta$.

$V_2'^\theta$ est orthogonale à V_2^θ et à $\bar{\mathcal{H}}^\theta$, donc à $\bar{V}_2^\theta$, donc à V_2; donc $V_2'^\theta \subset V_2'$. De même, $\bar{V}_2'^\theta \subset V_2'$. $V_2'^\theta \subset \mathcal{H}^\theta$ et $\bar{V}_2'^\theta \subset \bar{\mathcal{H}}^\theta$ sont orthogonales. Enfin, V_2^θ, $V_2'^\theta$, $\bar{V}_2^\theta$, $\bar{V}_2'^\theta$, deux à deux orthogonales, sous-tendent $\mathcal{H}^\theta \oplus \bar{\mathcal{H}}^\theta = \mathcal{H}$; comme $V_2^\theta \oplus \bar{V}_2^\theta = V_2$, on en déduit $V_2'^\theta \oplus \bar{V}_2'^\theta = V_2'$: $V_2'^\theta$, $\bar{V}_2'^\theta$ sont orthogonales complémentaires dans V_2'.

Puisque V_1 et V_2 sont en position p, $\nu_{12} = \nu_{12'} = \nu_{1'2} = \nu_{1'2'} = 0$. Donc, *a fortiori*, $V_1^\theta \cap V_2^\theta = V_1^\theta \cap V_2'^\theta = V_1'^\theta \cap V_2^\theta = V_1'^\theta \cap V_2'^\theta = 0$: V_1^θ et V_2^θ sont en position p dans $\mathcal{H}^\theta$; de même $\bar{V}_1^\theta$ et $\bar{V}_2^\theta$ dans $\bar{\mathcal{H}}^\theta$.

Si $X \in V_2^\theta$, $\| X \| = 1$, on a

$$(KX, X) = \| P_{V_1}X \|^2 < \cos^2\theta,$$

donc $\alpha(X, V_1) > \theta$.

De même si $X \in \bar{V}_2^\theta$, $\alpha(X, V_1) \leq \theta$. Par usage du th. 1,2, on en déduit que : si $X \in V_2'^\theta$, on a $\alpha(X, V_1') > \theta$; si $X \in \bar{V}_2'^\theta$, $\alpha(X, V_1') \leq \theta$.

On en déduit, par exemple, $\alpha(V_2'^{\theta}, V_1') \geqq \theta$: $V_2'^{\theta}$ est non asymptotique à V_1', donc $P_{V_1}V_2'^{\theta}$ est fermée (th. 1,3); donc

$$D_{2'1} = P_{V_1}V_2'^{\theta} \dotplus P_{V_1}\overline{V}_2'^{\theta} = V_1^{\theta} + P_{V_1}\overline{V}_2'^{\theta}.$$

De même, $D_{21} = \overline{V}_1^{\theta} + P_{V_1}V_2^{\theta}$. Résumons :

Proposition 1,8. — *Soit* V_1, V_2 *en position p. Pour tout angle* $\theta \left(o < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, *on peut trouver dans* V_1 (*resp.* V_2; V_1'; V_2') *deux variétés linéaires fermées* V_1^{θ}, $\overline{V}_1^{\theta}$ (*resp.* V_2^{θ}, $\overline{V}_2^{\theta}$; $V_1'^{\theta}$, $\overline{V}_1'^{\theta}$; $V_2'^{\theta}$, $\overline{V}_2'^{\theta}$) *orthogonales complémentaires, de telle sorte que si l'on pose*

$$\mathcal{H}^{\theta} = V_1^{\theta} \oplus V_1'^{\theta}, \qquad \overline{\mathcal{H}}^{\theta} = \overline{V}_1^{\theta} \oplus \overline{V}_1'^{\theta},$$

on ait les propriétés suivantes (12) :

a. $\mathcal{H}^{\theta}$ *et* $\overline{\mathcal{H}}^{\theta}$ *sont orthogonales et sous-tendent* $\mathcal{H}$.

b. V_1^{θ}, $V_1'^{\theta}$ *d'une part*, V_2^{θ}, $V_2'^{\theta}$ *d'autre part, sont orthogonales complémentaires dans* $\mathcal{H}^{\theta}$; V_1^{θ} *et* V_2^{θ} *sont en position p dans* $\mathcal{H}^{\theta}$.

c. $\overline{V}_1^{\theta}$, $\overline{V}_1'^{\theta}$ *d'une part*, $\overline{V}_2^{\theta}$, $\overline{V}_2'^{\theta}$ *d'autre part, sont orthogonales complémentaires dans* $\overline{\mathcal{H}}^{\theta}$; $\overline{V}_1^{\theta}$ *et* $\overline{V}_2^{\theta}$ *sont en position p dans* $\overline{\mathcal{H}}^{\theta}$.

d. Pour $X \in V_2^{\theta}$ (*resp.* $V_2'^{\theta}$), *on a :* $\alpha(X, V_1) > \theta$ [*resp.* $\alpha(X, V_1') > \theta$] *pour* $X \in \overline{V}_2^{\theta}$ (*resp.* $\overline{V}_2'^{\theta}$), *on a :* $\alpha(X, V_1) \leqq \theta$ [*resp.* $\alpha(X, V_1') \leqq \theta$).

e. $D_{21} = \overline{V}_1^{\theta} + P_{V_1}V_2^{\theta}$, $D_{2'1} = V_1^{\theta} + P_{V_1}\overline{V}_2'^{\theta}$.

f. Si V_2 *est asymptotique à* V_1 *et* V_1', *on peut affirmer de plus que* V_1^{θ}, V_2^{θ}, $\overline{V}_1^{\theta}$, ... *ont* ∞ *dimensions* (13).

D'ailleurs, si l'on a des variétés linéaires fermées V_1^{θ}, $\overline{V}_1^{\theta}$, V_2^{θ}, $\overline{V}_2^{\theta}$, ..., possédant les propriétés de la prop. on en déduit que V_2^{θ}, $\overline{V}_2^{\theta}$ réduisent K, que $(KX, X) < \cos^2\theta$ pour $X \in V_2^{\theta}$, $\|X\| = 1$, que $(KX, X) \geqq \cos^2\theta$ pour $X \in \overline{V}_2^{\theta}$, $\|X\| = 1$. Donc ces variétés sont identiques à celles qui ont servi précédemment de point de départ. Ainsi :

Proposition 1,9. — *Les variétés* $\mathcal{H}^{\theta}$ *et* $\overline{\mathcal{H}}^{\theta}$ *de la prop.* **1,8** *sont uniques.*

Considérons maintenant une suite d'angles croissants

$$(\ldots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots) \quad \text{avec} \quad \lim_{n=+\infty} \theta_n = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{n=-\infty} \theta_n = o.$$

Posons

$$V_2^n = V_2^{\theta_n} \ominus V_2^{\theta_{n+1}}.$$

Les V_2^n sont deux à deux orthogonales. Elles sous-tendent V_2, car, s'il n'en

---

(12) On voit aisément que V_1 et V_2, qui ont joué dans la démonstration un rôle dissymétrique, jouent un rôle symétrique dans *a*, *b*, *c*.

(13) Car si par exemple $V_2^{\theta} = o$, $P_{V_1}V_2^{\theta}$ est fermé, donc aussi $D_{21} = \overline{V}_1^{\theta} \dotplus P_{V_1}V_2^{\theta}$. Donc (th. 1,3) V_2 est non asymptotique à V_1'.

était pas **ainsi, il existerait un vecteur non nul de V_2 commun à toutes les V_2^θ** (donc dans V'_1) ou à toutes les V_2^θ (donc dans $\overline{V}_1$) : c'est impossible puisque V_1 et V_2 sont en position p. Donc :

Théorème 1,6. — *Soit V_1, V_2 en position p, et une suite d'angles croissants* $(\ldots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)$ *avec* $\lim\limits_{n=+\infty} \theta_n = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n=-\infty} \theta_n = 0$. *On peut trouver, d'une seule manière, dans V_1 (resp. V_2, V'_1, V'_2) des variétés linéaires fermées V_1^n (resp. V_2^n, V'^n_1, V'^n_2) où $-\infty < n < +\infty$, sous-tendant V_1 (resp. V_2, V'_1, V'_2), deux à deux orthogonales, de telle sorte que, si l'on pose : $\mathcal{H}^n = V_1^n \oplus V'^n_1$, on ait les propriétés suivantes :*

a. Les $\mathcal{H}^n$ sont deux à deux orthogonales, et sous-tendent $\mathcal{H}$.

b. V_1^n, V'^n_1 d'une part, V_2^n, V'^n_2 d'autre part, sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{H}^n$. V_1^n et V_2^n sont en position p dans $\mathcal{H}^n$.

c. Pour $X \in V_2^n$ *(resp.* V'^n_2*), on a :* $\theta_n < \alpha(X, V_1) \leqq \theta_{n+1}$ [*resp.* $\theta_n < \alpha(X, V'_1) \leqq \theta_{n+1}$].

d. $P_{V_1} V_2^n = P_{V_1} V'^n_2 = V_1^n$; $P_{V'_1} V_2^n = P_{V'_1} V'^n_2 = V'^n_1$.

Remarque. — Dans l'exemple $\mathcal{E}$, on peut prendre pour V_2^n la variété linéaire fermée sous-tendue par les ε_i tels que $\theta_n < \alpha_i \leqq \theta_{n+1}$.

Proposition 1,10. — *Pour que V_1, V_2, en position p, soient asymptotiques, il faut et il suffit que $V_2^n \neq 0$ pour des n tendant vers $-\infty$.*

Démonstration. — *a.* La condition est suffisante car elle entraîne $\alpha(V_1, V_2) = 0$.

b. La condition est nécessaire, car, si $\alpha(V_1, V_2) = 0$, $V_2^\theta \neq V_2$ quel que soit $\theta > 0$, donc $V_2^{\theta_{n+1}}$ est strictement contenue dans $V_2^{\theta_n}$ pour des n tendant vers $-\infty$.

Proposition 1,11. — *Pour que V_1, V_2, en position p, soient complètement asymptotiques, il faut et il suffit que : 1° $V_2^n = 0$ pour $n > n_0$; 2° $\ddot{V}_2^n = 0$ pour tout n.*

Démonstration. — *a.* Les conditions sont nécessaires : si V_2 est complètement asymptotique à V_1, V_2 est non asymptotique à V'_1, donc $V_2^n = 0$ pour $n > n_0$ (prop. 1,10); V_2^n est non asymptotique à V_1 [(c) du théorème 1,6] donc ne peut avoir ∞ dimensions.

b. Les conditions sont suffisantes : supposons-les vérifiées; soit une suite (X_i) de vecteurs unitaires de V_2, avec $X_i \rightharpoonup 0$. On a : $P_{V_2^n} X_i \to 0$ quand $i \to \infty$, pour tout n, d'après la condition 2. Donc, d'après la condition 1, $\| X_i - P_{\overline{V}_2^{\theta_n}} X_i \| \to 0$ quand $i \to \infty$, donc :

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\, \alpha(X_i, V_1) \leqq \theta_n,$$

pour tout n, et par suite : $\alpha(X_i, V_1) \to 0$. Il suffit alors d'appliquer le théorème (1,5).

8. Images d'opérateurs. — Pour la symétrie de l'exposé, il convient de généraliser un peu la notion d'opérateur linéaire en introduisant les opérateurs multiformes, c'est-à-dire les opérateurs A qui, à un vecteur X, font correspondre éventuellement un ensemble de vecteurs AX. Un opérateur multiforme sera dit linéaire si : 1° D_A (qu'on ne suppose pas nécessairement partout dense) est linéaire; 2° pour $X \in D_A$, $Y \in D_A$, et quel que soit le choix de AX, AY, $AX + AY$ est une des valeurs de $A(X+Y)$, λAX est une des valeurs de $A(\lambda X)$. Pour $X = o$, AX prend un ensemble de valeurs A (o) qui, à cause de la linéarité, remplissent une variété linéaire V_A. Toujours à cause de la linéarité, pour $X \in D_A$, AX prend des valeurs de la forme $Y + A(o)$. Si A(o) est arbitraire, c'est-à-dire si V_A est tout l'espace, A est en chaque point de D_A complètement indéterminé : c'est le cas extrême de multiformité.

Quand on parlera d'opérateurs linéaires, il s'agira donc d'opérateurs éventuellement multiformes. Cependant, un opérateur borné (en particulier, complètement continu) est forcément uniforme. D'autre part, quand on dira d'un opérateur A qu'il est self-adjoint, ou symétrique, on sous-entendra, comme dans la terminologie classique, que A est uniforme et D_A partout dense.

L'inverse d'un opérateur linéaire existe toujours, c'est un opérateur linéaire (éventuellement multiforme); $V_{A^{-1}}$ est l'ensemble des zéros de A.

Un opérateur linéaire A sera dit fermé si les conditions $X_n \to X$, $AX_n \to Y$ entraînent $X \in D_A$, $Y = AX$. Ceci implique en particulier que V_A est fermée.

Définissons l'adjoint A^* d'un opérateur linéaire A. $X \in D_{A^*}$ si (X, AY) est une fonctionnelle bornée (donc uniforme) en Y pour $Y \in D_A$. Ceci impose en particulier que X soit orthogonal à V_A, donc à $[V_A]$. Si $X \in D_{A^*}$, on a, pour $Y \in D_A$, $(X, AY) = (A^*X, Y)$, où A^*X est bien déterminé si D_A est partout dense; mais, D_A n'est pas partout dense, l'opérateur A^* ainsi défini, qui est linéaire, est multiforme, et les valeurs de $A^*(o)$ remplissent la variété linéaire fermée complémentaire de $[D_A]$. D'ailleurs, on voit aisément que A^* est fermé. Ainsi, A^* existe désormais pour tout opérateur linéaire A. On vérifie facilement que, dans tous les cas, $A^{*-1} = A^{-1*}$.

Soient [14] maintenant deux variétés linéaires fermées orthogonales V_1, V'_1 ayant le même nombre de dimensions, de $\mathcal{H} = V_1 \oplus V'_1$, et une symétrie U de $\mathcal{H}$ qui échange V_1 et V'_1. Soit un opérateur A opérant dans V_1. L'ensemble des vecteurs $X + UAX$, pour X décrivant D_A, constitue l'image de A par rapport à V_1, V'_1, U. Pour les opérateurs linéaires, auxquels nous nous bornons, l'image est une variété linéaire V_2. Grâce à l'introduction des opérateurs multiformes, toute variété linéaire $V_2 \subset \mathcal{H}$ définit (V_1, V'_1, U étant fixés), de manière évidente, un et un seul opérateur linéaire A dans V_1 tel que V_2 soit son image par rapport à V_1, V'_1, U. On a : $D_A = P_{V_1}V_2$, $\Delta_A = UP_{V'_1}V_2$; les zéros de A sont les vecteurs de $V_2 \cap V_1$; A est uniforme si et seulement si $V_2 \cap V'_1 = o$; plus généralement, $V_A = U(V_2 \cap V'_1)$. $U(V_2)$ est l'image de A^{-1} par rapport à V_1, V'_1, U.

A, uniforme ou non, est fermé si et seulement si V_2 est fermé. Dans notre conception, toute variété linéaire fermée $V_2 \subset \mathcal{H}$ est l'image, par rapport à V_1,

(14) Ce qui suit n'est que l'extension immédiate des méthodes de Von Neumann [2].

V'_1, U, d'un opérateur linéaire fermé A et d'un seul. On a : $D_A = D_{21}$, $\Delta_A = UD_{21'}$, $V_A = U\rho_{1'2}$; les zéros de A remplissent ρ_{21}. Si V_1, V_2 sont en position p', p'', p, on dira que A est dans le cas p', p'', p. Dire que A est dans le cas p' revient à dire que A est uniforme et D_A partout dense (ce sont ces opérateurs qu'on considère classiquement). Dire que A est dans le cas p'' revient à dire que A^{-1} est dans le cas p' (ou encore que Δ_A est partout dense et que A n'a pas de zéros non nuls). Si A est dans le cas p [14'], on sait qu'il se met sous la forme KW, avec W unitaire, et K self-adjoint, $K > 0$.

Si $D_A = V_1$, et si A est, en chaque point de V_1, complètement indéterminé, l'image de A est $\mathcal{H}$: nous désignerons cet opérateur linéaire fermé par Ω. Si $D_A = \Delta_A = 0$, l'image de A est o : nous désignerons cet opérateur linéaire fermé par ω.

Revenons au cas d'un opérateur linéaire quelconque. $\tilde{A}$, qui existe désormais pour tout opérateur linéaire A, a pour image $[V_2]$. $\tilde{A}$ est évidemment multiforme si A est multiforme, mais $\tilde{A}$ peut être multiforme avec A uniforme.

Abordons la question de l'adjoint. La condition nécessaire et suffisante pour que $Y \in D_{A^*}$ et que $Z = A^*Y$ est :

$$(AX, Y) = (X, Z),$$

pour tout couple $\{X, AX\}$. Cette condition peut s'écrire : $(X + UAX, -Z + UY) = 0$ pour tout couple $\{X, AX\}$ ou : $-Z + UY \in \mathcal{H} \ominus [V_2]$ ou $Y + U(-Z) \in U(\mathcal{H} \ominus [V_2])$.

Autrement dit, $U(\mathcal{H} \ominus [V_2])$ est l'image de $-A^*$ par rapport à V_1, V'_1, U. Donc $\mathcal{H} \ominus [V_2]$ est l'image de $-A^{*-1}$ par rapport à V_1, V'_1, U. D'où, pour tout opérateur linéaire A, $A^{**} = \tilde{A}$ (on voit que $\omega^* = \Omega$, $\Omega^* = \omega$).

Quand on dit qu'un opérateur linéaire A n'a pas d'adjoint, ceci signifie en réalité que A^* n'est défini qu'en o, et que $A^*(0) = 0$, c'est-à-dire que $A^* = \omega$. Il est équivalent de dire que $\mathcal{H} \ominus [V_2] = 0$, ou que V_2 est partout dense dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que $A^{**} = \tilde{A} = \Omega = \tilde{A}^{-1}$. Ceci peut se produire, on en verra des exemples simples, avec une variété linéaire V_2 disjointe de V_1 et V'_1, donc avec A et A^{-1} uniformes.

Si maintenant A est fermé, l'image de $-A^{*-1}$ est $\mathcal{H} \ominus V_2 = V'_2$. Si A est dans le cas p', p'', ou p, V_1 et V_2 sont en position p', p'' ou p, donc V'_1 et V'_2 sont en position p', p'' ou p, donc A^* est dans le cas p', p'' ou p, ce qu'on vérifie sans passer par l'intermédiaire des images. On voit encore que l'affirmation : A est dans le cas p, équivaut à l'affirmation : A, A^*, A^{-1}, A^{*-1} sont uniformes.

Opérateurs linéaires fermés bornés. — Soit A, fermé uniforme. Sa borne (finie ou non) est, comme il résulte du calcul de la tangente d'un angle, $\operatorname{tg}\beta(V_2, V_1)$. A est donc borné si et seulement si $\alpha(V_2, V'_1) > 0$ donc :

THÉORÈME I,7. — *L'opérateur linéaire fermé A est borné si et seulement si V_2 est disjointe de V'_1 et non asymptotique à V'_1.*

[14'] C'est-à-dire si A est biunivoque, avec D_A, Δ_A partout denses.

A partir du théorème 1,3, on retrouve alors un résultat dont on s'est servi au paragraphe 5 (ce n'est pas une nouvelle démonstration) :

THÉORÈME 1,8. — *L'opérateur linéaire fermé uniforme* A *est borné si et seulement si* D_A *est fermé.*

Classification des opérateurs linéaires fermés dans le cas *p*. — *Première classe.* — V_2 n'est asymptotique ni à V_1, ni à V'_1; A et A^{-1} sont bornés. V'_2 n'est asymptotique ni à V_1, ni à V'_1, A^* est de la même classe que A.

Deuxième classe. — V_2 est asymptotique à V_1, mais non asymptotique à V'_1; A est borné, A^{-1} non borné; A est de la quatrième classe de Tœplitz, plus précisément de la quatrième classe, type *a* de Julia [3]. V'_2 est asymptotique à V'_1, non asymptotique à V_1 ; A^* est de la même classe que A.

Troisième classe. — V_2 est asymptotique à V'_1, non asymptotique à V_1; A est non borné, A^{-1} borné; A^* est de la même classe que A.

Quatrième classe. — V_2 est asymptotique à V_1 et V'_1; A et A^{-1}, de même A^* et A^{*-1}, sont non bornés. C'est dans cette classe que se présentent la plupart des cas pathologiques étudiés au chapitre IX.

Opérateurs linéaires fermés complètement continus. — THÉORÈME 1,9. — *L'opérateur linéaire fermé* A *est complètement continu si et seulement si* V_2 *est disjointe de* V'_1 *et complètement asymptotique à* V_1.

Démonstration. — *a.* Si V_2 est complètement asymptotique à V_1, avec $v_{21'} = 0$, V_2 est non asymptotique à V'_1 (prop. 1,7), donc A est borné (th. 1,7). $D_{21} = D_A$ est fermé. Si $D_A \doteq 0$, la question est réglée. Sinon, soit (X_n) une suite de vecteurs unitaires de D_{21}, avec $X_n \rightharpoonup 0$. On a : $X_n = P_{V_1} Y_n$, où $Y_n \in V_2$, et $Y_n \rightharpoonup O$ (car la correspondance entre $Y \in V_2$ et $P_{V_1} Y$ est biunivoque et bornée dans les deux sens, d'après la proposition 1,1). Comme $\| Y_n \| \geqq 1$, on a aussi $Y_n \| Y_n \|^{-1} \rightharpoonup 0$ donc (th. 1,5), $\alpha(Y_n, X_n) \to 0$, et par suite $\| P_{V'_1} Y_n \| = \| AX_n \| \to 0$. Donc A est complètement continu.

b. Si l'opérateur linéaire fermé A est complètement continu, V_2 est disjointe de V'_1. Soit d'autre part (Y_n) une suite de vecteurs unitaires de V_2, avec $Y_n \rightharpoonup 0$; alors $X_n = P_{V_1} Y_n \rightharpoonup 0$; donc $\| Y_n - X_n \| = \| AX_n \| \to 0$ d'après la complète continuité, et par suite $\alpha(Y_n, V_1) \to 0$. Alors (th. 1,5) V_2 est complètement asymptotique à V_1.

Appliquant le théorème 1,4, on a alors les :

THÉORÈME 1,10. — *L'opérateur linéaire fermé uniforme* A *est complètement continu si et seulement si* Δ_A *ne contient aucune variété linéaire fermée à* ∞ *dimensions.*

THÉORÈME 1,11. — *Si l'opérateur* A *est complètement continu (fermé ou non)* *et si $\Delta_{A'} \subset \Delta_A$ pour un opérateur linéaire fermé A' uniforme, A' est complètement continu* [15].

On reviendra sur ce théorème au chapitre VI, où l'on verra de plus que $A' = AB$, avec B fermé borné, quand A est fermé.

On voit comment la question de la position relative de deux variétés linéaires fermées est liée étroitement à l'étude des opérateurs linéaires fermés. Julia [10], [11] a établi de plus, dans le cas des opérateurs linéaires fermés bornés, une autre liaison, plus cachée, entre les deux questions.

Le théorème 1,2 est équivalent à la décomposition de l'opérateur linéaire fermé A, supposé dans le cas *p*, en self-adjoint et unitaire (*cf.* Dixmier [4]). La construction des variétés linéaires fermées V_2^θ du paragraphe 7 est équivalente à la construction des variétés spectrales de A supposé self-adjoint. Si A est diagonal, la disposition de V_1 et V_2 est celle, parfaitement claire, de l'exemple $\mathcal{E}$ (on voit ainsi le degré de généralité de cet exemple). En particulier, c'est toujours le cas si V_2 est complètement asymptotique à V_1. Mais, si A possède des vecteurs propres différentiels, la position relative de V_1 et V_2 est plus complexe, et l'on est obligé d'introduire les variétés linéaires fermées V_2^n du théorème 1,6. Transposé en langage d'opérateurs, ce théorème n'est autre que le théorème suivant, dû à Murray [1] : étant donné un opérateur linéaire fermé A dans le cas *p*, il existe une infinité de variétés linéaires fermées orthogonales sous-tendant l'espace $V^1, V^2, \ldots$, telles que : 1° A est borné et d'inverse borné dans chaque V^i; 2° les $A(V^i)$ sont deux à deux orthogonales et sous-tendent l'espace; 3° $X \in D_A$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{\infty} \| AP_{V^i}X \|^2 < +\infty$, et alors : $AX = \sum^{\infty} AP_{V_i}X$.

II. — Définitions.

1. Définition des variétés de Julia. — Soit H un espace de Hilbert. Nous dirons qu'une variété linéaire $D \subset H$ est une variété de Julia, ou variété J, s'il existe un opérateur linéaire fermé A opérant dans H tel que $D = D_A$. On peut avoir A multiforme, et $[D] \neq H$. Comme cas particulier, on a les variétés linéaires fermées.

En considérant A^{-1} au lieu de A, on voit qu'on peut aussi bien considérer les variétés J comme domaines des valeurs des opérateurs linéaires fermés de H.

Si H a un nombre fini de dimensions, les variétés J sont toutes les variétés linéaires.

Le théorème fondamental suivant est dû à Julia ([12], p. 226, n° 2).

Théorème de Julia. — *Dans un espace de Hilbert, la projection d'une variété linéaire fermée sur une variété linéaire fermée est une variété* J. *Réciproquement, soit* D *une variété* J *de* H; H' *étant un espace de Hilbert orthogonal à*

---

[15] *Cf.* Rellich [1], Hilfsatz 8, Satz 6, Satz 7.

H [16], *ayant le même nombre de dimensions que* [D], D *est la projection sur* H *d'une variété linéaire fermée* $V \subset [D] \oplus H'$, *en position p avec* [D] *dans* $[D] \oplus H'$; D *est non fermé si et seulement si* V *est asymptotique à* H'.

(On voit donc que l'étude des variétés linéaires fermées introduit automatiquement toutes les variétés J).

Démonstration. — *a*. Soient W et W', deux variétés linéaires fermées. L'opérateur P_W, restreint à W', est fermé, donc son domaine des valeurs, $P_W W'$ est une variété J.

b. Soit, réciproquement, D une variété J de V_1, espace de Hilbert. On a : $D = D_A$, où A est un opérateur linéaire fermé de V_1. Soit V_2 l'image de A par rapport à V_1, V'_1 (espace de Hilbert orthogonal à V_1) et une symétrie. Avec les notations du chapitre 1, on a : $D = D_{21} = v_{12} \dotplus P_{V_1} W_2$. Soit v un espace de Hilbert orthogonal à V_1 et V'_1, ayant le même nombre de dimensions que v_{12} ; soit dans $v_{12} \oplus v$, w une variété linéaire fermée en position p avec v_{12} et v, non asymptotique à v ; on a : $v_{12} = P_{V_1} w$. Donc $D = P_{V_1}(w \dotplus W_2)$; w et W_2 sont orthogonales, donc $w \dotplus W_2 = V$ est une variété linéaire fermée, en position p avec [D] dans $[D] \oplus [P_{V'_1 \oplus v} V]$. En changeant de notations, on obtient le théorème. (La dernière partie du théorème résulte du théorème 1,3).

Proposition 2, 1. — *Soit* D *une variété* J *partout dense de* H. *On a* $D = D_A$, *avec un opérateur linéaire fermé* A *dans le cas p de* H.

Démonstration. — D'après le théorème de Julia, $D = P_H V$, où V est une variété linéaire fermée en position p avec H dans $H \oplus H'$. Il suffit de considérer l'opérateur linéaire fermé A dont V est l'image par rapport à H, H' et une symétrie.

2. Le théorème suivant est dû à Julia [12].

Théorème 2, 1. — *Soit* D *une variété* J *de* H. *On a* $D = \Delta_A$, *avec un opérateur linéaire fermé* A *borné de* H. *Si* [D] *a même dimension que* H, *on peut supposer* $D_A = H$ *et* A *biunivoque. Si* $[D] = H$, *ont peut supposer* A *dans le cas p.*

Démonstration. — On a (th. de Julia) $D = P_H V$, où V est en position p avec [D] dans $[D] \oplus H'$, donc a même nombre de dimensions que [D]. Soit U un opérateur isométrique transformant [D] en V. $A = P_H U$ est fermé borné biunivoque, avec $D_A = [D]$, $\Delta_A = D$. Si $[D] = H$, A est dans le cas p. Si [D] a même dimension que H, on obtient un opérateur linéaire fermé défini dans H en multipliant à droite A par un opérateur isométrique qui transforme H en [D] [17].

Le théorème 2, 1 peut être précisé (on suppose, pour simplifier, $[D] = H$).

---

[16] Ce langage n'est pas tout à fait correct, mais il sera souvent employé car il est imagé et commode.

[17] On déduit aisément de ce théorème que toute variété J est un F_σ pour les topologies forte et faible, et même une réunion dénombrable d'ensembles faiblement compacts. Ceci donne lieu à un rapprochement intéressant avec la théorie des *pseudo-norm sets* (Mackey [2]) et à diverses généralisations de la notion de variété J que nous étudierons ailleurs.

THÉORÈME 2,2. — *Soit* D *une variété* J, *avec* $[D] = H$. *Il existe une infinité d'opérateurs linéaires fermés* A *bornés biunivoques de* H *tels* $D_A = H$, $\Delta_A = D$. *Si* A_1 *est l'un d'eux, tous les autres sont donnés par la formule* $A = A_1 L$, *où* L *est un opérateur de première classe quelconque de* H.

Démonstration. — L'existence de A_1 est garantie par le théorème 2,1. Il est évident que tout $A = A_1 L$ est un opérateur linéaire fermé borné, biunivoque, avec $D_A = H$, $\Delta_A = D$. Réciproquement, soit A un opérateur remplissant ces conditions; $A_1^{-1} A = L$ transforme biunivoquement H en H, et est fermé comme on le voit aisément, donc est de première classe ; et l'on a $A = A_1 L$.

Remarques. — 1° On donnera au chapitre 5 une construction simple d'un opérateur A_1.

2° Soit K un opérateur self-adjoint tel que $D_K = D$. On connaît des opérateurs linéaires bornés biunivoques A avec $D_A = H$, $\Delta_A = D$; *a.* les opérateurs R_z, résolvantes de K pour les nombres complexes z extérieurs au spectre de K; *b.* l'opérateur $U - E$, si U est le transformé de Cayley de K, et E l'opérateur identique.

Interprétés à l'aide du principe des images, les théorèmes 2,1 et 2,2 permettent de préciser le théorème de Julia.

PROPOSITION 2,2. — *Soit* D *une variété* J, *partout dense dans* H. D *est projection sur* H, *dans* $H \oplus H'$, *d'une infinité de variétés linéaires fermées* V, *en position p avec* H, *et non asymptotiques à* H. *Si* V_1 *est l'une d'elles, toutes les autres s'obtiennent de la manière suivante : soit* $\mathfrak{T}$ *l'ensemble des opérateurs de première classe dans* $H \oplus H'$, *réduits par* H, *et se réduisant à l'identité dans* H. *On prend les variétés linéaires fermées* $V = T(V_1)$, où $T \in \mathfrak{T}$.

Remarque. — La recherche de toutes les variétés linéaires fermées V en position p avec H telles que $P_H V = D$ (mais pouvant être asymptotiques à H) revient interprétée avec les images, à celle des opérateurs linéaires fermés A dans le cas p, tels que $D_A = D$. On y reviendra au chapitre 7.

THÉORÈME 2,3. — *Soit* D *une variété* J, *avec* $[D] = H$. *On a* $D = \Delta_K$, *avec* K *self-adjoint borné et* $0 < K < 1$.

Démonstration. — $D = \Delta_A$ avec A opérateur linéaire fermé borné dans le cas p (th. 2,1); on peut supposer la borne de A plus petite que 1. On sait qu'alors $A = KU$, où U est un unitaire et K un self-adjoint qui répond aux conditions du théorème.

PROPOSITION 2,3. — *Soit* D *une variété* J, *avec* $[D] = H$. *On a* : $D = \Delta_{U-E}$ *où* E *est l'opérateur identique et* U *un unitaire sans vecteur invariant.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la transformation de Cayley au self-adjoint du théorème 2,3.

3. **Topologie propre d'une variété J.** — Soit D une variété J de H, partout

dense pour simplifier. Soit A un opérateur linéaire fermé borné biunivoque tel que $D_A = H$, $\Delta_A = D$ (th. 2, 1). Introduisons dans D le nouveau produit scalaire

$$(X, X')_1 = (A^{-1}X, A^{-1}X') \qquad (X \in D,\ X' \in D).$$

Avec cette nouvelle métrique, D est complet; car, si $\lim\limits_{p=\infty, q=\infty} \| X_p - X_q \|_1 = 0$, cela signifie que $\lim\limits_{p=\infty, q=\infty} \| A^{-1}(X_p - X_q) \| = 0$, donc $A^{-1}X_p$ a, quand $p \to +\infty$, une limite forte au sens de la métrique usuelle, soit $A^{-1}X$, où $X \in D$. On a : $\lim\limits_{p=\infty} \| A^{-1}X_p - A^{-1}X \| = 0$, donc $\lim\limits_{p=\infty} \| X_p - X \|_1 = 0$, ce qui prouve que X_p a une limite forte dans D au sens de la métrique usuelle. Donc D, avec la nouvelle métrique, est un espace de Hilbert.

Aux autres opérateurs linéaires fermés A′ bornés biunivoques tels $D_{A'} = H$, $\Delta_{A'} = D$ correspondent d'autres métriques, que nous appelons les *métriques propres* de D. On a (th. 2,2) : $A' = AL$, où L est de première classe. Si $(X, X')_2 = (A'^{-1}X, A'^{-1}X')$, on a : $\| X \|_2 = \| L^{-1}A^{-1}X \|$. Or :

$$a \| A^{-1}X \| \leq \| L^{-1}A^{-1}X \| \leq b \| A^{-1}X \|,$$

où $a > 0$, $b < +\infty$, donc

$$a \| X \|_1 \leq \| X \|_2 \leq b \| X \|_1.$$

Donc la seule donnée de D définit dans D une famille de métriques propres équivalentes (18), donc une *topologie propre*. Donc on sait définir des sous-domaines de D partout denses, ou fermés, dans la topologie de D, des opérateurs linéaires définis dans D et fermés dans la topologie de D, donc des sous-domaines de D qui sont des variétés J dans la topologie de D (on verra que ce sont des variétés J de H), etc. Si $D = H$, on retombe sur la topologie usuelle de H.

Interprétations de cette topologie. — 1° Si T est un opérateur linéaire fermé borné biunivoque tel que $D_T = H$, $\Delta_T = D$, pour savoir si un sous-domaine D′ de D est fermé, ou partout dense, dans la topologie de D, il suffit de chercher si $T^{-1}(D')$ est fermé, ou partout dense, au sens ordinaire (19).

2° L'interprétation qui suit n'est qu'un cas particulier de la précédente. D est projection sur H, dans $H \oplus H'$, d'une variété linéaire fermée V disjointe de H′. H et V ont le même nombre de dimensions, soit J un opérateur transformant isométriquement H en V. $A = P_H J$ opère dans H, est fermé borné biunivoque, et $D_A = H$, $\Delta_A = D$. Si donc $X \in D$, et si $Z \in V$ est tel que $P_H Z = X$, on peut prendre $\| X \|_1 = \| Z \|$. Pour savoir si $D' \subset D$ est fermé, ou partout dense, dans la topologie de D, il suffit de chercher si le domaine correspondant de V est fermé, ou partout dense, dans V au sens usuel.

---

(18) On pourrait aussi considérer un opérateur linéaire fermé uniforme A tel que $D_A = D$, et poser : $(X, X')_1 = (X, X') + (AX, AX')$. Cette notion a été considérée par FRIEDRICHS.

(19) STONE ([1], p. 166) considère, étant donné un opérateur self-adjoint K, une variété linéaire $\mathfrak{M}$ telle que : 1° $\mathfrak{M} \subset D_K$; 2° $[\mathfrak{M}] = H$; 3° $[(K - iE)(\mathfrak{M})] = H$; 4° $[(K + iE)(\mathfrak{M})] = H$. Ces conditions signifient simplement que $\mathfrak{M}$ est partout dense dans la topologie de D_K; la condition 4 entraîne les conditions 3 et 2.

Mais, dans la suite, on s'intéressera à des propriétés qui font intervenir à la fois la topologie propre de D et celle de H, et l'on cherchera à étudier la topologie de D par des opérations faites dans H seulement.

4. **Exemples de variétés J.** — Les variétés linéaires non fermées qui s'introduisent dans l'étude de l'espace de Hilbert sont souvent des variétés J.

1° Soit (A_i) une suite de vecteurs dans H, supposé séparable. Le domaine de convergence de $\sum_{i=1}^{\infty} |(A_i, X)|^2$ est une variété J [20]; car c'est le domaine d'existence de l'opérateur linéaire fermé A défini par $AX = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i, X) e_i$, où (e_i) est une base orthonormale de H (Julia [4], [5], [9]).

2° L'ensemble des $X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ pour lesquels

$$\sup_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \right\|^{-1} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right| < +\infty$$

est une variété J; car c'est l'ensemble des X pour lesquels le problème des moments : $(A_i, X) = x_i \ (i = 1, 2, \ldots)$ est possible. C'est donc le domaine des valeurs de l'opérateur linéaire fermé précédent (Julia, *Ibid.*).

3° Si la suite (A_i) est une base faible, l'ensemble des X dont les coordonnées contravariantes ont leurs modules de carrés sommables est une variété J; car c'est le domaine de convergence de $\sum_{i=1}^{\infty} |(B_i, X)|^2$ où (B_i) est la suite duale de (A_i).

5. **Variétés J complémentaires.** — Deux variétés J, D, D′, de H, seront dites complémentaires si, H′ étant un espace de Hilbert orthogonal à H, ayant le même nombre de dimensions que H, on peut trouver deux variétés linéaires fermées V, V′, orthogonales complémentaires dans $H \oplus H'$, en position p avec H, telles que $D = P_H V$, $D' = P_H V'$. Ceci entraîne : $[D] = [D'] = H$.

PROPOSITION 2,4. — *Si* A *est un opérateur linéaire fermé dans le cas p de* H, D_A *et* Δ_{A^*} *sont complémentaires. Si* D *et* D′ *sont complémentaires, il existe un opérateur self-adjoint* $K > 0$ *tel que* $D = D_K$, $D' = \Delta_K$.

Démonstration. — Si V et V′ sont les images de A et $-A^{*-1}$ par rapport à H, H′, et une symétrie, on a $D_A = P_H V$, $\Delta_{A^*} = P_H V'$. Or V, V′ sont orthogonales complémentaires dans $H \oplus H'$ et en position p avec H. Réciproquement, si D, D′ sont complémentaires dans H, c'est-à-dire si $D = P_H V$, $D' = P_H V'$, où V et V′

---

[20] Plus généralement, soit $T_1, T_2, \ldots$, des opérateurs linéaires fermés uniformes. L'ensemble des $X \in D_{T_1} \cap D_{T_2} \cap \ldots$ et tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \| T_i X \|^2 < +\infty$ est une variété J, comme on le montre aisément.

sont orthogonales complémentaires dans $H \oplus H'$ et en position p avec H, soit A l'opérateur linéaire fermé dans le cas p dont V est l'image par rapport à H, H', et une symétrie. On a $D = D_A$, $D' = \Delta_{A^*}$. Si $A = WK$, avec K self-adjoint, $K > 0$, et W unitaire, on a $D_A = D_K$, $\Delta_{A^*} = \Delta_K$.

Proposition 2,5. — *a. Si deux variétés* J, D, D' *de* H *sont complémentaires, il existe deux variétés linéaires fermées* W, W' *orthogonales complémentaires dans* H, *deux variétés* J, Δ, Δ', *avec* $[\Delta] = W$, $[\Delta'] = W'$ *telles que* $D = W \dot{+} \Delta'$, $D' = W' \dot{+} \Delta$.

b. Si, étant données deux variétés J, D, D', *partout denses, il existe deux variétés linéaires fermées* W, W', *orthogonales complémentaires dans* H, *telles que* $W \subset D$, $W' \subset D'$, D *et* D' *sont complémentaires.*

Démonstration. — (*a*) résulte de la prop. 1,8, (*e*).

(*b*) s'établit ainsi. Soit $X \in D$. On a $P_W X \in W \subset D$, donc $P_{W'} X = X - P_W X \in D$. Donc $P_{W'} X \in W' \cap D$. Comme $X = P_W X + P_{W'} X$, on voit que $D = W \dot{+} \Delta'$, si $\Delta' = W' \cap D$. De même, $D' = W' \dot{+} \Delta$, si $\Delta = W \cap D'$. $[\Delta] = W$ et $[\Delta'] = W$ puisque $[D] = [D'] = H$. On verra au Chapitre III que Δ et Δ' sont des variétés J (ce serait très facile à établir directement). Soit alors dans W (resp. W') un opérateur self-adjoint positif borné K (resp. K') tel que $D_K = W$, $\Delta_K = \Delta$ (resp. $D_{K'} = W'$, $\Delta_{K'} = \Delta'$); il en existe d'après le théorème (2, 3). Posons

$$\overline{K} = KP_W + K'^{-1} P_{W'}.$$

On a $D = D_{\overline{K}}$, $D' = \Delta_{\overline{K}}$, et $\overline{K}$ est self-adjoint, $\overline{K} > 0$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2,4.

En particulier, on voit que $D \dot{+} D' = H$, que $D \cap D' = \Delta \dot{+} \Delta'$ est partout dense, ce qu'on savait aussi par les remarques $\mathcal{R}$.

6. **Opérateurs** J. — Un opérateur linéaire fermé est caractérisé par le fait que son image est fermée. Comme on a généralisé les variétés linéaires fermées par l'introduction des variétés J, il est naturel d'introduire, sous le nom d'opérateurs J, les opérateurs linéaires, uniformes ou non, dont l'image est une variété J. Il est aisé de voir que cette définition ne fait intervenir qu'en apparence la symétrie qu'on utilise dans la construction de l'image. Ce sont ces opérateurs qu'on rencontre le plus souvent, on le verra, quand on sort du cadre des opérateurs linéaires fermés.

Soient H, H', U (avec les notations habituelles), et V une variété J de $\mathcal{H} = H \oplus H'$, qui définit un opérateur J, A, de H. On verra (th. 8,2) que V peut être partout dense dans $\mathcal{H}$ et disjointe de H et H' : alors, A et A^{-1} sont uniformes, mais $\tilde{A} = \tilde{A}^{-1} = \Omega$; c'est le cas, déjà envisagé, où *il n'y a pas d'adjoint.*

Soit D une variété linéaire; l'opérateur identique, restreint à D (nous le noterons E_D), est un opérateur J si et seulement si D est une variété J. Car son image est une variété linéaire V telle que $V \simeq D$.

Si A est un opérateur J, A^{-1} est un opérateur J (car les images de A et A^{-1} sont échangées par une symétrie de $\mathcal{H}$).

III. — Réseau des variétés J. Composition des opérateurs J.

1. Produit d'opérateurs J. — THÉORÈME 3,1. — *Le produit de n opérateurs* J *est un opérateur* J.

Démonstration. — Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n opérateurs J, opérant dans H_0. Introduisons des espaces de Hilbert $H_1, H_2, \ldots, H_n$, tels que les $H_i (0 \leqq i \leqq n)$ soient deux à deux orthogonaux et aient même dimension. Soit U_i un opérateur transformant isométriquement H_0 en $H_i (i = 0, 1, \ldots, n)$. Les vecteurs $X + U_1 A_i X$ décrivent, quand X décrit D_{A_i}, une variété J de $H_0 \oplus H_1$. Donc les vecteurs $U_{i-1} X + U_i A_i X$ décrivent, quand X décrit D_{A_i}, des variétés J de $H_{i-1} \oplus H_i$, soit V_i. Soit $X_0 \in H_0$. Pour que X_0 appartienne au domaine d'existence de $A_n A_{n-1} \ldots A_1$, il faut et il suffit qu'on puisse trouver des vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$, avec $X_i \in H_i$, et tels que $X_{i-1} + X_i \in V_i$. Et quand on prend tous les vecteurs X_i vérifiant ces conditions, $X_0 + X_n$ décrit l'image W de $A_n A_{n-1} \ldots A_1$ par rapport à H_0, H_n et la symétrie qui échange X et $U_n X$ pour tout $X \in H_0$. Soient $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$, de nouveaux espaces de Hilbert orthogonaux entre eux et orthogonaux aux H_i. V_i est projection sur $H_{i-1} \oplus H_i$ d'une variété linéaire fermée $\overline{V}_i$ de $H_{i-1} \oplus H_i \oplus K_{i-1}$ (th. de Julia); pour que $X_{i-1} + X_i \in V_i$, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un $Z_{i-1} \in K_{i-1}$ tel que $X_{i-1} + X_i + Z_{i-1} \in \overline{V}_i$. Donc, $X_0 \in D_{A_n A_{n-1} \ldots A_1}$ si et seulement si l'on peut trouver $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$, avec $X_i \in H_i$, $Z_i \in K_i$, et

$$X_{i-1} + X_i + Z_{i-1} \in \overline{V}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Considérons le vecteur

$$Z = X_0 + X_1 + \ldots + X_n + Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_{n-1}.$$

On a

$$X_i = P_{H_i} Z, \qquad Z_i = P_{K_i} Z,$$

Z n'est assujetti qu'aux conditions (1), donc, puisque les $\overline{V}_i$ sont fermées, Z décrit une variété linéaire fermée $\overline{V}$. Or $X_0 + X_n = P_{H_0 \oplus H_n} Z$, donc $W = P_{H_0 \oplus H_n} \overline{V}$. Donc (th. de Julia), W est une variété J.

Ainsi, quand on multiplie des opérateurs J, on obtient des opérateurs J; par contre, quand on multiplie des opérateurs linéaires fermés, on obtient des opérateurs J qui peuvent ne pas être fermés. En effet, on a le théorème suivant (qui donne une construction générale des opérateurs J) :

THÉORÈME 3,2. — *Soit* T *un opérateur* J, *opérant dans* H. T *est le produit* BA (*d'une infinité de manières*) *de deux opérateurs linéaires fermés de* H; *on peut supposer* B *et* A^{-1} *fermés bornés; si* T *est biunivoque, et* $\dim[D_T] = \dim H$, *on peut supposer* A *et* B *biunivoques et* $D_A = D_B = H$.

(Ainsi, l'étude des opérateurs linéaires fermés introduit aussitôt tous les opérateurs J).

Démonstration. — Soit V l'image de T par rapport à H, H', U (notations habituelles); V est projection (th. de Julia) sur $H \oplus H'$ d'une variété linéaire fermée W de $H \oplus H' \oplus H''$ (où H'' est un espace de Hilbert orthogonal à $H \oplus H'$) disjointe de H''. Soit $Z \in W$, et

$$Y = P_{H \oplus H'} Z, \qquad X = P_H Z = P_H Y, \qquad X' = P_{H'} Z = P_{H'} Y.$$

On a $X' = UTX$. Soit A' l'opérateur défini dans $P_H W$ qui fait passer de X à Z, B' l'opérateur défini dans W qui fait passer de Z à X' (A' est peut-être multiforme) et J un opérateur isométrique transformant W en une variété linéaire fermée de H (J existe toujours sauf si H a un nombre fini de dimensions, cas qui se traite immédiatement). On a $T = (UB'J^{-1})(JA') = BA$, avec $B = UB'J^{-1}$, $A = JA'$. B et A^{-1} sont fermés bornés. Si T est biunivoque, et $\dim[D_T] = \dim H$, on a $\dim[V] = \dim W = \dim H$; W est disjointe de $H \oplus H''$ et $H' \oplus H''$, on peut supposer $\Delta_J = H$; alors, A et B sont biunivoques et $D_A = D_B = H$.

Applications. — 1° On a $D_T = D_A$, $\Delta_T = \Delta_B$. Donc :

THÉORÈME 3,3. — *Si* T *est un opérateur* J, D_T *et* Δ_T *sont des variétés* J.

2° Si T est uniforme, la construction de A prouve que A peut être supposé uniforme. Si T est uniforme, et D_T (donc D_A) fermé, B et A sont fermés bornés, donc $T = BA$ est fermé borné.

THÉORÈME 3,4. — *Tout opérateur* J *uniforme*[21] *dont le domaine d'existence est fermé, est fermé borné.*

3° Interprété à l'aide des images, le théorème 3,4 donne la

PROPOSITION 3,1. — *Soit* H *une variété linéaire fermée de l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Soit une variété* J, $D \subset \mathcal{H}$, *disjointe de* $H' = \mathcal{H} \ominus H$. $P_H D$ *est fermée si et seulement si* D *est fermée et non asymptotique à* H'.

4° Définition géométrique des opérateurs J : Soit (e_i) une base orthonormale de H. Les opérateurs A^{-1} et B précédents transforment (e_i) en deux systèmes L, (A_i) et (A'_i). D_T est l'ensemble des vecteurs $\sum x_i A_i$, où

$$\sum |x_i|^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad T\left(\sum x_i A_i\right) = \sum x_i A'_i.$$

La réciproque est immédiate, grâce au théorème 3,1. Les systèmes L, (A_i) et (A'_i) peuvent donc être pris quelconques. Un opérateur ainsi construit peut donc n'avoir pas d'adjoint.

2. Les considérations du paragraphe 1 suggèrent le problème suivant : A quelles conditions le produit $A_n A_{n-1} \ldots A_1$ de n opérateurs J est-il fermé? Notons que le théorème 3,4 fournit déjà une condition suffisante. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 3,1. $A_n A_{n-1} \ldots A_1$ est fermé si

---

(21) Si T est multiforme, le théorème peut être en défaut : considérer le cas où $D_T = 0$ et où Δ_T est une variété J non fermée.

et seulement si W est fermé. Supposons les A_i uniformes. Soit $V = P_{H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_n} \overline{V}$. V est une variété J disjointe de $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_{n-1}$, et $W = P_{H_0 \oplus H_n} V$. D'après la proposition 3,1, W est fermé si et seulement si V est fermé et non asymptotique à $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_{n-1}$. La non-asymptoticité donne une condition nécessaire :

PROPOSITION 3,2. — *Une condition nécessaire pour que le produit* $A_n A_{n-1} \ldots A_1$ *de n opérateurs* J *uniformes soit fermé, est que les conditions* $X \to o$, $A_n A_{n-1} \ldots A_1 X \to o$ *entraînent*

$$A_1 X \to o, \quad A_2 A_1 X \to o, \quad \ldots, \quad A_{n-1} A_{n-2} \ldots A_1 X \to o.$$

La condition serait suffisante si l'on était assuré que V est fermée. Or, il en est certainement ainsi si les V_i sont fermées (car V est parcourue par $X_0 + X_1 + \ldots + X_n$, où les X_i sont assujettis à $X_{i-1} + X_i \in V_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$), c'est-à-dire si les A_i sont fermés. Donc :

THÉORÈME 3,5. — *Le produit* $A_n A_{n-1} \ldots A_1$ *de n opérateurs linéaires fermés uniformes est fermé si et seulement si les conditions* $X \to o$, $A_n A_{n-1} \ldots A_1 X \to o$ *entraînent*

$$A_1 X \to o, \quad A_2 A_1 X \to o, \quad \ldots, \quad A_{n-1} A_{n-2} \ldots A_1 X \to o.$$

Exemples d'application. — 1° Soit A un opérateur linéaire fermé uniforme défini dans un domaine partout dense; A^* est fermé uniforme, et l'on a

$$\| AX \|^2 = (X, A^* AX) \leq \| X \| \| A^* AX \|,$$

donc (th. 3,5) $A^* A$ est fermé.

2° PROPOSITION 3,3. — *Si* A *est borné, ou si* B^{-1} *est borné* (A *et* B *étant des opérateurs linéaires fermés uniformes*), BA *est fermé. En particulier, si l'un des opérateurs* A, B *est de première classe*, AB *et* BA *sont fermés.*

3° PROPOSITION 3,4. — *Si* A *est fermé uniforme non borné, et* B *fermé complètement continu*, BA *est un opérateur* J *non fermé.*

Démonstration. — Il existe des suites $X_n \in D_A$, avec $X_n \to o$, $\| AX_n \| = 1$, $AX_n \not\to o$ (considérer l'image de A). On a alors $BAX_n \to o$ à cause de la complète continuité.

4° Le carré A^2 d'un opérateur linéaire fermé A dans le cas *p* peut être non fermé. Soit $A = UK$ la décomposition de A en unitaire et self-adjoint positif. On a $A^2 = UKUK$, de sorte que A^2 est fermé si et seulement si KUK est fermé (prop. 3,3); A^2 est donc non fermé (th. 3,5) dès qu'il existe des suites de vecteurs unitaires X_n telles que $K^{-1} X_n \to o$, $K(UX_n) \to o$. Et il est facile de construire des exemples d'une telle circonstance (avec K diagonal de la quatrième classe).

3. **Transformée d'une variété J par un opérateur J.** — THÉORÈME 3,6. — *La*

transformée d'une variété J, *soit* D, *par un opérateur* J, *soit* A, *est une variété* J, *soit* D'.

Démonstration. — On a $D' = \Delta_{AE_D}$. AE_D est un opérateur J (th. 3,1), donc D' est une variété J (th. 3,3).

Application. — D est projection sur [D] d'une variété linéaire fermée V en position *p* avec [D] dans $[D] \oplus H'$. Soit $\overline{d}$ une variété linéaire de V, et $d = P_H \overline{d}$. D'après le théorème 3,6, *d* est une variété J si et seulement si $\overline{d}$ est une variété J. Donc une variété J de H incluse dans D est une variété J dans la topologie de D, et réciproquement.

Transformée d'une variété J *par un opérateur de première classe.* —
Lemme 3,1. — *Si l'opérateur linéaire fermé* A *est dans le cas p, on a* $D_A \simeq D_{A^*}$.

Démonstration. — On a $A = KU$, où U est unitaire et K self-adjoint; d'où

$$A^* = U^*K \qquad \text{et} \qquad D_{A^*} = D_K = U(D_A)$$

Théorème 3,7. — *Si* L *est un opérateur de première classe et* D *une variété* J, *on a* $L(D) \simeq D$.

Démonstration. — Supposons d'abord $[D] = H$. On a $D = D_A$, avec un opérateur linéaire fermé A dans le cas *p*. Donc $D' = L(D) = D_{AL^{-1}}$. D'après le lemme 3,1, $D' \simeq D_{(AL^{-1})^*}$. Or, $(AL^{-1})^* = L^{-1*}A^*$, donc $D_{(AL^{-1})^*} = D_{A^*}$. Enfin, $D_{A^*} \simeq D_A$. Si $[D] \neq H$, remarquons que [D] et [D'] ont même dimension et même déficience; donc il existe un unitaire V qui transforme [D'] en [D]. Alors, VL transforme [D] en [D], est de première classe dans [D]; donc

$$D \simeq VL(D) \simeq L(D).$$

Théorème 3,8. — *Deux opérateurs linéaires fermés dans le cas p,* A *et* B, *bornés, sont équivalents si et seulement si* $\Delta_A \simeq \Delta_B$.

Démonstration. — 1° La condition est nécessaire, car, si $B = LAM$, où L et M sont de première classe, on a $\Delta_B = L(\Delta_A) \simeq \Delta_A$; 2° La condition est suffisante, car elle entraîne $\Delta_B = \Delta_{UA}$, où U est unitaire, donc (th. 2,2) $B = UAM$, où M est de première classe.

Il est assez surprenant de voir la notion *affine* d'équivalence se traduire par un invariant d'apparence métrique. On y reviendra au chapitre 5, § 7.

Théorème 3,9. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p équivalents. Il existe des unitaires* U, V, *des opérateurs de première classe* L, M *tels que* $B = UAL = MAV$.

Démonstration. — L'existence de U et L a été établie dans la démonstration précédente. Montrons l'existence de V et M. On a $B^* = L^*A^*U^*$, donc A^* et B^*

sont équivalents. Donc il existe un unitaire et un opérateur de première classe, qu'on peut appeler V^* et M^*, tels que $B^* = V^* A^* M^*$. D'où $B = MAV$ ([22]).

Autres applications du théorème 3,7. — 1° Soient V_1 et V_2, deux variétés linéaires fermées en position p dans H. Supposons V_2 non asymptotique à $H \ominus V_1$. Alors $P_{V_1} V_2 = V_1$; il y a entre un vecteur Z qui parcourt V_2 et $P_{V_1} Z$ une correspondance biunivoque et bicontinue. Si donc $\bar{d}$ est une variété J de V_2, et si $d = P_{V_1} \bar{d}$, on voit aisément que $\bar{d} \simeq d$.

2° Soit D une variété J, avec $[D] = H$ pour simplifier. Soient A et A′ deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p, avec $\Delta_A = \Delta_{A'} = D$. On a $A' = AL$, avec L de première classe. Soit d une sous-variété J de D et $\delta = A^{-1}(d)$. On a

$$A'^{-1}(d) = L^{-1} A^{-1}(d) \simeq \delta.$$

Ainsi, quand on évalue dans D les distances à l'aide d'une métrique propre m, d devient, dans D, unitairement équivalent à δ dans H, quel que soit le choix de m. Nous traduirons la relation entre D, d, δ par la formule $(d)_D \simeq (\delta)_H$. Plus généralement, si D′ est une autre variété J, avec $[D'] = H$, si d' est une sous-variété J de D′ avec $(d')_{D'} \simeq (\delta)_H$, on écrira $(d)_D \simeq (d')_{D'}$; cela signifie que, si l'on évalue dans D les longueurs à l'aide d'une métrique propre quelconque de D, d dans D est unitairement équivalent à d' dans D′, si l'on évalue dans D′ les longueurs à l'aide d'une métrique propre quelconque de D′.

Exemples. — *a.* Soient V_1, V_2 deux variétés linéaires fermées de H en position p. On a (remarques $\mathcal{R}$) $D_{21} \cap D_{2'1} = P_{V_1} D_{1'2}$. Donc $(D_{21} \cap D_{2'1})_{D_{21}} \simeq (D_{1'2})_{V_2}$. D'autre part, $(D_{1'2})_{V_2} \simeq (D_{2'1})_{V_1}$ (th. 1,1 et 1,2). Donc $(D_{21} \cap D_{2'1})_{D_{21}} \simeq (D_{2'1})_{V_1}$. Si l'on considère V_2 comme l'image, par rapport à V_1, V'_1, d'un opérateur linéaire fermé dans le cas p de V_1, on a la

Proposition 3,5. — *Soit* A *un opérateur linéaire fermé dans le cas p. On a* : $(D_A \cap \Delta_{A^*})_{D_A} \simeq (\Delta_{A^*})_H$, $(D_A \cap \Delta_{A^*})_{\Delta_{A^*}} \simeq (D_A)_H$. *En particulier, si* K *est un opérateur self-adjoint dans le cas p*, $(D_K \cap \Delta_K)_{D_K} \simeq (\Delta_K)_H$, $(D_K \cap \Delta_K)_{\Delta_K} \simeq (D_K)_H$.

b. De même, $(P_{V_1} D_{12})_{D_{21}} \simeq (D_{12})_{V_2} \simeq (D_{21})_{V_1}$. Si V_2 est l'image par rapport à V_1, V'_1, U, d'un opérateur linéaire fermé A dans le cas p de V_1, il est connu que $P_{V_1} D_{12} = D_{A^*A}$ [car, si $Z \in V_2$, $P_{V_1} Z \in D_{A^*A}$ si et seulement si $P_{V'_1} Z \in U(D_{A^*}) = D_{2'1'}$; donc, puisque $D_{21'} \cap D_{2'1'} = P_{V'_1} D_{12}$, si et seulement si $P_{V'_1} Z \in P_{V'_1} D_{12}$, donc si et seulement si $Z \in D_{12}$]. Ainsi :

Proposition 3,6. — *Si* A *est un opérateur linéaire fermé dans le cas p*, $(D_{A^*A})_{D_A} \simeq (D_A)_H$. *En particulier, si* K *est self-adjoint dans le cas p*, $(D_{K^2})_{D_K} \simeq (D_K)_H$.

4. Somme de deux variétés J. — Théorème 3,10. — *Soient* D, D′ *deux variétés* J *de* H. $D \dotplus D'$ *est une variété* J.

([22]) Ainsi nous démontrons simplement l'identité de G_1 et G_2 dans Köthe [1], p. 158.

Démonstration. — Soit h un espace de Hilbert contenant deux variétés linéaires fermées V, V′, orthogonales complémentaires, avec

$$\dim V = \dim[D], \qquad \dim V' = \dim[D'].$$

Soit A (resp. A′) un opérateur linéaire fermé borné biunivoque tel que $D_A = V$, $\Delta_A = D$ (resp. $D_{A'} = V'$, $\Delta_{A'} = D'$). L'opérateur $B = AP_V + A'P_{V'}$ est fermé borné, avec $D_B = h$, $\Delta_B = D \dot{+} D'$. Donc $D \dot{+} D'$ est une variété J.

PROPOSITION 3,7. — *Si l'une des variétés* J *disjointes* D *et* D′ *est non fermée,* $D \dot{+} D'$ *est non fermée.*

Démonstration. — Avec les notations précédentes, B est univoque; car, si $BX = AP_VX + A'P_{V'}X = 0$, on a $AP_VX = A'P_{V'}X = 0$ puisque $D \cap D' = 0$. Donc $P_VX = P_{V'}X = 0 = X$ puisque A et A′ sont biunivoques. Or, si D par exemple est non fermé, A^{-1} est non borné, donc B^{-1} est non borné. Puisque B^{-1} est uniforme non borné, $D_{B^{-1}} = \Delta_B$ est non fermé.

APPLICATIONS. — 1° PROPOSITION 3,8. — *Si* D *est une variété* J *non fermée, et si* $D' \doteq 0$, $D \dot{+} D'$ *est non fermée. En particulier, toute variété* J *non fermée a une déficience infinie dans* H; *toute variété* J *de déficience finie est fermée.*

Démonstration. — Soient $d = D \cap D' \doteq 0$ et $d' = D' \ominus d$. On a $D \dot{+} D' = D \dot{+} d'$ et D, d' sont disjoints. Donc (prop. 3,7) $D \dot{+} D'$ est non fermée.

Remarque. — Ainsi, une variété J de déficience finie non nulle est non partout dense (puisque variété linéaire fermée); au contraire, une variété J de déficience infinie peut être partout dense.

2° Soient D, D′ deux variétés J disjointes de H. On ne peut avoir $H = D \dot{+} D'$ que si D et D′ sont fermées (prop. 3,7), non asymptotiques et sous-tendent H. Autrement dit, étant donnée une variété J, D′, elle est fermée si et seulement si il existe une variété J, D, avec $D \cap D' = 0$, $D \dot{+} D' = H$. Transposons ceci dans la topologie propre d'une variété J :

THÉORÈME 3,11. — *Soient* D *une variété* J, $D_1 \subset D$ *une autre variété* J; D_1 *est fermée dans la topologie de* D *si et seulement si il existe une autre variété* J, $D_2 \subset D$, *avec* $D_1 \cap D_2 = 0$, $D_1 \dot{+} D_2 = D$.

Exemple. — Soient deux variétés J, D et D′, avec $D \cap D' = 0$, $[D] = [D'] = H$ (*cf.* th. 8,1); $D \dot{+} D' = D''$ est une variété J non fermée (prop. 3,7); D et D′ sont fermées et non asymptotiques dans la topologie de D″, ce qui est un peu paradoxal à première vue (*cf.* prop. 9,5).

5. Intersection de deux variétés J. — THÉORÈME 3,12. — *Soient* D, D′ *deux variétés* J; $D \cap D'$ *est une variété* J.

Démonstration. — $E_D E_{D'}$ est un opérateur J (th. 3,1), donc $D \cap D' = D_{E_D E_{D'}}$ est une variété J (th. 3,3).

PROPOSITION 3,9. — *Si* D *est une variété* J, *et* D′ *une variété linéaire fermée,* $D \cap D'$ *est une sous-variété* J *de* D, *fermée dans la topologie propre de* D. *Il existe donc une infinité de variétés* J, $D'' \subset D$, *avec* $D' \cap D'' = 0$, $D = (D \cap D') \dot{+} D''$.

Démonstration. — Si l'on considère D comme projection sur [D] d'une variété linéaire fermée V en position p avec [D] dans $[D] \oplus H'$, la variété linéaire $v \subset V$ telle que $P_H v = D \cap D'$ est évidemment fermée. D'où la proposition, d'après la deuxième interprétation de la topologie propre.

Sous-variétés J *simples de* D. — Alors que le théorème 3,11 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété J, $D_1 \subset D$, soit fermée dans la topologie de D, la proposition 3,9 est une condition suffisante. Effectivement, il existe, dès que D est non fermée, des variétés J, $D_1 \subset D$ fermées dans la topologie de D, et qui ne sont pas intersections de D et d'une variété linéaire fermée (*cf.* prop. 9,5). Ainsi, les sous-variétés J de D fermées dans la topologie de D et de la forme $D \cap D'$ où D′ est une variété linéaire fermée, sont spéciales; on les appellera sous-variétés J simples de D (cette notion résulte de la superposition des topologies de D et H).

Réseau des variétés J. — L'ensemble des variétés J de H forme un réseau $\mathcal{L}$ par rapport aux opérations $\dot{+}$ et $\cap$ (23) (alors qu'il n'en est pas de même pour les variétés linéaires fermées: il faut prendre les opérations $\oplus$ et $\cap$). Il serait intéressant de savoir, étant donné un réseau, quels sont les axiomes qui permettent d'affirmer qu'il est isomorphe à $\mathcal{L}$. C'est pourquoi nous nous attacherons à dégager dans la suite, toutes les fois que cela sera possible, les propriétés intrinsèques de $\mathcal{L}$, qui peuvent être définies à l'aide des seules opérations $\dot{+}$ et $\cap$ dans $\mathcal{L}$, c'est-à-dire qui restent invariantes par tout automorphisme de $\mathcal{L}$ (un automorphisme étant une application biunivoque de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$ distributive par rapport aux opérations $\dot{+}$ et $\cap$). Voici déjà des exemples de tels caractères : $D \in \mathcal{L}$ est une variété linéaire fermée si et seulement si il existe une $D' \in \mathcal{L}$ tel que $D \cap D' = 0$, $D \dot{+} D' = H$ (24); [D] est la plus petite des $D' \in \mathcal{L}$ plus grandes que D et fermées; $D \oplus D' = [D \dot{+} D']$; D est partout dense si $[D] = H$; les variétés linéaires fermées D, D′ sont asymptotiques si et seulement si $D \dot{+} D'$ est non fermée (on verra un autre critère au Chapitre 9); d'où la définition dans $\mathcal{L}$ des variétés linéaires fermées complètement asymptotiques; $D \in \mathcal{L}$ a 1 dimension si, pour tout $D' \in \mathcal{L}$, on a $D \cap D' = D$ ou $D \cap D' = 0$; $D \in \mathcal{L}$ a n dimensions (n fini) si l'on peut trouver D_1 à 1 dimension, D_2 à $n-1$ dimensions, avec $D_1 \cap D_2 = 0$, $D = D_1 \dot{+} D_2$ (définition récurrente); $D \in \mathcal{L}$ a ∞ dimensions si D n'a n dimensions pour aucun n fini; d'où la définition dans $\mathcal{L}$ de la déficience d'une variété J. Dans ces conditions, les propositions 3,7 3,8, 3,9 donnent des renseignements sur la structure de $\mathcal{L}$. En voici un autre :

---

(23) La relation d'inclusion $D \subset D'$, définie dans $\mathcal{L}$ par $D \cap D' = D$ ou $D \dot{+} D' = D'$, est une relation d'ordre; H est le plus grand élément, 0 le plus petit élément de $\mathcal{L}$.

(24) Il serait intéressant de savoir s'il en est de même dans certains espaces de Banach.

Proposition 3,10. — *Le réseau formé par les variétés* J *plus petites qu'une variété* J *donnée*, D, *est isomorphe à* $\mathcal{L}$ *quand* $[D] = H$.

Démonstration. — Reprenons les notations de l'application qui suit le théorème 3,6; l'opérateur P_H établit un isomorphisme entre le réseau des variétés J, $\overline{d} \subset V$, et le réseau des variétés J, $d = P_H \overline{d} \subset D$. V a même dimension que H quand $[D] = H$.

Relations entre D, D′, $D \dot{+} D'$, $D \cap D'$. — Supposons l'une des variétés J, D et D′, non fermée. Alors, si $D \cap D' = o$, $D \dot{+} D'$ est non fermée (prop. 3,7). Par contre, si $D \cap D' \neq o$, $D \dot{+} D'$ peut être fermée, c'est le cas des variétés J complémentaires; or, dans ce cas, $[D \cap D'] = H$. Posons-nous alors le problème général suivant : Quelle disposition présentent deux variétés J, D et D′, de H, quand $D \dot{+} D' = H$? (Ce sont de telles variétés J qu'on aurait pu appeler complémentaires, mais nous avons réservé ce terme pour une disposition plus précise qui est d'ailleurs, on va le voir, une sorte de forme réduite de la disposition générale.)

Reprenons les notations (h, V, V′, A, A′, B) de la démonstration du théorème 3,10. Soit W la variété linéaire fermée des zéros de B et $W' = h \ominus W$. Soit $\overline{B}$ l'opérateur B restreint à W′. $\overline{B}$ est biunivoque et l'on a $D_{\overline{B}} = W'$, $\Delta_{\overline{B}} = H$. Donc $\overline{B}$ est borné et d'inverse borné. On a, pour tout $Z \in h$, $BZ = \overline{B} P_{W'} Z$, donc

$$(1) \qquad D = B(V) = \overline{B}(P_{W'}V),$$
$$(2) \qquad D' = B(V') = \overline{B}(P_{W'}V').$$

Puisque A et A′ sont biunivoques, on a $W \cap V = W \cap V' = o$. Posons

$$v = W' \cap V, \qquad v' = W' \cap V',$$
$$\overline{W}' = W' \ominus (v \oplus v'), \qquad \overline{V} = V \ominus v, \qquad \overline{V}' = V' \ominus v'.$$

D'après le lemme 1,3, W et $\overline{W}'$ sont orthogonales complémentaires dans $\overline{V} \oplus \overline{V}'$, et en position p avec $\overline{V}$, $\overline{V}'$ dans $\overline{V} \oplus \overline{V}'$. De plus

$$P_{W'}V = v \dot{+} P_{\overline{W}'}\overline{V}, \qquad P_{W'}V' = v' \dot{+} P_{\overline{W}'}\overline{V}',$$

v, v' et $[P_{\overline{W}'}\overline{V}] = [P_{\overline{W}'}\overline{V}'] = \overline{W}'$ sont deux à deux orthogonales. Dans $\overline{W}'$, $P_{\overline{W}'}\overline{V}$ et $P_{\overline{W}'}\overline{V}'$ sont complémentaires. Donc, d'après (1) et (2), et changeant de notations :

Lemme 3,2. — *Soient* D, D′ *deux variétés* J *telles que* $D \dot{+} D' = H$. D *et* D′ *sont transformées par un opérateur de première classe de deux variétés* J, D_1, D'_1, *présentant la disposition suivante : soient* V, V′, V″ *trois variétés linéaires fermées orthogonales sous-tendant* H; *soient* d, d' *deux variétés* J *complémentaires dans* V″; *on a* $D_1 = V \dot{+} d$, $D'_1 = V' \dot{+} d'$. *La réciproque est immédiate.*

Proposition 3,11. — *Soient* D, D′ *deux variétés* J *partout denses. a. Si* $D \cap D' = o$, $D \dot{+} D'$ *est non fermée. b. Si* $D \dot{+} D'$ *est fermée*, $D \cap D'$ *est partout dense.*

Démonstration. — (a) résulte de la proposition 3,7. Si $[D] = [D'] = H$, on a $V = V' = 0$ dans le lemme 3,2, donc $[d \cap d'] = V'' = H$. D'où (b).

Proposition 3,12. — *Soient* D, D' *deux variétés* J. *a. On a* $D \dotplus D' = H$ *si et seulement si il existe deux variétés linéaires fermées* $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ *avec* $\mathcal{M} \subset D$, $\mathcal{M}' \subset D'$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = 0$, $\mathcal{M} \dotplus \mathcal{M}' = H$; *b. On a alors* $D = \mathcal{M} \dotplus (D \cap \mathcal{M}')$, $D' = \mathcal{M}' \dotplus (D' \cap \mathcal{M})$; $D \cap \mathcal{M}'$ *est non fermée si* D *est non fermée.*

Démonstration. — La condition de (a) est évidemment suffisante. Supposons réciproquement $D \dotplus D' = H$, et appliquons le lemme 3,2. D'après la proposition 2,5, il existe deux variétés linéaires fermées w, w' orthogonales complémentaires dans V'', avec $d = w \dotplus (d \cap w')$, $d' = w' \dotplus (d' \cap w)$. Soient $\mathcal{M}_1 = V \dotplus w$, $\mathcal{M}'_1 = V' \dotplus w'$; on a $D_1 = \mathcal{M}_1 \dotplus (D_1 \cap \mathcal{M}'_1)$, $D'_1 = \mathcal{M}'_1 \dotplus (D'_1 \cap \mathcal{M}_1)$. $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}'_1$ sont deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans H. $D_1 \cap \mathcal{M}_1$ est non fermée si D_1 est non fermée (lemme 1,4). On en déduit aussitôt les propriétés énoncées pour D, D'.

Proposition 3,13. — *Soient* D, D' *deux variétés* J *telles que* $D \dotplus D' = H$. *Si* D *ne contient aucune variété linéaire fermée à* ∞ *dimensions*, D' *est une variété linéaire fermée de déficience finie dans* H.

Démonstration. — On a $\mathcal{M} \doteq 0$ dans la proposition 3,12, donc $\mathcal{M}'$ et aussi $D' \supset \mathcal{M}'$ sont des variétés linéaires fermées de déficience finie dans H.

Théorème 3,13. — *Soient* D, D' *deux variétés* J; *il existe quatre variétés* J, D_1, D_2, D'_1, D'_2 (*non déterminées univoquement par* D, D') *telles que*

$$D_1 \cap D'_1 = 0, \qquad D_2 \subset D_1, \qquad D'_2 \subset D'_1,$$
$$D = D_1 \dotplus D'_2, \qquad D' = D_2 \dotplus D'_1, \qquad D \cap D' = D_2 \dotplus D'_2, \qquad D \dotplus D' = D_1 \dotplus D'_1.$$

Démonstration. — Il suffit de partir de la proposition 3,12, et d'appliquer à $D \dotplus D'$ la proposition 3,10 (la dimension de H n'intervient pas).

La position de D_1, D'_1, D_2, D'_2 par rapport à D, D' peut se schématiser ainsi :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & D_1 \arrow[dr, dash] & & \\
 & D_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & D \arrow[dr, dash] & \\
O \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & D \cap D' \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & D \dotplus D' \\
 & D'_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & D' \arrow[ur, dash] & \\
 & & D'_1 \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

6. **Restriction d'un opérateur J.** — Proposition 3,14. — *a. La restriction* A' *d'un opérateur* J, A, *à une variété* J, $D' \subset D_A$, *est un opérateur* J. *b. Quand* A *est fermé,* A' *est fermé si et seulement si* D' *est fermé dans la topologie de* D_A.

Démonstration. — On a $A' = AE_{D'}$, d'où (a), d'après le théorème 3,1.

Si A est fermé, soit V son image par rapport à H, H', U (notations habituelles). On a $D_A = P_H V$. Soit $V' \subset V \ominus (V \cap H')$ la variété telle que $P_H V' = D'$. V est fermée si et seulement si D' est fermée dans la topologie de D (2ᵉ interprétation de cette topologie). D'ailleurs, l'image de A' est $V' \dotplus (V \cap H')$; V' et $V \cap H'$ sont orthogonales, $V \cap H'$ est fermée, donc A' est fermé si et seulement si V' est fermée.

7. Branches uniformes d'un opérateur J. — Soit A un opérateur linéaire; on appellera branche uniforme de A tout opérateur linéaire $\overline{A}$ uniforme tel que : 1° $D_{\overline{A}} = D_A$; 2° pour tout $X \in D_A$, les valeurs de AX sont de la forme $\overline{A}X + A(o)$. Soit V l'image de A par rapport à H, H', U; l'image de la branche uniforme de A la plus générale est la variété linéaire $\overline{V}$ la plus générale telle que $\overline{V} \cap H' = o$, $V = \overline{V} \dotplus (V \cap H')$. Si A est un opérateur J, la proposition 3,9 prouve alors le (*a*) de la

Proposition 3,15. — *a. Tout opérateur* J, A, *admet une infinité de branches uniformes qui sont des opérateurs* J. *b. Si* A *est fermé, toute branche uniforme qui est un opérateur* J *est fermée.*

Pour établir (*b*), remarquons que $\overline{V}$ et $V \cap H'$ sont disjointes et que leur somme V est fermée si A est fermé. Si $\overline{V}$ est une variété J, le théorème 3,11 prouve alors que $\overline{V}$ est fermée.

Remarques. — 1° Soient D, D' deux variétés linéaires de H et $\Omega(D, D')$ l'opérateur linéaire défini comme suit : $D_{\Omega(D, D')} = D$ et pour $X \in D$, $\Omega(D, D')\, X$ est un vecteur quelconque de D'. L'image de $\Omega(D, D')$ par rapport à H, H', U est évidemment $D \dotplus U(D')$. $\Omega(D, D')$ est donc un opérateur J si et seulement si D et D' sont des variétés J. On a

$$\Omega(D, D') + \Omega(D_1, D'_1) = \Omega(D \cap D_1, D' \dotplus D'_1).$$

2° Soient A un opérateur J, $\overline{A}$ un opérateur J qui soit branche uniforme de A. D_A et V_A (*cf.* p. 29) sont des variétés J. Par définition des branches uniformes, on a $A = \overline{A} + \Omega(D_A, V_A)$. Réciproquement, soient $\overline{A}$ un opérateur J uniforme et V_A une variété J. Formons l'opérateur $A = \overline{A} + \Omega(D_{\overline{A}}, V_A)$; si $\overline{V}$ est l'image de $\overline{A}$ par rapport à H, H', U, l'image de A est $\overline{V} + U(V_A)$, de sorte que A est un opérateur J dont $\overline{A}$ est une branche uniforme.

8. Somme de deux opérateurs J. — Soient S et T des opérateurs J uniformes; D_S et D_T sont des variétés J, donc aussi (th. 3, 12) $D = D_S \cap D_T$, qui est le domaine d'existence de $S + T$. Appliquant le théorème 2,1 dans l'espace [D], soit A un opérateur linéaire fermé borné biunivoque tel que $D_A = [D]$, $\Delta_A = D$. Soit $B = (S + T)A$; on a aussitôt $B = SA + TA$. SA et TA sont des opérateurs J uniformes (th. 3,1) et même fermés bornés puisque $D_{SA} = D_{TA} = [D]$ (th. 3,4). Donc B est fermé borné. Comme $D_{A^{-1}} = \Delta_A = D_{S+T}$, on a

$$S + T = (S + T)AA^{-1} = BA^{-1}.$$

Donc (th. 3,1), $S + T$ est un opérateur J.

Si maintenant S et T sont multiformes, soient $\bar{S}$ et $\bar{T}$ des branches uniformes qui soient des opérateurs J (prop. 3, 15). On a

$$S + T = \bar{S} + \Omega(D_S, V_S) + \bar{T} + \Omega(D_T, V_T) = (\bar{S} + \bar{T}) + \Omega(D_S \cap D_T, V_S \dot{+} V_T),$$

$\bar{S} + \bar{T}$ est un opérateur J ; $D_S \cap D_T$ et $V_S \dot{+} V_T$ sont des variétés J, donc S+T est un opérateur J, d'après les remarques du paragraphe précédent.

Remarque. — De même que le produit de deux opérateurs linéaires fermés, la somme de deux opérateurs linéaires fermés peut ne pas admettre de prolongement linéaire fermé uniforme. Ce fait est à rapprocher du fait que l'opération $\dot{+}$, appliquée à des variétés linéaires fermées, ne donne pas toujours des variétés linéaires fermées (tandis que, appliquée à des variétés J, elle donne des variétés J).

On résume le résultat obtenu et les théorèmes 3, 1, 3, 2 par le

Théorème 3, 14. — *Les seules opérations d'inversion et de multiplication effectuées une seule fois sur les opérateurs linéaires fermés bornés, conduisent à tous les opérateurs* J *et à eux seulement. Mais ces opérations, effectuées sur des opérateurs* J *donnent des opérateurs* J. *La somme de deux opérateurs* J *est un opérateur* J.

On voit que ces opérateurs sont maniables (malgré l'apparence pathologique de certains, qui n'ont pas d'adjoint) et imposés par l'étude des opérateurs linéaires fermés.

9. **Propriété caractéristique des opérateurs J.** — On va établir une réciproque du théorème 3, 6 qui caractérise de façon remarquable les opérateurs J (on donnera une autre caractérisation au Chapitre 6). On se limitera aux opérateurs biunivoques (sinon, le théorème souffre des exceptions).

Théorème 3, 15. — *Pour qu'un opérateur linéaire biunivoque* A *soit un opérateur* J, *il faut et il suffit que* A *et* A^{-1} *transforment toute variété* J *en une variété* J.

Démonstration. — *a.* La condition est nécessaire, c'est le théorème 3, 6.

b. La condition est suffisante. Supposons-la vérifiée. $D_A = A^{-1}(H)$ et $\Delta_A = A(H)$ sont des variétés J. Comme A est biunivoque, $[D_A]$ et $[\Delta_A]$ ont même dimension. Soient S et T des opérateurs linéaires fermés bornés biunivoques avec

$$D_S = D_T = [D_A], \qquad \Delta_S = D_A, \qquad \Delta_T = \Delta_A.$$

Soit $B = T^{-1}AS$; B transforme toute variété J en une variété J d'après l'hypothèse et le théorème 3, 6 et l'on a $D_B = \Delta_B = [D_A]$; B est biunivoque. Soit D une variété linéaire fermée dans $[D_A]$; il existe une variété linéaire fermée D′ telle que $D \cap D' = 0$, $D \dot{+} D' = [D_A]$. B(D) et B(D′) sont des variétés J et, puisque B est biunivoque, on a $B(D) \cap B(D') = 0$, $B(D) \dot{+} B(D') = \Delta_B = [D_A]$; donc (th. 3, 11), B(D) est fermée. Ainsi, B transforme toute variété linéaire fermée en une variété linéaire fermée. Or, on a la proposition suivante, contenue dans des résultats de Dieudonné [1] et Mackey [1]. (P): Soit $\bar{A}$ un opérateur linéaire transformant biunivoquement un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ et (φ_i) un ensemble de vecteurs sous-tendant $\mathcal{H}$; si $\bar{A}(\mathcal{H}\ominus[\varphi_i])$ est une variété linéaire fermée pour tout i, $\bar{A}$ est borné et d'inverse borné.

Rappelons une démonstration. On a $\mathcal{H}=(\mathcal{H}\ominus[\varphi_i])\dot{+}[\varphi_i]$, donc, si $V_i=\bar{A}(\mathcal{H}\ominus[\varphi_i])$, on a $\mathcal{H}=V_i\dot{+}\bar{A}([\varphi_i])$. Donc V_i est une variété linéaire fermée telle que $\dim\mathcal{H}\ominus V_i=1$ et $\bar{A}\varphi_i=\psi_i\notin V_i$. Tout $X\in\mathcal{H}$ est de la forme $X=Y+\lambda\psi_i$ avec $Y\in V_i$, et λ est une fonctionnelle linéaire continue en X. Donc $\bar{A}^{-1}X=\bar{A}^{-1}Y+\lambda\varphi_i$, où $\bar{A}^{-1}Y\in\mathcal{H}\ominus[\varphi_i]$, d'où $(\bar{A}^{-1}X,\varphi_i)=\lambda(\varphi_i,\varphi_i)$, par suite $\varphi_i\in D_{\bar{A}^{-1*}}$. Ainsi $D_{\bar{A}^{-1*}}\supset\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}$, qui est partout dense. $\bar{A}^{-1}$ admet un prolongement fermé uniforme et comme $D_{\bar{A}^{-1}}=\mathcal{H}$, $\bar{A}^{-1}$ est fermé borné. Comme $\Delta_{\bar{A}^{-1}}=D_{\bar{A}}=\mathcal{H}$, A est fermé borné.

Revenant à B, on voit que B est fermé. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3,1 à $A=TBS^{-1}$.

On voit qu'on peut restreindre beaucoup les hypothèses.

1° On peut supposer seulement que A, biunivoque, transforme toute variété J en une variété J et que D_A est une variété J. Alors $\Delta_A=A(D_A)$ est une variété J et le reste de la démonstration s'achève comme plus haut.

2° Le point central est l'application de la proposition (P). Les hypothèses sous lesquelles (P) est valable permettent de conclure par exemple au

THÉORÈME 3,16. — *Soit* A *un opérateur biunivoque, partout défini. Il est fermé borné si et seulement si il transforme en variété* J *les variétés linéaires fermées* $H\ominus[\varphi_i]$, *où les* φ_i *forment un système de vecteurs sous-tendant* H [25].

Le rapprochement que voici est intéressant. Un opérateur linéaire biunivoque partout défini est fermé borné si : 1° il est définissable par une matrice; 2° il est fermé; 3° il transforme toute variété linéaire fermée en une variété J.

10. **Fonctionnelles J.** — Soit e un vecteur fixe non nul. Une fonctionnelle $f(X)$ sera dite fonctionnelle J si l'opérateur A_f défini par $A_fX=f(X)\,e$ est un opérateur J (définition indépendante de e). Soit A un opérateur J et Y un vecteur fixe; on a $(AX, Y)\,e=BAX$, où B est fermé borné, avec $\dim\Delta_B=1$; donc (th. 3,1) BA est un opérateur J, et la fonctionnelle (AX, Y) est une fonctionnelle J (si $Y\in D_{A^*}$, elle est prolongeable en fonctionnelle bornée partout définie). Réciproquement, d'après le théorème 3,2, si $f(X)$ est une fonctionnelle J, on a $f(X)e=BAX$, où A^{-1} et B sont fermés bornés et où $\dim\Delta_B=1$, donc $f(X)=(AX, Y)$, où Y est un vecteur fixe.

Exemple. — (A_i) étant un ensemble de vecteurs, (c_i) un ensemble de nombres

---

(25) Dans un autre article, à paraître au *Journal de Mathématiques*, on étudiera d'une manière générale les automorphismes de $\mathcal{L}$ et diverses questions connexes.

complexes tels que $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < +\infty$, la fonctionnelle $f(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i, X) c_i$, définie dans le domaine des X tels que $\sum_{i=1}^{\infty} |(A_i, X)|^2 < +\infty$, est une fonctionnelle J.

11. Conditions pour qu'un opérateur J soit fermé. — PROPOSITION 3,16. — *Un opérateur* J *uniforme* A *est fermé si et seulement si* $D_A = D_{\tilde{A}}$ (*que* A *soit uniforme ou non*).

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit V l'image de A par rapport à H, H′, U. V est une variété J disjointe de H′. L'image de $\tilde{A}$ est $[V]$. On a $D_A = P_H V$, $D_{\tilde{A}} = P_H[V]$. Si l'on a $D_A = D_{\tilde{A}}$, il existe, pour tout $X \in [V]$, un vecteur $Y \in V$ tel que $P_H X = P_H Y$, donc $X - Y \in H'$. Donc $[V] = V \dotplus (H' \cap [V])$. Comme $V \cap H' = 0$, le théorème 3,11 montre que V est fermé, donc que A est fermé.

Remarque. — L'hypothèse que A est un opérateur J est essentielle. Soit un opérateur linéaire uniforme A non borné avec $D_A = H$; on a évidemment $D_{\tilde{A}} = D_A$, et cependant A est non fermé.

THÉORÈME 3,17. — *Soit* A *un opérateur* J *uniforme; pour que* A *soit fermé, l'une quelconque des trois conditions suivantes est nécessaire et suffisante :*

1° *Si* $X_n \rightharpoonup X (X_n \in D_A)$, *et* $AX_n \rightharpoonup Y$, *alors* $X \in D_A$;

2° *Si* $X_n \rightharpoonup X (X_n \in D_A)$, *et* $\varliminf_{n=\infty} \| AX_n \| < +\infty$, *alors* $X \in D_A$;

3° *Si* $X_n \rightharpoonup X (X_n \in D_A, X \notin D_A)$, *alors* $\| AX_n \| \to +\infty$.

[Soit A un opérateur linéaire uniforme: pour qu'il soit fermé, il faut et il suffit que, si $X_n \to X (X_n \in D_A)$, et $AX_n \to Y$, on ait : 1° $X \in D_A$; 2° $Y = AX$; on ne peut omettre la condition 2° en général, comme le montre l'exemple où A est non borné et partout défini; mais le théorème montre qu'on peut l'omettre si l'on sait d'avance que A est un opérateur J.]

Démonstration. — (3) est équivalent à (2); la nécessité de (1) résulte de la définition des opérateurs fermés; la suffisance de (1) entraînera celle de (2). Montrons donc que :

a. La condition (1) est suffisante : car, si A est non fermé, il existe, avec les notations employées dans la démonstration précédente, des vecteurs $Z \in [V]$ tels que $P_H Z \notin D_A$ (prop. 3,16); Z est limite forte de vecteurs $Z_n \in V$; on a $Z_n = X_n + UAX_n$, où $X_n \in D_A$, de sorte que $X_n \to P_H Z$, $AX_n \to UP_{H'} Z$.

b. La condition (2) est nécessaire : les conditions $X_n \rightharpoonup X (X_n \in D_A)$, $\varliminf_{n=\infty} \| AX_n \| < +\infty$, entraînent, pour une suite partielle, $X_{n_i} \rightharpoonup X$, $AX_{n_i} \rightharpoonup Y$, donc $X_{n_i} + UAX_{n_i} \rightharpoonup X + UY$; si A est fermé, V est fermé, donc $X + UY \in V$, donc $X \in P_H V = D_A$.

IV. — Groupes d'opérateurs attachés à une variété J.

Dans ce chapitre, on supposera, pour simplifier, $[D] = H$ pour la variété J étudiée D.

1. **Groupe** $\mathcal{G}(D)$. — On a $D = P_H V$, où V est une variété linéaire fermée en position p avec H dans $H \oplus H'$. Soit P l'opérateur P_H restreint à V ; P transforme biunivoquement V en D. Si l'on remplace V par une autre variété linéaire fermée V' de $H \oplus H'$ en position p avec H, telle que $P_H V' = D$, et si P' est l'opérateur associé, il y a entre $P^{-1}X$ et $P'^{-1}X$, où $X \in D$, une correspondance biunivoque bornée dans les deux sens.

Soit A un opérateur linéaire transformant biunivoquement D en D, avec $D_A = \Delta_A = D$. Si l'on transforme A par P^{-1}, on obtient l'opérateur $B = P^{-1}AP$, qui transforme biunivoquement V en V. Quand on remplace V par V', B est remplacé par $B' = (P^{-1}P')^{-1}B(P^{-1}P')$, où $P^{-1}P'$ est biunivoque, borné et d'inverse borné. On peut donc choisir V une fois pour toutes.

Si A est un opérateur J, $B = P^{-1}AP$ l'est aussi (th. 3,1) ; comme $D_B = \Delta_B = V$, B est bicontinu (th. 3,4). Réciproquement, si B est de 1^{re} classe dans V, $A = PBP^{-1}$ est un opérateur J (th. 3,1) biunivoque, avec $D_A = \Delta_A = D$.

Théorème 4,1. — *Il y a un isomorphisme $\mathcal{J}$ entre le groupe $\mathcal{G}(V)$ des opérateurs* B *de 1re classe dans* V, *et le groupe $\mathcal{G}(D)$ des opérateurs* J *biunivoques* A *tels que* $D_A = \Delta_A = D$. *Les opérateurs homologues se correspondent par la formule*

$$B = P^{-1}AP.$$

On peut dire que les opérateurs de $\mathcal{G}(D)$ sont les opérateurs de 1re classe dans la topologie de D (2e interprétation de cette topologie).

2. **Sous-groupe** $\mathcal{L}(D)$. — On désignera ainsi le sous-groupe de $\mathcal{G}(D)$ constitué par les opérateurs A de $\mathcal{G}(D)$ qui admettent dans H un prolongement $\tilde{A}$ de 1re classe. On désignera par $\tilde{\mathcal{L}}(D)$ le groupe des opérateurs $\tilde{A}$, où $A \in \mathcal{L}(D)$, par $\mathcal{L}^*(D)$ le groupe des opérateurs A^*, où $A \in \mathcal{L}(D)$ [ou bien $A \in \tilde{\mathcal{L}}(D)$, car $A^* = \tilde{A}^*$].

La définition de $\mathcal{L}(D)$ fait intervenir à la fois la topologie de H et la topologie propre de D. $\mathcal{L}(D)$ jouera un rôle important au Chapitre 5 dans l'étude de la structure de D. On va montrer que $\mathcal{L}(D)$ ne se réduit pas à l'opérateur identique, et en même temps donner une construction des opérateurs de $\mathcal{L}(D)$ par le :

Théorème 4,2. — *Soit* L *un opérateur de 1re classe quelconque de* H. *Il existe un unitaire* U *tel que* $UL \in \tilde{\mathcal{L}}(D)$.

Démonstration. — Soit $\bar{D} = L(D)$. Il existe (th. 3,7) un unitaire U tel que $D = U(\bar{D})$. Ainsi, UL transforme biunivoquement D en D, et est de 1re classe. Sa restriction à D est un opérateur J (prop. 3,14).

Caractérisons les homologues dans $\mathcal{J}$ des opérateurs de $\mathcal{L}(D)$. Soit, avec les notations du paragraphe 1, $D' = P_V H$. Alors :

PROPOSITION 4,1. — *Le sous-groupe* $\mathcal{L}^*(D')$ *de* $\mathcal{G}(V)$ *et le sous-groupe* $\mathcal{L}(D)$ *de* $\mathcal{G}(D)$ *sont homologues dans* $\mathcal{J}$.

Démonstration. — Soit P_1 l'opérateur P_V restreint à H; P_1 transforme biunivoquement H en D'. Soit $A \in \mathcal{L}(D)$; $\tilde{A}$ est de 1re classe dans H. Soit $B = P^{-1}AP$ l'homologue de A dans $\mathcal{J}$, de 1re classe dans V. Soit deux vecteurs, $\overline{X} \in V$, $\overline{Y} \in D'$. On a : $\overline{Y} = P_1 Y$, où $Y \in H$. Puis

$$(\overline{X}, B^*\overline{Y}) = (B\overline{X}, \overline{Y}) = (B\overline{X}, Y) = (P^{-1}AP\overline{X}, Y) = (AP\overline{X}, Y)$$
$$= (P\overline{X}, A^*Y) = (\overline{X}, A^*Y) = (\overline{X}, P_1A^*Y) = (\overline{X}, P_1A^*P_1^{-1}\overline{Y}),$$

donc

$$B^*\overline{Y} = P_1A^*P_1^{-1}Y$$

pour tout $\overline{Y} \in D'$. $A^* = \tilde{A}^*$ est de 1re classe dans H; d'après le paragraphe 1, $P_1\tilde{A}^*P_1^{-1}$ est un opérateur de $\mathcal{G}(D')$, et même (puisque $P_1\tilde{A}^*P_1^{-1}$ est prolongeable à tout V suivant B^*, de 1re classe dans V), un opérateur de $\mathcal{L}(D')$. Ainsi $B^* \in \tilde{\mathcal{L}}(D')$, donc $B = B^{**} \in \mathcal{L}^*(D')$. Réciproquement, soit un opérateur $B \in \mathcal{L}^*(D')$. Alors, $B^* \in \tilde{\mathcal{L}}(D')$, la restriction de B^* à D' transforme biunivoquement D' en D', donc (§ 1), $C = P_1^{-1}B^*P_1$ est de 1re classe dans H. En échangeant les rôles de V et H dans le raisonnement précédent, on voit que $C \in \mathcal{L}^*(D)$, avec $C^* = PBP^{-1}$ dans D, de sorte que PBP^{-1} est bien prolongeable dans tout H en opérateur de 1re classe : $PBP^{-1} \in \mathcal{L}(D)$.

De la proposition précédente, on déduit le curieux résultat suivant :

PROPOSITION 4,2. — *Pour qu'un opérateur* L *de* 1re *classe dans* H *transforme biunivoquement* $D = P_H V$ *en* D (*où* V *et* H *sont en position p dans* $H \oplus H'$), *il faut et il suffit que* $\| P_V X \|^{-1} \| P_V L^* X \|$ *et* $\| P_V X \| \| P_V L^* X \|^{-1}$ *soient bornés quand* X *décrit* H.

Démonstration. — *a.* La condition est suffisante : si elle est remplie, on a, avec les notations antérieures, $P_1L^*P_1^{-1} \in \mathcal{L}(D')$; donc (prop. 4,1), $L^* \in \mathcal{L}^*(D)$, $L \in \tilde{\mathcal{L}}(D)$.

b. La condition est nécessaire : si $L \in \tilde{\mathcal{L}}(D)$, on a $L^* \in \mathcal{L}^*(D)$, donc (prop. 4,1), $P_1L^*P_1^{-1} \in \mathcal{L}(D')$.

Autre application de la proposition 4,1. — Il y a des opérateurs B de $\mathcal{G}(V)$, arbitrairement voisins de 1 (au sens par exemple de la topologie uniforme) dont les homologues dans $\mathcal{J}$ n'appartiennent pas à $\mathcal{L}(D)$ quand D est non fermée [bien que l'opérateur homologue de 1 soit $E_D \in \mathcal{L}(D)$] : en effet, B^*, quoique arbitrairement voisin de 1, ne conserve pas D' en général.

3. **Sous-groupe** $\mathcal{U}(D)$. — On désignera par $\mathcal{U}(D)$ le sous-groupe de $\mathcal{L}(D)$ constitué par les opérateurs de $\mathcal{G}(D)$ prolongeables en unitaires dans H. On

verra que $\mathcal{U}(D)$ est transitif dans l'ensemble des vecteurs unitaires de D. On désignera par $\tilde{\mathcal{U}}(D)$ le groupe des opérateurs $\tilde{U}$ où $U \in \mathcal{U}(D)$. Un unitaire U de H transforme biunivoquement D en D si et seulement si $U^{-1} = U^* \in \tilde{\mathcal{U}}(D)$, donc d'après la proposition 4,2 si et seulement si $\| P_V X \|^{-1} \| P_V UX \|$ et $\| P_V X \| \| P_V UX \|^{-1}$ sont bornés quand X décrit H.

Remarque. — Si $[D] \neq H$, on définira de la même façon $\mathcal{G}(D)$, $\mathcal{L}(D)$, ..., dans l'espace $[D]$.

V. — Structure géométrique des variétés J.

1. Couples de variétés en position simple par rapport à une variété J. — Soit D une variété J. Nous dirons que deux variétés linéaires fermées, V, V′, forment un couple en position simple par rapport à D si

(1) $$V \cap V' = 0,$$

(2) $$[D] = V \dotplus V',$$

(3) $$D = (D \cap V) \dotplus (D \cap V').$$

Cette notion est invariante dans tout automorphisme de $\mathcal{L}$. (2) entraîne que V et V′ sont contenues dans $[D]$ et non asymptotiques. Soit $X \in [D]$. La décomposition $X = X' + X''$ ($X' \in V$, $X'' \in V'$) existe d'après (2) et est unique d'après (1). L'opérateur linéaire fermé qui fait passer de X à X′ est uniforme et défini dans $[D]$, donc borné; donc, quand X décrit D partout dense dans $[D]$, X′ décrit une variété linéaire partout dense dans V; or, d'après (3), $X' \in D \cap V$ quand $X \in D$; donc $D \cap V$ est partout dense dans V; de même, $D \cap V'$ est partout dense dans V′.

D'après les raisonnements qui conduisent au théorème 3,11, $D \cap V$ et $D \cap V'$ (qui sont des sous-variétés J simples de D), sont fermées, disjointes, non asymptotiques, et sous-tendent D dans la topologie de D. Mais, réciproquement, des couples de sous-variétés J de D possédant ces propriétés peuvent avoir dans H une position bien plus complexe, comme le montre l'exemple qui suit le théorème 3,11.

Variétés réductrices. — On dira que la variété linéaire fermée $V \subset [D]$ réduit D si, pour tout $X \in D$, on a $P_V X \in D$. Soit alors $V' = [D] \ominus V$. On a

$$P_{V'} X = X - P_V X,$$

donc $X \in D$ entraîne $P_{V'} X \in D$. Si donc V réduit D, V′ réduit D, et V, V′, forment un couple en position simple par rapport à D.

Pour que $V \subset [D]$ réduise D, il faut et il suffit que la symétrie S_V conserve D. La condition est nécessaire : si V réduit D, $X \in D$ entraîne $P_V X \in D$, $P_{V'} X \in D$, donc $P_V X - P_{V'} X = S_V X \in D$; donc $S_V(D) \subset D \subset S_V^{-1}(D) = S_V(D)$. La condition est suffisante : si elle est remplie, $X \in D$ entraîne $S_V X \in D$, donc

$$X + S_V X = 2 P_V X \in D.$$

2. Variétés fermées contenues dans une variété J. — L'étude de ces variétés est fondamentale, à la fois pour l'étude de la structure géométrique de D et pour l'étude des opérateurs définis dans D.

Il est évident qu'une variété linéaire fermée contenue dans D réduit D.

Si $[D] = D \doteq o$, la question est sans intérêt. Supposons D à ∞ dimensions. Alors, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n vecteurs indépendants inclus dans D, $[A_1, A_2, \ldots, A_n] \subset D$. (On vient d'ailleurs de former ainsi la variété linéaire à n dimensions la plus générale contenue dans D.) Donc D contient des variétés linéaires fermées à un nombre fini quelconque de dimensions. On en déduit l'existence de symétries conservant D. On voit ainsi que $\mathfrak{U}(D)$ ne se réduit pas à l'opérateur 1.

Dans la suite, les questions de dimension devant jouer un rôle essentiel, nous supposerons H séparable et à ∞ dimensions pour éviter des complications.

Considérons, s'il en existe, les variétés linéaires fermées à ∞ dimensions contenues dans D : nous les appellerons les *noyaux* de D.

Si D n'est pas fermée, il serait intéressant de chercher des noyaux maximaux au sens de l'inclusion; mais on rencontre aussitôt une difficulté; car, soit N un noyau de D, $N \not\doteq D$, et X un vecteur de D, $X \notin N$; alors $N' = [N, X]$ est encore un noyau de D; ainsi, on forme aussitôt des noyaux $\overline{N} \supset N$ tels que $\overline{N} \ominus N$ ait un nombre fini quelconque de dimensions. On ne peut donc introduire directement des noyaux maximaux pour l'inclusion. Pour y arriver, nous identifions deux noyaux, N, N', si $N \doteq N'$, et nous ordonnons les classes d'équivalence par la relation $N \ddot{\supset} N$. Un noyau N sera dit maximal si sa classe est maximale, c'est-à-dire s'il n'existe aucun noyau N', non équivalent à N, tel que $N' \ddot{\supset} N$. On a alors la :

Proposition 5,1. — *Le noyau* N *est maximal si et seulement si il n'existe aucun noyau* $N' \supset N$ *tel que* $N' \ominus N$ *ait* ∞ *dimensions.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons que N ne soit pas maximal. Alors, il existe un noyau N' de D, non équivalent à N, tel que $N' \ddot{\supset} N$. Mais on a

$$D \supset N \dot{+} N' = N' \dot{+} [N \ominus (N \cap N')].$$

Comme $N \ominus (N \cap N') \doteq o$, $N \dot{+} N'$ est fermé donc est un noyau de D contenant N; et $(N \dot{+} N') \ominus N$ a ∞ dimensions, sinon on aurait $N \doteq N'$.

D'après la définition, on voit que tout noyau équivalent à un noyau maximal est maximal. Toute variété linéaire fermée à ∞ dimensions contenue dans un noyau maximal est un noyau; on verra une espèce de réciproque dans la proposition 5,4.

Deux noyaux N, N' seront dits *conjugués* par rapport à D si

$$N \cap N' = o, \qquad N \dot{+} N' = D.$$

Toutes ces notions sont invariantes dans tout automorphisme de $\mathcal{L}$. Il en est de même de la classification suivante des variétés J.

Classification des variétés J *à partir des noyaux.*

Classe 1 : D est fermée, à ∞ dimensions.
Classe 2 : D, non fermée, a des noyaux.

2*a*. Aucun noyau n'est maximal.
2*b*. Certains noyaux sont maximaux.

Classe 3_n : D n'a aucun noyau, et a n dimensions ($n = 1, 2, \ldots, \infty$).

Il est évident que ces classes sont disjointes et englobent tous les cas. On verra qu'aucune n'est vide. Au fur et à mesure qu'on progresse dans la classification, les propriétés s'éloignent de celles des variétés linéaires fermées à ∞ dimensions. Les variétés J à un nombre fini de dimensions sont pour plusieurs raisons (*cf.* déjà le théorème 1,10) assimilables aux variétés J de classe 3_∞ bien plus qu'à celles de classe 1 : c'est pourquoi on les a groupées dans la classe 3.

Variétés J *complémentaires d'une variété* J *donnée.*

Proposition 5,2. — *Soit* D *une variété* J *telle que* $[D] = H$. *Cherchons les variétés* J, D', *complémentaires de* D :

a. Si D *est de classe* 3, $D' = H$.

b. Si $D = H$, D' *est une variété* J *partout dense quelconque.*

c. Si D *est de classe* 2, *aucune* D' *n'est de classe* 3. *Mais, soit* $\overline{D}$ *une variété* J *partout dense quelconque de classe* 1 *ou* 2 *; il existe une infinité d'unitaires* U *tels que* $U(\overline{D})$ *soit complémentaire de* D.

Démonstration. — (*a*) résulte de la proposition 3,13 et (*b*) de la proposition 2,5. Passons à (*c*). D étant de classe 2, D' ne peut être de classe 3 d'après (*a*). Soit N un noyau de D; $H \ominus N$ a ∞ dimensions (sinon, $D = H$); soit $\overline{N}$ un noyau de $\overline{D}$, de déficience infinie dans H; d'après la proposition 2,5, si $U(\overline{N}) = H \ominus N$ pour un unitaire U, $U(\overline{D})$ et D sont complémentaires. Et l'on a ainsi construit, quand N et $\overline{N}$ varient, l'unitaire U le plus général répondant aux conditions de la proposition (d'après la proposition 2,5 *a*).

Existence de noyaux conjugués. — Il n'en est pas question pour les variétés J de classe 3. Soit D une variété J de classe 2, N un noyau de D, $W = [D] \ominus N$, $\Delta = W \cap D$. On a $D = N \dotplus \Delta$ (car N réduit D), Δ est partout dense dans W et a ∞ dimensions (sinon, $D = [D]$). Pour qu'un vecteur $X \in [D]$ soit dans D, il faut et il suffit que $P_W X \in \Delta$. Donc :

Lemme 5,1. — *Pour qu'une variété linéaire fermée* $M \subset [D]$, *à* ∞ *dimensions soit un noyau de* D, *il faut et il suffit que* $P_W M \subset \Delta$.

N et $W = [\Delta]$ ont le même nombre de dimensions. D'après le théorème Julia, Δ est projection sur W de variétés linéaires fermées de [D] en position avec N et W dans [D]. Soit N' l'une d'elles. Pour que $X \in N \dotplus N'$, il faut et il suffit que $X \in [D]$ et que $P_W X \in P_W N' = \Delta$. Donc $D = N \dotplus N'$.

Théorème 5,1. — *Si une variété* J *non fermée contient un noyau* N, *elle* *contient une infinité de noyaux conjugués* N′, *asymptotiques à* N, *en position p avec* N *dans* [D]. *L'ensemble des noyaux conjugués de* N, *en position p avec* N *dans* [D], *est l'ensemble des variétés linéaires fermées* N′ *en position p avec* N *dans* [D], *telles que* $P_{H\ominus N}N' = D \cap (H \ominus N)$.

On verra au Chapitre 7 une construction de tous ces noyaux N.

Remarques. — 1° Soient N et N′ deux noyaux conjugués en position *p* dans [D]. Il existe (th. 1,1) une infinité de symétries S_V de [D] qui échangent N et N′. Ces symétries appartiennent à $\widetilde{\mathfrak{U}}(D)$: N et N′ jouent le même rôle dans D. On peut montrer aussi que, pour S_V bien choisie, V est un nouveau noyau de D, conjugué de N et de N′.

2° On a précisé quelles sont les variétés J de la forme $V_1 \dot{+} V_2$, où V_1 et V_2 sont deux variétés linéaires fermées à ∞ dimensions : ce sont les variétés J de classe 1 ou 2.

3. **Variétés J de classe** 3_∞. — D'après le théorème 1,10, nous savons qu'il en existe [ce sont des domaines des valeurs d'opérateurs linéaires fermés complètement continus ([25′])]. Supposons [D] = H. Soit H′ un espace de Hilbert orthogonal à H. Dans $H \oplus H'$, D est projection sur H (théorème de Julia) d'une variété linéaire fermée V en position *p* avec H, complètement asymptotique à H′ (th. 1,4). Réciproquement, si V, en position *p* avec H, est complètement asymptotique à H′, $P_H V$ est de classe 3_∞ (th. 1,4). Dans ce cas (prop. 1,7) V est non asymptotique à H. Appliquons la proposition 2,2.

Théorème 5,2. — *Une variété* J *de classe* 3_∞, D, *telle que* [D] = H, *est projection sur* H *de variétés linéaires fermées* $V \subset H \oplus H'$, *en position p avec* H. *Si* V_1 *est l'une d'elles, toutes les autres s'obtiennent de la manière suivante : soit* $\mathfrak{T}$ *l'ensemble des opérateurs de* 1^re^ *classe de* $H \oplus H'$, *réduits par* H, *se réduisant à l'identité dans* H; *on prend les variétés linéaires fermées* $V = T(V_1)$, *où* $T \in \mathfrak{T}$. *Toutes ces variétés linéaires fermées sont complètement asymptotiques à* H′. *Réciproquement, toute variété linéaire fermée* V *en position p avec* H *et complètement asymptotique à* H′ *se projette sur* H *suivant une variété* J *de classe* 3_∞ *partout dense dans* H.

4. **Variétés J de classe** 2*b*. — Nous allons à la fois montrer leur existence et les caractériser simplement.

a. Noyaux conjugués maximaux. — Soit N un noyau maximal de D, variété J de classe 2*b*, telle que [D] = H. Soit $W = H \ominus N$, $\Delta = W \cap D$; on a, $D = N \dot{+} \Delta$, et $[\Delta] = W$. Δ est de classe 3_∞, car : 1° si Δ était fermée, D serait fermée; 2° si Δ contenait un noyau N, $N \dot{+} \overline{N} = \overline{\overline{N}}$ serait un noyau de D,

([25′]) Ceci permet de montrer que toute variété J de classe 3 est réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles fortement compacts. De plus, cette propriété caractérise les variétés J de classe 3 dans l'ensemble des variétés J, comme le montre aisément l'utilisation de la notion de catégorie [*Cf.* note ([17])].

$\overline{\overline{N}} \ominus N = \overline{N}$ aurait ∞ dimensions, de sorte que N ne serait pas maximal. Réciproquement, soit N une variété linéaire fermée de dimension et déficience infinies, et Δ une variété J de classe 3_∞ telle que $[\Delta] = H \ominus N$. $D = N \dot{+} \Delta$ est une variété J de classe $2b$, car N est un noyau maximal. Ainsi :

Proposition 5,3. — *Pour qu'une variété* J *partout dense*, D, *soit de classe* $2b$, *il faut et il suffit qu'il existe une variété linéaire fermée à* ∞ *dimensions*, N, *et une variété* J *de classe* 3_∞, Δ, *avec* $[\Delta] = H \ominus N$, *telles que* $D = N \dot{+} \Delta$. N *est alors un noyau maximal.*

D'après le théorème 5,2, Δ est projection sur $W = H \ominus N$ d'une variété linéaire fermée N' de H, en position p avec N, complètement asymptotique à N. On a $D = N \dot{+} \Delta = N \dot{+} N'$. D'après la proposition 1,5, N et N' sont complètement asymptotiques; donc (th. 5,2) la projection de N sur $H \ominus N'$ est de classe 3_∞, de sorte que (prop. 5,3) N' est aussi un noyau maximal [d'ailleurs, on a vu qu'une symétrie de $\widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ échange N et N'].

Si l'on considère maintenant deux variétés linéaires fermées en position p et complètement asymptotiques N et N', $\Delta = P_{H \ominus N} N'$ est de classe 3_∞ (th. 5,2), donc (prop. 5,3) $D = N \dot{+} N' = N \dot{+} \Delta$ est de classe $2b$, N et N' sont noyaux maximaux de D. Donc :

Théorème 5,3. — *Si* N, N' *sont deux variétés linéaires fermées en position* p, *complètement asymptotiques*, $D = N \dot{+} N'$ *est une variété* J *de classe* $2b$ *dont* N, N' *sont deux noyaux maximaux. Réciproquement, étant donnée une variété* J *partout dense* D, *de classe* $2b$, *tout conjugué* N' *d'un noyau maximal* N *en position* p *avec* N *est complètement asymptotique à* N *et lui-même maximal; l'ensemble de ces noyaux s'obtient à partir de l'un d'eux* N'_1 *de la manière suivante : soit* $\mathfrak{T}$ *l'ensemble des opérateurs de* 1^re^ *classe dans* H, *réduits par* N, *se réduisant à l'identité dans* $H \ominus N$; *on prend les variétés linéaires fermées* $N' = T(N'_1)$, *où* $T \in \mathfrak{T}$.

b. Distribution des noyaux :

Lemme 5,2. — *Soit* D *une variété* J *partout dense de classe* $2b$, N *un noyau maximal*, M *un noyau quelconque. a.* M *est complètement asymptotique à* N; *b.* $P_N(M)$ *est fermé; c.* M *est maximal si et seulement si* $N \ominus P_N M \doteq 0$.

Démonstration. — *a.* D'après le lemme 5,1 et avec les mêmes notations $P_W M \subset \Delta$, donc $P_W M$ est de classe 3 : M est complètement asymptotique à N (th. 1,4).

b. D'après (*a*), M est non asymptotique à W (prop. 1,7), donc $P_N M$ est fermé.

c. 1° La condition est nécessaire : si $N \ominus P_N M$, qui est orthogonal à M, a ∞ dimensions, $M_1 = M \dot{+} (N \ominus P_N M)$ est un noyau de D, et $M_1 \ominus M$ a ∞ dimensions : M n'est pas maximal.

2° La condition est suffisante : elle entraîne que $M \doteq M \dot{+} (N \ominus P_N M) = M_1$.

D'autre part, $M_1 \cap W \doteq o$ puisque Δ est de classe 3, donc $M_1 \doteq M_1 \ominus (M_1 \cap W) = M'$. Ainsi, $M \doteq M'$, et M' est en position p' avec N, et complètement asymptotique à N puisque $P_W M' \subset \Delta$. Donc (prop. 1,5) N et M' sont complètement asymptotiques en position p', donc N et $H \ominus M'$ sont disjointes et non asymptotiques. Pour prouver que M est maximal, il suffit de prouver que M' est maximal, donc que $D \cap (H \ominus M')$ est de classe 3_∞ (prop. 5,3). Or, si $D \cap (H \ominus M')$ contenait un noyau n, on aurait $P_W n \subset \Delta$ (lemme 5,2); ceci est impossible, car, $n \subset H \ominus M'$ étant disjoint de N et non asymptotique à N, $P_W n$ serait un noyau de Δ.

Proposition 5,4. — *Si* D *est de classe* $2b$, *tout noyau de* D *est contenu dans un noyau maximal.*

(C'est là une propriété du réseau $\mathcal{L}$.)

Démonstration. — Avec les notations précédentes, on a $M \subset M_1$ et $P_N M_1 = N$, donc M_1 est maximal (lemme 5,2).

Ainsi, l'étude des noyaux est ramenée à l'étude des noyaux maximaux. Le raisonnement du lemme 5,2 donne au sujet des noyaux maximaux les résultats suivants :

Proposition 5,5.— *Si* D, *partout dense*, *admet le noyau maximal* M, *les noyaux maximaux de* D *sont*, *à une équivalence près*, *les variétés linéaires fermées* M, *en position* p' *avec* N, *telles que* $P_{H \ominus N} M \subset D \cap (H \ominus N)$.

Proposition 5,6. — *Deux noyaux maximaux quelconques sont complètement asymptotiques* (propriété de structure de $\mathcal{L}$).

5. **Variétés J de classe** $2a$. — Lemme 5,3. — *Soit* D *une variété* J, N *un noyau non maximal de* D, $\Delta = D \cap (H \ominus N)$. *On a* $D \approx \Delta$.

Démonstration. — Soit $N' \supset N$ un noyau de D tel que $N' \ominus N = N''$ ait ∞ dimensions; N'' est un noyau de Δ. Soit $\Delta' = D \cap (H \ominus N')$. On a $D = N' \dot{+} \Delta'$, $\Delta = N'' \dot{+} \Delta'$. Soit I un opérateur isométrique avec $D_I = N'$, $\Delta_I = N''$. L'opérateur $IP_{N'} + P_{[\Delta']}$ transforme isométriquement D en Δ.

Conséquence. — Si D est une variété J de classe $2a$, tout noyau N est non maximal, donc Δ est de classe $2a$. Les noyaux ne permettent donc pas une décomposition analogue à celle de la prop. 5,3 pour les variétés J de classe $2b$. Notons que nous n'avons pas encore montré l'existence de variétés J de classe $2a$.

6. **Bases des variétés J.** — Soit une suite (A_i) de vecteurs. Si S est une suite d'entiers, soit W_S la variété linéaire fermée sous-tendue par les A_{n_i} où $n_i \in S$. Soit D une variété J. On dira que les A_i forment une base de D si, S et S' formant une partition quelconque de la suite des entiers, W_S et $W_{S'}$ forment un couple en position simple par rapport à D (définition invariante dans tout automorphisme de $\mathcal{L}$ si l'on considère, non les A_i, mais les variétés linéaires à une dimension qui les portent). La définition entraîne que $A_i \in D$ pour tout i (faire $S = \{i\}$), et

que les A_i forment un système hétérogonal en direction dans $[D]$ (théorème de Lorch).

Proposition 5,7. — *Pour qu'une suite* (A_i) *de vecteurs soit une base de* D, *il faut et il suffit qu'elle soit hétérogonale en direction à la fois dans* $[D]$ *et dans la topologie de* D.

Autrement dit, si D est projection sur H d'une variété linéaire fermée $V \dot{\subset} H \oplus H'$, disjointe de H', et si $A_i = P_H \overline{A}_i (\overline{A}_i \in V)$, il faut et il suffit que les suites (A_i), $(\overline{A}_i)$ soient hétérogonales en direction dans $[D]$ et V respectivement.

Démonstration. — *a.* La condition est suffisante : soient S, S′ une partition de la suite des entiers, et $\overline{W}_S$, $\overline{W}_{S'}$ les variétés linéaires fermées sous-tendues par les $\overline{A}_{n_i}$ tels que $n_i \in S$, $n_i \in S'$. Puisque (A_i) est hétérogonale en direction dans $[D]$, on a $W_S \cap W_{S'} = 0$, $[D] = W_S \dot{+} W_{S'}$. De même, $V = \overline{W}_S \dot{+} \overline{W}_{S'}$, et, en projetant sur H, $D = P_H \overline{W}_S \dot{+} P_H \overline{W}_{S'}$. Or, on a aussitôt $P_H \overline{W}_S \subset W_S$, $P_H \overline{W}_{S'} \subset W_{S'}$, donc $P_H \overline{W}_S \subset D \cap W_S$, $P_H \overline{W}_{S'} \subset D \cap W_{S'}$; *a fortiori*

$$D = (D \cap W_S) \dot{+} (D \cap W_{S'}).$$

b. La condition est nécessaire. Supposons (A_i) base de D; soit (B_i) la suite duale de (A_i) dans $[D]$: elle est hétérogonale en direction dans $[D]$. Soit $\overline{B}_i = P_V B_i$. On a

$$(\overline{A}_i, \overline{B}_j) = (\overline{A}_i, P_V B_j) = (\overline{A}_i, B_j) = (A_i, B_j) = \delta_{ij} \tag{1}$$

[ceci ne suffit pas à prouver que les suites $(\overline{A}_i)$, $(\overline{B}_i)$ sont duales, car on ne sait pas si les $\overline{A}_i$ sous-tendent V]. Cherchons les vecteurs de V qui se projettent sur H suivant $D \cap W_S$: ils forment une variété linéaire fermée, W'_S, de V. Une condition nécessaire et suffisante pour que $X \in W'_S$ est que $P_H X \in W_S$, ou $(P_H X, B_i) = 0 (i \in S')$, ou $(X, B_i) = 0 (i \in S')$, ou $(X, \overline{B}_i) = 0 (i \in S')$. W'_S est donc la variété linéaire fermée complémentaire dans V de la variété linéaire fermée $\overline{\overline{W}}_{S'}$ sous-tendue par les $\overline{B}_i$ où $i \in S'$. De même, la variété linéaire fermée $W'_{S'}$ qui se projette sur H suivant $D \cap W_{S'}$ est la complémentaire dans V de la variété linéaire fermée $\overline{\overline{W}}_S$ sous-tendue par les $\overline{B}_i$ où $i \in S$. Puisque les (A_i) forment une base de D, on a $D = (D \cap W_S) \dot{+} (D \cap W_{S'})$, d'où $V = W'_S \dot{+} W'_{S'}$. D'ailleurs $W'_S \cap W'_{S'} = 0$ (car $W_S \cap W_{S'} = 0$). Donc W'_S et $W'_{S'}$ sont en position p'' dans V et non asymptotiques. Il en est alors de même de $\overline{\overline{W}}_S$ et $\overline{\overline{W}}_{S'}$ (prop. 1,2). Alors (théorème de Lorch) les $\overline{B}_i$ forment un système hétérogonal en direction dans V. Dans ces conditions, les égalités (1) prouvent que $(\overline{A}_i)$ est la suite duale de $(\overline{B}_i)$ donc est hétérogonale en direction dans V (on voit que $W'_S = \overline{W}_S$, $W'_{S'} = \overline{W}_{S'}$).

Remarquons que $(\overline{B}_i)$ est ainsi une base de $P_V H$.

Théorème 5,4. — *Pour que* (A_i) *soit une base, hétérogonale dans* $[D]$, *de la* *variété* J, D, *il faut et il suffit* : 1° *que* (A_i) *soit une suite hétérogonale dans* [D]; 2° *qu'on puisse trouver une suite de nombres réels* a_i *avec* $\inf_i a_i > 0$, *tels que* D *soit l'ensemble des vecteurs représentés par les séries* (*commutativement convergentes*) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i A_i$, où $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \mid x_i \mid^2 < +\infty$.

Démonstration. — Les conditions sont évidemment suffisantes. Montrons qu'elles sont nécessaires. Reprenons les notations de la démonstration précédente. (A_i) est supposée base de D. Soit $a_i = \| \bar{A}_i \|$. Les vecteurs $a_i^{-1} \bar{A}_i$ forment un système hétérogonal dans V, donc V est l'ensemble des vecteurs représentés par les séries $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{A}_i$, où $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \mid x_i \mid^2 < +\infty$. Donc D est l'ensemble des vecteurs représentés par les séries $\sum_{i=1}^{\infty} x_i A_i$, où $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \mid x_i \mid^2 < +\infty$. D'ailleurs,

$$\inf a_i \geqq \inf \| A_i \| > 0,$$

puisque A_i est hétérogonale.

Soit (A_i) une base, hétérogonale dans [D], de D. Soit une suite (a_i) de nombres réels, avec $\inf a_i > 0$ ([26]), tels que D soit l'ensemble des vecteurs

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i A_i, \qquad \text{où} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \mid x_i \mid^2 < +\infty.$$

On dira alors que a_i est une valeur propre de D correspondant au vecteur A_i de la base (A_i). Il est dès maintenant évident que la suite de valeurs propres correspondant à la base (A_i) n'est pas exactement déterminée, car par exemple on peut modifier arbitrairement un nombre fini de valeurs propres.

Montrons que toute variété J possède des bases, et même des bases orthonormales. On peut se borner au cas où D a ∞ dimensions; alors il existe $D' \approx D$ tel que $[D'] = H$. Supposons donc $[D] = H$. On a alors $D = \Delta_K$, avec K self-adjoint, $0 < K < 1$ (th. 2,3). Soit (V_λ) la famille des variétés spectrales de K, et $W_n = V_{n^{-1}} \ominus V_{(n+1)^{-1}}$. $X \in D_{K^{-1}} = \Delta_K$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \| K^{-1} P_{W_n} X \|^2 < +\infty$; or, $n \| P_{W_n} X \| \leqq \| K^{-1} P_{W_n} X \| \leqq (n+1) \| P_{W_n} X \|$, donc $X \in \Delta_K$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \| P_{W_n} X \|^2 < +\infty$. Si ($e_p^n$) est une base orthonormale de W_n, les e_p^n (n et p variables) forment une base orthonormale de D avec les valeurs propres correspondantes $a_p^n = n$ ([27]).

Signification de l'existence d'une base orthonormale : Soit (e_i) une base orthonormale de D, et (a_i) une suite correspondante de valeurs propres. On a $D = \Delta_k$, où k est l'opérateur self-adjoint borné positif diagonal dans le cas p défini

---

([26]) On pourrait écarter cette restriction, mais elle simplifie la suite de l'exposé.

([27]) C'est là essentiellement la démonstration de Köthe [1].

par $ke_i = a_i^{-1} e_i$. Ceci précise le théorème 2,3 et fournit la construction annoncée de l'opérateur A_1 du théorème 2,2.

La structure géométrique des variétés J est élucidée par les notions de base et de valeur propre. Mais il reste à étudier l'ensemble des suites de valeurs propres et la répartition des bases, ce qu'on va faire aux paragraphes 7 et 8 respectivement.

7. **Valeurs propres.** — Théorème 5,5. — *Soit une variété* J, D, *et une base, hétérogonale dans* [D], *de* D. *L'ensemble des suites de valeurs propres correspondantes est l'ensemble des suites de nombres positifs équivalentes à une suite particulière.*

Démonstration. — Soit (a_i) une suite de valeurs propres correspondant à la base (A_i), hétérogonale dans [D]. Si (a'_i) est une suite de nombres positifs équivalente à (a_i), c'est évidemment une suite de valeurs propres correspondant à la base (A_i). Si (a'_i) n'est pas équivalente à (a_i), (a'_i) ne peut être une suite de valeurs propres correspondant à (A_i) : on a, ou bien $\inf a_i^{-1} a'_i = 0$, ou bien $\sup a_i^{-1} a'_i = +\infty$; si par exemple $\inf a_i^{-1} a'_i = 0$, on a $\lim\limits_{p=\infty} a_{i_p}^{-1} a'_{i_p} = 0$ pour une suite partielle; si $\varliminf\limits_{p=\infty} a_{i_p} < +\infty$, on en déduit $\varliminf\limits_{p=\infty} a'_{i_p} = 0$, et la suite (a'_i) ne peut être une suite de valeurs propres; si $\lim\limits_{p=\infty} a_{i_p} = +\infty$, on a $\lim\limits_{p=\infty} a_{i_p}^{-2}(1 + a'^2_{i_p}) = 0$, donc on peut trouver une suite (x_{i_p}) telle que

$$(1) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} (1 + a'^2_{i_p}) \, |x_{i_p}|^2 < +\infty, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} a^2_{i_p} \, |x_{i_p}|^2 = +\infty;$$

en particulier, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |x_{i_p}|^2 < +\infty$; donc $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x_{i_p} A_{i_p}$ converge commutativement vers un vecteur X, et les formules (1) donnent la contradiction $X \in D$, $X \notin D$, si l'on admet que (a'_i) est une suite de valeurs propres.

Ainsi, la suite des valeurs propres correspondant à une base, hétérogonale dans [D], donnée, est déterminée à une équivalence près.

Théorème 5,6. — *Soient* (A_i), (A'_i), (a_i), (a'_i) *des bases, hétérogonales dans* [D], *de* D, *et des suites de valeurs propres correspondantes;* (a_i) *et* (a'_i) *sont semblables.*

Démonstration. — D est (th. 5,4) le domaine des valeurs des deux opérateurs linéaires fermés bornés T et T' définis dans [D] par $TA_i = a_i^{-1} A_i$, $T'A'_i = a'^{-1}_i A'_i$. T et T' sont équivalents dans [D] (th. 2,2). Le théorème résulte alors (sans la représentation spectrale) du corollaire du théorème de Köthe.

Si $i \to \varphi(i)$ est une permutation telle que (a_i) et $(a'_{\varphi(i)})$ soient équivalentes, on dira que A_i et $A'_{\varphi(i)}$ sont des vecteurs associés des deux bases (il est évident que cette association n'est pas exactement déterminée, car on peut par exemple associer à un nombre fini de A_i des A'_j arbitraires).

Le théorème 5,5 prouve que, si les deux bases coïncident, on peut, pour deux suites distinctes de valeurs propres, associer A_i à A_i pour tout i.

Ainsi, la suite des valeurs propres d'une variété J est déterminée à une similitude près. Par le troisième théorème que voici, on va terminer complètement l'étude des valeurs propres :

THÉORÈME 5,7. — *Soient* D, D′, *deux variétés* J. *On a* $D \approx D'$ *si et seulement si les suites de valeurs propres de* D, D′ *sont semblables.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On peut d'abord trouver $\overline{D} \approx D$ tel que $[\overline{D}] = [D']$. Soient $(\overline{A}_i)$, (A'_i), $(\overline{a}_i)$, (a'_i) des bases, hétérogonales dans $[\overline{D}]$, de $\overline{D}$ et D′, et des suites de valeurs propres correspondantes, supposées semblables. On peut admettre que $\overline{a}_i = a'_{\varphi(i)}$, φ étant une application biunivoque de la suite des entiers sur elle-même. L'opérateur T, de première classe dans $|\overline{D}|$, défini par $T\overline{A}_i = A'_{\varphi(i)}$, transforme $\overline{D}$ en D′. Donc (th. 3,7) $\overline{D} \simeq D'$.

Remarque. — A étant un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p, on a vu que les opérateurs équivalents à A sont caractérisés par la donnée, à une transformation unitaire près, de Δ_A. Les invariants de cette classe d'opérateurs sont donc la suite des valeurs propres de Δ_A, définie à une similitude près (*cf.* Köthe [1]).

8. **Répartition des bases.** — On en ramène l'étude à celle de $\widetilde{\mathfrak{L}}(D)$ par le théorème suivant (on suppose $[D] = H$ pour simplifier) :

THÉORÈME 5,8. — *Pour que* $T \in \widetilde{\mathfrak{L}}(D)$, *il faut que* T *échange les bases hétérogonales de* D *avec correspondance de vecteurs associés; il suffit que* T, *opérateur linéaire fermé, transforme une base hétérogonale de* D *en une base hétérogonale de* D *avec correspondance de vecteurs associés.*

Démonstration. — Si $T \in \widetilde{\mathfrak{L}}(D)$, si (A_i) est une base hétérogonale de D et (a_i) une suite de valeurs propres correspondantes, (TA_i) et $(T^{-1}A_i)$ sont aussi des bases de D, avec la même suite de valeurs propres. Si T, opérateur linéaire fermé, transforme une base (A_i) hétérogonale de D en une base (A'_i) hétérogonale de D avec correspondance des vecteurs associés, et si (a_i), (a'_i) sont des suites de valeurs propres correspondantes, on peut supposer $TA_i = A'_i$, $a_i = a'_i$; comme T est linéaire fermé, T est de première classe, et $T(D) = D$.

THÉORÈME 5,9. — *Soit* S *un système hétérogonal quelconque. Il existe des unitaires* U *tels que* U(S) *soit base de* D.

Démonstration. — Soit S′ une base hétérogonale de D. Il existe un opérateur L de première classe tel que $S = L(S')$. Soit U tel que $UL \in \widetilde{\mathfrak{L}}(D)$ (th. 4,2). $UL(S') = U(S)$ est une base de D d'après le théorème 5,8.

Au sujet des bases orthonormales, on peut énoncer aussitôt, en appliquant la définition, les théorèmes 5,4 et 5,8, les résultats suivants :

THÉORÈME 5,10. — *Une base orthonormale* (e_i) *de* H *est base de* D *si et seulement si chaque variété linéaire fermée* $[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots]$ *réduit* D. *Si* (a_i)

est une suite correspondante de valeurs propres, un vecteur X *de coordonnées* $x_i = (X, e_i)$ *appartient à* D *si et seulement si* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 |x_i|^2 < +\infty$ [28].
Un opérateur linéaire fermé T *appartient à* $\widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ *si et seulement si il échange deux bases orthonormales de* D *avec correspondance de vecteurs associés.*

On va montrer qu'il y a une infinité de bases orthonormales, donc qu'il n'existe pas de système orthonormal possédant par rapport à D de position distinguée :

Proposition 5,8. — *Soit un nombre fini de vecteurs orthonormaux* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ *de* D. *Il existe une base orthonormale de* D *qui contient les* ε_i.

Démonstration. — Soit $V = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n] \subset D$, $\Delta = D \cap (H \ominus V)$; on a $D = V \dot{+} \Delta$. Soit (e_i) une base orthonormale de Δ. Il est immédiat que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, e_1, e_2, \ldots)$ est base orthonormale de D.

Proposition 5,9. — *Soient deux variétés linéaires à* n *dimensions* (n *fini*), V, V′, *incluses dans* D. *On a* $V' = U(V)$ *pour un* $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$. *En particulier,* $\widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ *est transitif dans l'ensemble des vecteurs unitaires de* D.

Démonstration. — Soient (ε_i) et (ε'_i) des bases orthonormales de V et V′, et (φ_i), (φ'_i) des bases orthonormales de D contenant respectivement les ε_i et les ε'_i (prop. 5,8). On peut associer aux ε_i des vecteurs arbitraires de (φ'_i), par exemple les ε'_i. Donc (th. 5,10), il existe un unitaire $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ tel que $U\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Alors $U(V) = V'$.

Proposition 5,10. — *Soit* D *une variété* J, N *et* N′ *des noyaux non maximaux de* D. *On a* $N' = U(N)$ *pour un* $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ [29].

(Ainsi tous les noyaux non maximaux jouent le même rôle dans D, si D est de classe $2b$; si D est de classe $2a$, tous les noyaux jouent le même rôle.)

Démonstration. — Soit $\Delta = D \cap (H \ominus N)$, $\Delta' = D \cap (H \ominus N')$. On a (lemme 5,3) $D \approx \Delta \approx \Delta'$, donc il existe un opérateur isométrique I tel que

$$D_I = [\Delta], \qquad \Delta_I = [\Delta'], \qquad I(\Delta) = \Delta'.$$

Soit J un opérateur isométrique tel que $D_J = N$, $\Delta_J = N'$. On a

$$U = JP_N + IP_{[\Delta]} \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D) \qquad \text{et} \qquad U(N) = N'.$$

---

(28) Ceci permet de montrer par exemple que les variétés définies par des conditions du type $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p |x_i|^p < +\infty$, où $1 \leq p < +\infty$, $p \neq 2$, ne sont pas des variétés J (et prouve donc que toutes les variétés linéaires ne sont pas des variétés J).

(29) Dans un autre article [*cf.* note (25)], on étudiera systématiquement la relation d'ordre suivante entre deux variétés linéaires fermées, V, V′, contenues dans D : il existe un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ tel que $U(V) \subset V'$.

Remarque. — D étant projection sur H d'une variété linéaire fermée V en position p avec H dans $H \oplus H'$, rechercher la répartition des bases de D revient à étudier la répartition des systèmes hétérogonaux de V qui se projettent sur H suivant des systèmes hétérogonaux en direction. D'après la prop. 4,1 et le théorème 5,8, on sait que, si S est un tel système, il existe des systèmes hétérogonaux de V arbitrairement voisins (en un sens facile à préciser) de S, et qui ne se projettent pas sur H suivant des bases de D. On peut d'ailleurs obtenir ce résultat d'une autre façon; en utilisant la démonstration de la prop. 5,7, on voit que :

Proposition 5,11. — *Pour que le système hétérogonal* $(\bar{A}_i)$ *de* V *se projette sur* H *suivant une base de* $P_H V$, *il faut et il suffit que la suite duale de* $(\bar{A}_i)$ *soit une base de* $P_V H$.

9. **Définition équivalente des bases.** — Proposition 5,12. — *Supposons* $[D] = H$. *Un système hétérogonal* (A_i) *est base de* D *si et seulement si*, T *étant un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p quelconque tel que* $\Delta_T = D$, *il existe un système* (A'_i), *hétérogonal en direction, tel que* $A_i = TA'_i$. *On peut prendre* $a_i = \| A'_i \|$ *comme valeur propre de* D *correspondant à* A_i.

Démonstration. — Soit V une variété linéaire fermée de $H \oplus H'$, en position p avec H, telle que $P_H V = D$. Soit U un opérateur isométrique tel que $D_U = H$, $\Delta_U = V$. L'opérateur $P_H U = \bar{T}$ est fermé borné dans le cas p dans H, et $\Delta_{\bar{T}} = D$. Tout opérateur linéaire fermé borné T dans le cas p de H tel que $\Delta_T = D$ est donc de la forme $T = P_H UL$, avec L de première classe dans H. Soit $\bar{A}_i$ le vecteur de V tel que $P_H \bar{A}_i = A_i$. Les $(UL)^{-1} \bar{A}_i$ sont les A'_i de la prop. La réciproque est immédiate, en utilisant le théorème 5,4. On sait qu'on peut prendre $a_i = \| \bar{A}_i \| = \| LA_i \|$; or, les suites $(\| A_i \|)$, $(\| LA_i \|)$ sont équivalentes.

10. **Classe et valeurs propres d'une variété J.** — Supposons $[D] = H$ pour simplifier. La connaissance d'une suite de valeurs propres, qui définit D à un unitaire près, doit permettre de déterminer la classe de D. Soit E l'ensemble de nombres que constitue une suite de valeurs propres de D, chaque nombre étant compté avec sa multiplicité; soit E', E'' ses deux premiers dérivés (les conditions qui vont intervenir sont, comme se doit, invariantes quand on transforme E par similitude).

Proposition 5,13. — *On a les équivalences suivantes : a.* D *de classe* I $\rightleftharpoons +\infty \notin E'$; *b.* D *de classe* $3_\infty \rightleftharpoons E' = \{+\infty\}$; *c.* D *de classe* $2b \rightleftharpoons E'$ *contient* $+\infty$, *au moins un point à distance finie, et* $+\infty \notin E''$; *d.* D *de classe* $2a \rightleftharpoons +\infty \in E''$.

Démonstration. — *a.* Immédiat.

b. Si E' contient un point à distance finie, il existe une suite infinie bornée $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots)$ de valeurs propres. Soit $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots)$ les vecteurs correspondants d'une base orthonormale; D contient le noyau $[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots]$. Réciproquement, si D contient un noyau N, on a $D = N \dotplus \Delta$, où $\Delta = D \cap (H \ominus N)$; soit (ε_i) une base orthonormale de Δ, (a_i) une suite correspondante de valeurs propres, (e_i) une base orthonormale de N. On peut prendre $(\varepsilon_1, e_1, \varepsilon_2, e_2, \ldots)$ pour base orthonormale de D, et $(a_1, 1, a_2, 1, \ldots)$ pour suite correspondante de valeurs propres. On voit que $1 \in E'$.

c. D, de classe $2b$, se met sous la forme $N \dotplus \Delta$, où N est un noyau maximal, et $\Delta \subset H \ominus N$ de classe 3_∞; en appliquant à N et Δ les cas (a) et (b), on voit que la suite des valeurs propres se partage en une suite bornée et une suite tendant vers $+\infty$; donc E' contient un ensemble borné et $+\infty$, $+\infty \notin E''$. Réciproquement, si $+\infty \notin E''$, et si E' contient $+\infty$ et un point à distance finie, E se partage en un ensemble infini borné et une suite tendant vers $+\infty$; il suffit alors d'appliquer en sens inverse les cas (a) et (b).

d. Les seules circonstances exclues jusqu'ici sont : D de classe $2a$, $+\infty \in E''$; donc ces circonstances sont équivalentes. On a ainsi montré en même temps l'existence de variétés J de classe $2a$.

Remarque. — On peut considérer qu'une variété J à n dimensions (n fini) possède la suite de valeurs propres $(a_1, a_2, \ldots, a_n, +\infty, +\infty, \ldots)$, ce qui rapproche à nouveau les variétés J de classes 3_n et 3_∞.

11. Classification complète des variétés J. — D'après les théorèmes 5,5, 5,6, 5,7, il suffit de classer les suites (a_i), avec $\inf a_i > 0$, en considérant comme identiques deux suites semblables.

D'abord en remplaçant (a_i) par une suite équivalente, on peut supposer tous les a_i entiers, ou égaux à q^{n_i} (q étant un nombre fixe supérieur à 1, n_i un entier dépendant de i); on peut par exemple supposer $a_i = 2^{n_i}$ pour tout i.

Variétés J *de classe* 3_∞. — Comme $\lim\limits_{i=+\infty} a_i = +\infty$, on peut supposer, en effectuant au besoin une permutation, que la suite a_i est non décroissante. Or, on a le

Lemme 5,4. — *Soit* (a_i) *et* (a'_i) *deux suites de nombres positifs non décroissants. S'il existe une permutation* $i \to \varphi(i)$ *de la suite des entiers telle que* $a_i'^{-1} a_{\varphi(i)} \leq M$ *pour tout* i, *alors on a aussi* $a_i'^{-1} a_i \leq M$ *pour tout* i.

Démonstration. — On a $a_1'^{-1} a_{\varphi(1)} \leq M$; donc, comme $a_1 \leq a_{\varphi(1)}$, on a déjà $a_1'^{-1} a_1 \leq M$. Supposons qu'on ait $a_i'^{-1} a_i \leq M$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $a_{n+1}'^{-1} a_{n+1} > M$. Pour $i \leq n+1$, on a

$$a_i'^{-1} a_{n+1} \geq a_{n+1}'^{-1} a_{n+1} > M \geq a_i'^{-1} a_{\varphi(i)},$$

donc $a_{\varphi(i)} < a_{n+1}$, $\varphi(i) < n+1$, $\varphi(i) \leq n$, de sorte que φ applique biunivoquement la suite $(1, 2, \ldots, n+1)$ sur la suite $(1, 2, \ldots, n)$; d'où absurdité.

Conséquences du lemme. — Si les suites (a_i), (a'_i), non décroissantes, tendant vers $+\infty$, sont semblables, elles sont équivalentes. Donc, pour chercher si les variétés J correspondantes sont égales, il suffit de chercher si $a_i'^{-1} a_i$ et $a_i^{-1} a'_i$ sont bornés. [Par exemple, les variétés J définies par les suites de valeurs propres ($1!$, $2!$, $3!$, ...) et ($2!$, $3!$, $4!$, ...) ne sont pas égales.] La classification des variétés J de classe 3_∞ est ainsi ramenée à la classification des suites croissantes tendant vers $+\infty$, deux suites équivalentes étant considérées comme identiques.

Variétés J *de classe* $2b$. — Une suite de valeurs propres d'une variété J de classe $2b$, soit D, se partage en une suite infinie bornée et une suite S_D tendant vers $+\infty$. Soit D, D' deux variétés J de classe $2b$. On peut montrer que $D \approx D'$ si et seulement si l'une des suites S_D, $S_{D'}$ est semblable à une section ([30]) de l'autre. Par exemple, si D et D' admettent les suites de valeurs propres

$$(1, 1!, 1, 2!, 1, 3!, \ldots); \quad (1, 2!, 1, 3!, 1, 4!, \ldots),$$

on a $D \approx D'$ (ce qui est d'ailleurs évident).

Variétés J *de classe* $2a$. — Nous ne donnerons pas les résultats, qui sont plus complexes.

12. Génération du réseau $\mathcal{L}$. — Théorème 5,11. — *Tout le réseau $\mathcal{L}$ s'obtient à partir des seules variétés linéaires fermées en appliquant deux fois l'opération $\dot{+}$, une fois l'opération $\cap$* ([31]).

Démonstration. — Par une seule opération $\dot{+}$, on obtient toutes les variétés J de classe 2 (th. 5, 1). Soit maintenant D une variété J de classe 3_∞. Soit V, W, deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans [D], à ∞ dimensions, réduisant D (on en construit aussitôt à partir d'une base orthonormale). Soit $D_1 = D \cap V$, $D_2 = D \cap W$, $D'_1 = W \dot{+} D_1$, $D'_2 = V \dot{+} D_2$. D'_1 et D'_2 sont de classe 2, et $D = D'_1 \cap D'_2$.

Ce théorème fournit pour les variétés J une nouvelle définition, qui ne fait pas appel à la notion d'opérateur et ne fait pas sortir de H comme le théorème de Julia. On a aussi l'énoncé suivant :

Proposition 5, 14. — *Soient* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *des variétés linéaires fermées. Il existe une infinité de couples de variétés linéaires fermées,* V, V', *telles que :* $V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \ldots \dot{+} V_n = V \dot{+} V'$. *Tout ensemble obtenu à partir des* V_i *en effectuant un nombre fini de fois les opérations* $\dot{+}$ *et* $\cap$ *est de la forme* $(W_1 \dot{+} W_2) \cap (W_3 \dot{+} W_4)$, *où les* W_i *sont des variétés linéaires fermées.*

13. Variétés J complémentaires. — Théorème 5, 12. — *Deux variétés* J *partout denses,* D, D', *sont complémentaires si et seulement si : 1° il existe une base orthonormale commune à* D *et* D'; *2° les suites de valeurs propres correspondantes,* (a_i) *et* (a'_i), *sont telles que la suite* $[\min(a_i, a'_i)]$ *est bornée.*

Démonstration. — 1° Les conditions sont nécessaires : supposons D et D' complémentaires, et soit $D = W \dot{+} \Delta'$, $D' = W' \dot{+} \Delta$ la décomposition de

---

([30]) Nous appelons section d'une suite $(a_1, a_2, \ldots)$ toute suite $(a_n, a_{n+1}, \ldots)$.

([31]) Ce résultat est dû à Mackey [3].

la prop. 2,5. Soient (ε_i), (α_i) et (ε'_i), (α'_i) des bases orthonormales et suites de valeurs propres correspondantes de Δ dans W et Δ' dans W'; $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \ldots)$ est base orthonormale de D et D', avec, pour suites de valeurs propres correspondantes :

$$(b_1, b_2, \ldots) = (1, \alpha'_1, 1, \alpha'_2, \ldots) \quad \text{pour D,}$$
$$(b'_1, b'_2, \ldots) = (\alpha_1, 1, \alpha_2, 1, \ldots) \quad \text{pour D'.}$$

On voit que la suite $[\min(b_i, b'_i)]$ est bornée, et cette propriété se conserve évidemment pour des suites équivalentes aux suites (b_i), (b'_i).

2° Les conditions sont suffisantes : soit (e_i) une base orthonormale commune à D, D', et soient (a_i), (a'_i) les suites de valeurs propres correspondantes. Supposons la suite $[\min(a_i, a'_i)]$ bornée. Soit V (resp. V') la variété linéaire fermée sous-tendue par les e_i tels que $a_i \leqq a'_i$ (resp. $a'_i < a_i$). On a $V \subset D$, $V' \subset D'$, et V, V' sont orthogonales complémentaires dans H. Il suffit alors d'appliquer la prop. 2,5.

Remarques. — 1° On peut montrer que si par exemple D' est non fermée, il y a des bases orthonormales de D qui ne sont pas bases de D'.

2° Si S est un système hétérogonal et S' son dual, on peut montrer qu'il existe un unitaire U tel que U(S) et U(S') soient bases hétérogonales de D et D' respectivement.

PROPOSITION 5,15. — *Étant données deux variétés* J *complémentaires* D, D', *on obtient l'opérateur* K, *self-adjoint, positif, dans le cas p, le plus général tel que* $D = D_K$, $D' = \Delta_K$ *de la manière suivante : on prend une base orthonormale commune à* D *et* D', *soit* (e_i); *on définit, par* $K_0 e_i = \lambda_i e_i$ *un opérateur diagonal positif dans le cas p,* K_0, *tel que* $D_{K_0} = D$, $\Delta_{K_0} = D$ [32]; *soit* $(i_1^n, i_2^n, \ldots)$ *les indices tels que* $2^n \leqq \lambda_{i_k^n} \leqq 2^{n+1}$ $(-\infty < n < +\infty)$, *et* $H_n = [e_{i_1^n}, e_{i_2^n}, \ldots]$; *on prend dans* H_n *un opérateur self-adjoint* K_n *tel que* $2^n \leqq K_n < 2^{n+1}$. $K = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i P_{H_i}$ *est l'opérateur cherché le plus général.*

Démonstration. — K est évidemment self-adjoint, positif, dans le cas p, et $D_K = D$, $\Delta_K = D'$. La réciproque se démontre par le procédé qui a prouvé l'existence d'une base orthonormale pour une variété J (p. 60, fin du paragraphe 6, chap. 5) [33].

VI. — Représentation d'une variété J sur une variété J.

Les variétés J, D et D', envisagées dans ce chapitre, sont partout denses pour simplifier.

1. Définition de $\mathcal{G}$(D, D'). — Soit D, D', deux variétés J. On dira que A,

---

[32] Il en existe évidemment d'après le théorème (5,12).

[33] Dans un autre article [*cf.* note [25]], on étudiera les relations qui existent entre la classe et les valeurs propres d'une variété J, d'une part, et la structure du réseau $\mathcal{L}$ d'autre part (somme, intersection de deux variétés J, inclusion des variétés J).

opérateur J, représente D sur D′, si $D_A \supset D$, $A(D) = D'$, et si A est biunivoque dans D. Comme la restriction de A à D, est un opérateur J (prop. 3,14), on voit qu'on peut se borner à chercher l'ensemble $\mathcal{G}(D, D')$ des opérateurs J biunivoques A tels que $D = D_A$, $D' = \Delta_A$. On a donc une généralisation de l'ensemble $\mathcal{G}(D)$ du chapitre 4.

2. **Solution générale.** — *Première méthode.* — Soit B (resp. B′) un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p avec $\Delta_B = D$ (resp. $\Delta_{B'} = D'$) : nous savons construire de tels opérateurs. Soit A un opérateur de $\mathcal{G}(D, D')$ s'il en existe. L'opérateur $L = B'^{-1}AB$ est un opérateur J (th. 3,1) et représente H sur H, donc (th. 3,4) est de 1^re^ classe. Donc : $A = B'LB^{-1}$, où L est de 1^re^ classe. Réciproquement, tout opérateur de cette forme est un opérateur J (th. 3,1) et représente D sur D′. Il y a donc une infinité de solutions (il n'en sera pas de même au chapitre 7, où l'on imposera aux opérateurs d'être fermés).

Si l'on remplace B, B′, par deux autres opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p, $\overline{B}$, $\overline{B}'$ tels que $\Delta_{\overline{B}} = D$, $\Delta_{\overline{B}'} = D'$, on sait (th. 2,2) que $B = \overline{B}M$, $B' = \overline{B}'M'$, où M et M′ sont de 1^re^ classe, de sorte qu'on remplace simplement L par $M'LM^{-1}$.

Deuxième méthode. — On a un opérateur particulier de $\mathcal{G}(D, D')$, à savoir $A_0 = B'B^{-1}$. Soit $A \in \mathcal{G}(D, D')$; $A^{-1}A_0$ représente D sur D, est un opérateur J, donc : $A = A_0T \equiv B'B^{-1}T$, où $T \in \mathcal{G}(D)$. La réciproque est immédiate.

Théorème 6,1. — *B et B′ étant deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p particuliers tels que* $\Delta_B = D$, $\Delta_{B'} = D'$, *les opérateurs de* $\mathcal{G}(D, D')$ *se mettent sous l'une ou l'autre des trois formes :* $A = B'LB^{-1}$, *où* $L \in \mathcal{G}(H)$; $A = B'B^{-1}T$, *où* $T \in \mathcal{G}(D)$; $A = T'B'B^{-1}$, *où* $T \in \mathcal{G}(D')$.

Remarques. — 1° Sur l'une quelconque de ces trois formes, on voit que toute solution A devient un opérateur de 1^re^ classe si l'on introduit dans D et D′ des métriques propres, donc les topologies propres. Dans la représentation, les sous-domaines fermés, partout denses, ... dans la topologie de D deviennent les sous-domaines fermés, partout denses, ..., dans la topologie de D′. On a même, si d est une sous-variété J de D

$$(d)_D \simeq \left(B^{-1}(d)\right)_H \simeq \left(LB^{-1}(d)\right)_H \sim \left(B'LB^{-1}(d)\right)_{D'} \simeq \left(A(d)\right)_{D'}.$$

Supposons, réciproquement, un opérateur linéaire biunivoque A, tel que $D = D_A$, $D' = \Delta_A$, qui devient fermé quand on introduit dans D et D′ les topologies propres. Cela entraîne, d'après la 1^re^ interprétation des topologies propres, que $B'^{-1}AB$ est fermé, donc de 1^re^ classe puisque représentant H sur H. Donc $A = B'LB^{-1}$, où L est de 1^re^ classe, et par suite $A \in \mathcal{G}(D, D')$. D'où une nouvelle caractérisation des opérateurs J biunivoques (on écarte aisément la restriction : D et D′ partout denses) :

Proposition 6,1. — *Un opérateur linéaire biunivoque A est un opérateur J si et seulement si :* 1° D_A *et* Δ_A *sont des variétés J;* 2° *A devient fermé (et par suite bicontinu) quand on introduit dans* D_A *et* Δ_A *les topologies propres.*

2° Si par exemple D est fermé, A est fermé borné (th. 3,4); donc le théorème 2,2 est un cas particulier du théorème 6,1.

Autre point de vue. — Julia [10], [11], [12] a montré que, étant donné un opérateur linéaire fermé A, que nous supposons dans le cas p pour simplifier, on a $A = \beta'\beta^{-1}$, où β, β' sont des opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p (qui ne sont pas déterminés univoquement par A) [34]; autrement dit, A admet la représentation paramétrique : $X = \beta Z$, $AX = \beta' Z$, où Z parcourt H; on a : $D_A = \Delta_\beta$, $\Delta_A = \Delta_{\beta'}$. Posons-nous le problème réciproque : étant donnés deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p de H, β et β', quel est l'opérateur A défini paramétriquement par les formules $X = \beta Z$, $AX = \beta' Z$; autrement dit, que peut-on dire de $A = \beta'\beta^{-1}$? Le problème peut se poser de façon plus précise : étant données deux variétés J partout denses, D, D', cherchons les opérateurs linéaires fermés A dans le cas p tels que $D = D_A$, $D' = \Delta_A$ (problème transposé du problème de la représentation conforme pour les fonctions analytiques). D'après ce qui précède, il faut les chercher parmi les opérateurs $A = \beta'\beta^{-1}$, où β, β' sont deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p tels que $\Delta_\beta = D$, $\Delta_{\beta'} = D'$; soient B, B' deux tels opérateurs particuliers; on a $\beta = BL$, $\beta' = B'L'$, où L, L' sont quelconques de 1^{re} classe; d'où : $A = B'MB^{-1}$ où M est quelconque de 1^{re} classe. Ainsi, la méthode conduit aux opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$, et le problème peut s'énoncer maintenant : les opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$ sont-ils fermés? On verra que non, on verra même qu'on peut avoir $\widetilde{A} = \Omega$ et ceci justifie l'introduction dans ces questions des opérateurs J. Plus généralement, on est conduit aux problèmes suivants :

Problèmes. — Quand on connaît, pour un opérateur J biunivoque A, D_A et Δ_A, le théorème 6,1 donne des expressions générales de A. Mais il serait intéressant d'avoir des renseignements sur la nature de A, et notamment de résoudre les questions suivantes :

1^{re} question : A admet-il un prolongement fermé uniforme?
2^e question : A est-il borné?
3^e question : A est-il complètement continu?
4^e question : A est-il fermé?

Résumons dès maintenant certains des résultats que nous allons obtenir : si D par exemple est fermé, on sait qu'on peut répondre affirmativement à la 1^{re}, la 2^e, la 4^e question; la 3^e question se résout affirmativement si et seulement si D est de classe 3. Mais, si D et D' sont non fermés, on ne peut répondre ni par l'affirmative, ni par la négative à la 1^{re} question (*cf.* prop. 6,2); par contre, on peut, au simple examen de D et D', répondre parfois négativement à la 2^e, à la 3^e ou à la 4^e question (th. 6,2, 6,3, 7,3). Ainsi, dans le cadre des opérateurs J, la donnée de D_A et Δ_A (non fermés) permet seulement d'affirmer,

---

[34] On peut l'établir ainsi : si β est un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p tel que $\Delta_\beta = D_A$, $\beta' = A\beta$ est un opérateur J et $D_{\beta'} = H$, dont β' est fermé borné, dans le cas p; or $A = \beta'\beta^{-1}$.

dans certains cas, que A ne peut être borné, ou ne peut être complètement continu, ou ne peut être fermé. Si l'on impose à A d'être fermé, la donnée de D_A et Δ_A (qui ne peuvent être quelconques) fournit des renseignements plus précis (*cf.* chap. 7).

La 4e question sera étudiée au chapitre 7. On va étudier les 3 premières.

3. **Étude des prolongements fermés des opérateurs de** $\mathcal{G}(D, D')$. — *Proposition* 6,2. — *Pour que* $A = B'LB^{-1}$ *admette un prolongement fermé uniforme, il faut et il suffit que* $\Delta_{B'^*} \cap L^{*-1}(\Delta_{B^*})$ *soit partout dense dans la topologie de* $\Delta_{B'^*}$. *Cette circonstance est toujours réalisée pour une infinité d'opérateurs* $A \in \mathcal{G}(D, D')$; *mais, si* D *et* D' *sont non fermées, on a aussi, pour une infinité d'opérateurs* $A \in \mathcal{G}(D, D')$, $\widetilde{A} = \Omega$, $A^* = \omega$.

Démonstration. — On sait que $\widetilde{A} = A^{**}$ est uniforme si et seulement si D_{A^*} est partout dense. Or, pour deux vecteurs X, Y de H on a, si $X \in D_A$: $(B'LB^{-1}X, Y) = (B^{-1}X, L^*B'^*Y)$, et cette expression est une fonctionnelle bornée en X pour $X \in D_{B^{-1}} = D_A$ si et seulement si $L^*B'^*Y \in D_{B^{-1*}}$; et alors

$$(B^{-1}X, L^*B'^*Y) = (X, B^{-1*}L^*B'^*Y)$$

Donc $A^* = B^{-1*}L^*B'^*$, et : $D_{A^*} = B'^{*-1}L^{*-1}(D_{B^{-1*}}) = B'^{*-1}\left(\Delta_{B'^*} \cap L^{*-1}(\Delta_{B^*})\right)$.

Montrons que $\widetilde{A}$ est uniforme pour une infinité de $A \in \mathcal{G}(D, D')$. Soient (e_i), (a_i), et (e'_i), (a'_i) des bases orthonormales et suites de valeurs propres correspondantes de D, D'. Soit α l'opérateur linéaire défini dans $\{e_1, e_2, \ldots\}$ par $\alpha e_i = a_i'^{-1} a_i e'_i$; $\widetilde{\alpha}$ est uniforme et transforme biunivoquement D en D'; sa restriction à D est un opérateur J.

Enfin (*cf.* th. 8,1) on a, pour une infinité d'opérateurs L de 1re classe (et même unitaires) : $L^{*-1}(\Delta_{B^*}) \cap \Delta_{B'^*} = 0$ dès que $\Delta_{B^*} \simeq D$ et $\Delta_{B'^*} \simeq D'$ sont non fermés. Pour ces L, on a : $A^* = \omega$, donc $\widetilde{A} = \Omega$.

(En particulier, on voit que, si D est non fermée, $\mathcal{G}(D)$ contient une infinité d'opérateurs sans adjoints.)

4. **Étude des opérateurs bornés de** $\mathcal{G}(D, D')$. — Si D est fermée, tous les opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$ sont fermés bornés dans le cas p (*cf.* th. 7,1). Si D est non fermée, un opérateur A borné de $\mathcal{G}(D, D')$, s'il en existe, est certainement non fermé, mais seulement prolongeable dans tout H en opérateur $\widetilde{A}$ fermé borné (mais pas forcément dans le cas p; car, bien que A soit biunivoque, $\widetilde{A}^{-1}$ peut être multiforme : considérons un opérateur linéaire fermé borné A défini dans H, dont les zéros remplissent une variété linéaire fermée v disjointe de D, ce qui, d'après le théorème 8,1, est possible avec une v à ∞ dimensions; alors, la restriction A de A' à D transforme biunivoquement D en A'(D), qui est partout dense dès que $\Delta_{A'}$ est partout dense, mais $\widetilde{A}^{-1} = A'^{-1}$ est multiforme).

Si un opérateur $A \in \mathcal{G}(D, D')$ est borné, on peut encore chercher si A^{-1}, qui appartient à $\mathcal{G}(D', D)$ est borné ou non. Si A^{-1} est, comme A, borné, $\widetilde{A}$ et $\widetilde{A}^{-1}$ sont bornés, $\widetilde{A}$ est de 1re classe. Comme $D' = \widetilde{A}(D)$, on sait qu'alors $D' \simeq D$.

Lemme 6,1. — *Soient* (a_i) *et* (a'_i) *deux suites de valeurs propres de* D *et* D′ *respectivement. Si* $\overline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i < +\infty$ $\left(resp.\ \lim_{i=\infty} a'^{-1}_i . a_i = 0\right)$, $\mathcal{G}(D, D')$ *contient des opérateurs bornés* (*resp. complètement continus*) *prolongeables en opérateurs linéaires fermés bornés* (*resp. complètement continus*) *dans le cas p.*

Démonstration. — Soient (e_i), (e'_i) des bases orthonormales de D, D′, auxquelles correspondent les suites de valeurs propres (a_i), (a'_i). L'opérateur linéaire A défini dans $\{e_1, e_2, \ldots\}$ par $Ae_i = a'^{-1}_i a_i e'_i$ est borné si $\overline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i < +\infty$, complètement continu si $\lim_{i=\infty} a'^{-1}_i a_i = 0$, et dans les deux cas prolongeable à H en un opérateur linéaire fermé $\widetilde{A}$ borné dans le cas p; la restriction de $\widetilde{A}$ à D est un opérateur de $\mathcal{G}(D, D')$.

Lemme 6,2. — *Soient* C *et* C′ *deux opérateurs self-adjoints complètement continus tels que* $D_C = D_{C'} = H$, (c_i) *et* (c'_i) *leurs suites de valeurs propres non nulles mises sous formes non croissantes* ([35]). *Supposons* $C' = TC$, *où* T *est un opérateur linéaire borné, de borne m. On a :* $c_i^{-1} c'_i \leqq m$ *pour tout i. Si* T *est complètement continu, on a de plus* $\lim_{i=\infty} c_i^{-1} c'_i = 0$.

Démonstration. — Soient (ε_i) et (ε'_i) des vecteurs propres de C et C′ tels que c_i corresponde à ε_i, c'_i à ε'_i. Soit $V_i = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i]$, $V'_i = [\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_i]$. V'_i ayant une dimension de plus que V_{i-1}, il y a des vecteurs de V'_i orthogonaux à V_{i-1}, donc $W_i = V'_i \cap (H \ominus V_{i-1}) \neq 0$. Soit un vecteur $X_i \in W_i$, $\|X_i\| = 1$. $X_i \in V'_i$ entraîne $\|C'X_i\| \geqq c'_i$, $X_i \in H \ominus V_{i-1}$ entraîne $\|CX_i\| \leqq c_i$, donc

$$\|C'X_i\| = \|TCX_i\| \leqq mc_i;$$

d'où : $c'_i \leqq mc_i$. Si α_i est le minimum de $\|TX\|.\|X\|^{-1}$ dans $C(W_i)$, on a même, pour X_i bien choisi dans W_i, $\|TCX_i\| = \alpha_i \|CX_i\| \leqq \alpha_i c_i$, d'où $c'_i \leqq \alpha_i c_i$. Or, $\|CX_i\|^{-1} CX_i \to 0$, donc, si T est complètement continu, $\alpha_i \to 0$ quand $i \to \infty$. Ainsi, $c_i^{-1} c'_i \to 0$ quand $i \to \infty$.

Lemme 6,3. — *Supposons* D, D′ *de classe* 3; *soient* (a_i), (a'_i) *des suites non décroissantes de valeurs propres de* D, D′. *Si* $D' = T(D)$ *où* T *est un opérateur linéaire fermé borné* (*resp. complètement continu*) *tel que* $D_T = H$, *on a :* $\overline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i < +\infty$ $\left(resp.\ \lim_{i=\infty} a'^{-1}_i a_i = 0\right)$.

Démonstration. — Soit B l'opérateur self-adjoint complètement continu, dans le cas p, défini par $Be_i = a_i^{-1} e_i$, (e_i) étant une base orthonormale de D telle que a_i corresponde à e_i. Alors, TB est complètement continu (pas forcément biunivoque) donc de la forme JC, où C est self-adjoint complètement continu, et où J transforme isométriquement Δ_C en $\Delta_{TB} = D'$. Soit (c_i) la suite non croissante des valeurs propres non nulles de C. D'après la prop. 5,11, les suites (a'_i) et (c_i^{-1})

([35]) Ces suites peuvent être finies; si elles sont infinies, c_i et c'_i tendent vers o quand $i \to \infty$; chaque c_i est compté avec sa multiplicité.

sont équivalentes. D'autre part, $C = J^{-1}TB$, donc (lemme 6,2) $\overline{\lim\limits_{i=\infty}} c_i a_i < +\infty$, et $\lim c_i a_i = 0$ si T est complètement continu.

THÉORÈME 6,2. — *a. Si la classe de* D′ *est supérieure à la classe de* D, $\mathcal{G}$(D, D′) *contient des opérateurs bornés dont aucun n'est d'inverse borné;* $\mathcal{G}$(D′, D) *ne contient aucun opérateur borné. b. Si* D *et* D′ *sont de classe* 1 *tous les opérateurs de* $\mathcal{G}$(D, D′) *et de* $\mathcal{G}$(D′, D) *sont de* 1^re^ *classe. c. Si* D *et* D′ *sont de classe* 2 : 1° *si* D $\not\simeq$ D′, $\mathcal{G}$(D, D′) *contient des opérateurs bornés, dont aucun n'est d'inverse borné; de même pour* $\mathcal{G}$(D′, D); 2° *si* D $\simeq$ D′, $\mathcal{G}$(D, D′) *contient des opérateurs bornés dont les uns sont d'inverse borné, les autres d'inverse non borné; de même pour* $\mathcal{G}$(D′, D). *d. Si* D *et* D′ *sont de classe* 3, *soient* (a_i) *et* (a'_i) *des suites de valeurs propres de* D *et* D′, *mises sous formes non décroissantes;* 1° *si* $\underline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i = 0$, $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i = +\infty$, *ni* $\mathcal{G}$(D, D′), *ni* $\mathcal{G}$(D′, D) *ne contiennent d'opérateur borné;* 2° *si* $\underline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i = 0$, $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i < +\infty$, $\mathcal{G}$(D, D′) *contient des opérateurs bornés, d'inverse non borné;* $\mathcal{G}$(D′, D) *ne contient aucun opérateur borné;* 3° *si* $\underline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i > 0$, $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i = +\infty$, *échanger* D *et* D′ *dans ce qui précède;* 4° *si* $\underline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i > 0$, $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i'^{-1} a_i < +\infty$, $\mathcal{G}$(D, D′) *et* $\mathcal{G}$(D′, D) *contiennent des opérateurs bornés, d'inverse borné* [36] (D $\simeq$ D′). *e. On peut de plus imposer aux opérateurs bornés dont le théorème affirme l'existence d'avoir un prolongement fermé dans le cas p.*

(Remarquons d'abord que les variétés J de classes distinctes se comportent ici de manières curieusement différentes. Lorsque D et D′ sont de classe 3, il peut arriver que ni $\mathcal{G}$(D, D′), ni $\mathcal{G}$(D′, D) ne contiennent d'opérateurs bornés, alors que cette circonstance ne se produit jamais si l'une au moins des variétés J est de classe 1 ou 2. D'autre part, si D et D′ sont de classe 2, il peut arriver que $\mathcal{G}$(D, D′) et $\mathcal{G}$(D′, D) contiennent des opérateurs bornés sans contenir d'opérateurs bornés d'inverse borné; mais cette circonstance est impossible si D et D′ sont de classe 3. Enfin, c'est seulement dans le cas de deux variétés J de classe 3 que les valeurs propres interviennent).

Démonstration. — Si D est de classe 1 (D = H) et D′ de classe 2 ou 3, on sait déjà que tous les opérateurs de $\mathcal{G}$(D, D′) sont fermés bornés d'inverse non borné, donc que $\mathcal{G}$(D′, D) ne contient que des opérateurs linéaires fermés non bornés d'inverse borné.

Si D est de classe 2, et D′ de classe 2 ou 3 : soit N un noyau de D,

---

[36] La question de savoir si $\mathcal{G}$(D, D′) contient alors des opérateurs bornés d'inverse non borné reste en suspens. La question se résout affirmativement si $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, a_n^{-1} . a_{n+1} < +\infty$ [ce qui limite la croissance de la suite (a_i)], mais le résultat est peut-être différent si la suite (a_i) croît très rapidement.

$\Delta = D \cap (H \ominus N)$, (λ_i) une suite de valeurs propres de Δ, (e'_i), (a'_i) une base orthonormale et une suite de valeurs propres de D'. Puisque $\overline{\lim_{i=\infty}} a'_i = +\infty$, il existe une suite partielle (a'_{i_p}) telle que $\overline{\lim_{p=\infty}} a'^{-1}_{i_p} \lambda_p < +\infty$. Soit $D'_1 \subset D'$ la variété J définie par la base (e'_{i_p}) et la suite correspondante de valeurs propres (a'_{i_p}), et soit $D'_2 = D' \cap (H \ominus [D'_1])$; on a : $D' = D'_1 + D'_2$. D'après le lemme 6,1, il existe un opérateur linéaire fermé borné biunivoque A_1 tel que $A_1(\Delta) = D'_1$. Soit A_2 un opérateur linéaire fermé borné biunivoque tel que $A_2(N) = D'_2$ (il est facile de s'arranger pour que D'_2 ait ∞ dimensions). L'opérateur $A = A_2 P_N + A_1 P_{[\Delta]}$ est fermé borné biunivoque, et $A(D) = D'$. On voit qu'on peut s'arranger pour que A^{-1} soit non borné.

Si D est de classe 2 et D' de classe 3 : $\mathcal{G}(D', D)$ ne peut contenir aucun opérateur borné A, car, si N est un noyau de D, $A^{-1}(N)$ serait un noyau de D'.

Alors, (*a*) est démontré complètement; (*b*) est immédiat; (*c*) résulte des raisonnements précédents. Passons à (*d*).

Si $\underline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i = 0$, $\overline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i = +\infty$ (avec les notations du théorème), il ne peut exister d'opérateur borné ni dans $\mathcal{G}(D, D')$, ni dans $\mathcal{G}(D', D)$ (lemme 6,3). Si $\underline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i = 0$, $\overline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i < +\infty$, il n'existe aucun opérateur borné dans $\mathcal{G}(D', D)$; le lemme 6,1 prouve que $\mathcal{G}(D, D')$ contient des opérateurs bornés. Si $\underline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i > 0$, $\overline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i = +\infty$, raisonnement analogue. Si $\underline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i > 0$, $\overline{\lim_{i=\infty}} a'^{-1}_i a_i < +\infty$, on sait que $D \simeq D'$: il existe des unitaires dans $\mathcal{G}(D, D')$ et $\mathcal{G}(D', D)$.

(*e*) résulte du lemme 6,1 et des raisonnements précédents.

Relation d'ordre entre les variétés J *partout denses*. — Écrivons $D \succ D$ si $\mathcal{G}(D, D')$ contient des opérateurs bornés. Cette relation, évidemment réflexive et transitive, est une relation d'ordre au sens large. La relation « $D \succ D'$, $D' \succ D$ » est une relation d'équivalence que nous notons : $D \sim D'$; elle signifie que $\mathcal{G}(D, D')$ et $\mathcal{G}(D', D)$ contiennent des opérateurs bornés ([37]). Le théorème 6,2 montre alors que :

Si la classe de D' est supérieure à celle de D, on a $D \succ D'$; si D et D' sont de classe 2, on a $D \sim D'$ (mais pas en général $D \simeq D'$); si D et D' sont de classe 3, D et D' peuvent être comparables ou non suivant les suites de valeurs propres; $D \sim D'$ entraîne $D \simeq D'$.

Nous connaissons déjà une relation d'ordre entre les variétés J : la relation d'inclusion. Voici les rapports entre ces deux relations.

Proposition 6,3. — *Pour que* $D \succ D'$, *il faut et il suffit qu'il existe une variété* J, $D'' \subset D$, *avec* $D'' \simeq D'$.

([37]) L'étude de cette relation d'ordre sera approfondie ailleurs [*cf.* note ([25])]. On verra qu'elle a une signification intrinsèque dans $\mathcal{L}$, ce qui conduit à des résultats sur la structure de $\mathcal{L}$.

(Ainsi, lorsque $D \sim D'$, il existe une variété J contenue dans D unitairement équivalente à D', une variété J contenue dans D' unitairement équivalente à D, et on peut avoir $D \dashv\vDash D'$).

Démonstration. — 1° La condition est nécessaire : si $D \succ D'$, $\mathcal{G}(D, D')$ contient un opérateur borné T. Soit B un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p, avec $\Delta_B = D$. $\widetilde{TB} = TB$ est fermé borné dans le cas p, et $\Delta_{\tilde{T}B} = D'$. On a, d'une part : $D' = \Delta_{\tilde{T}B} = U(\Delta_{B^* T^*})$ où U est unitaire. D'autrepart, $D = \Delta_B = U'(\Delta_{B^*})$ où U' est unitaire. Or, $\Delta_{B^*} \supset \Delta_{B^* T^*}$.

2° La condition est suffisante : Supposons une variété J, $D'' \subset D$, avec $D'' = U(D')$, où U est unitaire. Soit B'' un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p, avec $\Delta_{B''} = D''$. L'opérateur $S = B^{-1}B''$ est un opérateur J (th. 3,1) et $D_S = H$, donc S est fermé borné (th. 3,4). On a : $B'' = BS$ ([38]). Donc :

$$D' \simeq D'' = \Delta_{B''} \sim \Delta_{B''^*} = \Delta_{S^* B^*} = S^*(\Delta_{B^*}) = T(\Delta_B) = T(D).$$

où T est un opérateur borné, biunivoque dans Δ_B puisque B''^* est biunivoque donc S^* biunivoque dans Δ_{B^*}.

5. **Étude des opérateurs complètement continus de $\mathcal{G}(D, D')$.** — THÉORÈME 6,3. — $\mathcal{G}(D, D')$ *contient des opérateurs complètement continus seulement dans les cas suivants :*

1° D *est de classe* 1 *ou* 2, D' *est de classe* 3.

2° D *et* D' *étant de classe* 3, *et* (a_i), (a'_i) *étant des suites de valeurs propres sous forme non décroissante, on a* $\lim\limits_{i=\infty} a'^{-1}_i a_i = 0$.

Démonstration. — Si $A \in \mathcal{G}(D, D')$ est complètement continu, $\Delta_{\tilde{A}}$ et *a fortiori* $D' = \Delta_A$ sont de classe 3.

Si D est de classe 1 et D' de classe 3, on sait que tous les opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$ sont fermés complètement continus.

Si D est de classe 2 et D' de classe 3, montrons que certains opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$ sont complètement continus. Soient N un noyau de D, (φ_i) une base orthonormale de N, $\Delta = D \cap (H \ominus N)$; soient (ε_i), (α_i) et (e'_i), (a'_i) des bases orthonormales et des suites correspondantes de valeurs propres de Δ et D'. On a : $\lim\limits_{i=\infty} a'_i = +\infty$, on peut donc effectuer une partition de la suite (a'_i) en deux suites infinies, (a'_{n_i}) et (a'_{p_i}), telles que $\lim\limits_{i=\infty} \alpha_i^{-1} a'_{n_i} = +\infty$. Alors, par les formules

$$T\varphi_i = a'^{-1}_{p_i} e'_{p_i}, \qquad T\varepsilon_i = a'^{-1}_{n_i} \alpha_i e'_{n_i}$$

on définit dans tout H un opérateur complètement continu qui transforme biunivoquement D en D'.

Si enfin D et D' sont de classe 3, le théorème résulte des lemmes 6,1 et 6,3 comme dans la démonstration du théorème 6,2.

([38]) Ainsi est démontré le complément annoncé du th. (1,11).

VII. — Définition d'un opérateur fermé par son domaine d'existence et son domaine des valeurs.

Soient D, D' deux variétés J, partout denses pour simplifier. On cherche les opérateurs linéaires fermés A tels que $D = D_A$, $D' = \Delta_A$, qui transforment biunivoquement D en D'. Alors, A est dans le cas p.

1. Cas où l'une des variétés J est fermée. — Supposons par exemple $D = H$. A est alors borné.

Première méthode. — Théorème 7,1. — *a. Étant donnée une variété* J *partout dense* D', *il existe une infinité d'opérateurs linéaires fermés* A *dans le cas p tels que* $D_A = H$, $\Delta_A = D$; *ils sont bornés; si* A_1 *est l'un d'eux, les autres sont donnés par l'une ou l'autre des formules :* $A = A_1 L$, *où* $L \in \mathcal{G}(H)$; $A = L' A_1$, *où* $L' \in \mathcal{G}(D)$.

b. Ces solutions sont toutes de 1^{re} *classe si et seulement si* $D' = H$.

c. Ces solutions sont toutes complètement continues si et seulement si D' *est de classe* 3; *de plus, les vecteurs propres de* $\sqrt{AA^*}$ *forment alors une base orthonormale de* D' *et la suite non croissante des valeurs propres de* $\sqrt{AA^*}$ *est équivalente à la suite non croissante des inverses des valeurs propres de* D'.

(On a construit au Chapitre 5 un opérateur A_1 self-adjoint diagonal).

Démonstration. — (a) et (b) résultent des théorèmes 6,1 et 3,4; (c) résulte du théorème 1,10 et de la prop. 5,11, en remarquant que $\sqrt{AA^*}$ est self-adjoint avec $\Delta_{\sqrt{AA^*}} = D'$.

Deuxième méthode. — Il suffit de répéter la prop. 5,12 :

Proposition 7,1. — *Soient* (A_i) *une base hétérogonale de* D', (a_i) *une suite de valeurs propres correspondantes. Tout opérateur linéaire fermé borné* A *dans le cas p tel que* $\Delta_A = D'$ *s'obtient en posant :* $A(\overline{A}_i) = a_i^{-1} A_i$, *où* $(\overline{A}_i)$ *est un système hétérogonal quelconque de* H.

Troisième méthode, quand D' *est de classe* 1 *ou* 2. — Alors on a : $D' = N \dot{+} N'$, où N et N' sont deux noyaux conjugués, asymptotiques si et seulement si D' est de classe 2. $A^{-1}(N) = \overline{N}$ et $A^{-1}(N') = \overline{N'}$ sont deux variétés linéaires fermées disjointes à ∞ dimensions telles que $H = \overline{N} \dot{+} \overline{N'}$, donc non asymptotiques et sous-tendant H. On peut même choisir N et N' de façon que $\overline{N}$ et $\overline{N'}$ soient orthogonales. Soient en effet $\overline{M}$, $\overline{M'}$, deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires, à ∞ dimensions, de H; soient J et J' deux opérateurs isométriques avec $J(\overline{M}) = \overline{N}$, $J'(\overline{M'}) = \overline{N'}$. L'opérateur $L = JP_{\overline{M}} + J'P_{\overline{M'}}$ est biunivoque et transforme $\overline{M} \dot{+} \overline{M'} = H$ en $\overline{N} \dot{+} \overline{N'} = H$: il est fermé borné de 1^{re} classe. Soit $B = AL$. On a : $B(\overline{M}) = A(\overline{N}) = N$, $B(\overline{M'}) = A(\overline{N'}) = N'$, $\Delta_B = N \dot{+} N' = D'$. On sait (th. 3,9) que : $B = AL = L'AU$, où L' est de

1^re^ classe et U unitaire. Donc : $A = L'^{-1}BU^{-1}$. Posons : $M = U(\overline{M})$, $M' = U(\overline{M'})$. On a : $A(M) = L'^{-1}B(\overline{M}) = L'^{-1}(N)$, $A(M') = L'^{-1}B(\overline{M'}) = L'^{-1}(N')$ et $L'^{-1}(N)$, $L'^{-1}(N')$ sont deux noyaux conjugués de $\Delta_A = D'$. D'où :

Théorème 7,2. — *Soit* A *un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p, non complètement continu. On peut trouver, d'une infinité de manières, deux variétés linéaires fermées,* M, M′, *de* H, *orthogonales complémentaires, à ∞ dimensions, de façon que* $A(M) = N$, $A(M') = N'$ *soient deux variétés linéaires fermées disjointes, sous-tendant* H, *asymptotiques si et seulement si* A^{-1} *est non borné.* A *est d'inverse borné dans* M *et* M′. N *et* N′ *sont des noyaux conjugués de* Δ_A.

On a ainsi, dans la mesure du possible, ramené les opérateurs linéaires fermés bornés aux opérateurs de 1^re^ classe.

2. Théorème général. — Si D′ est de classe 3, A est complètement continu (th. 1,10), donc le problème est impossible si $D \neq H$; si $D = H$, le problème est possible d'après le paragraphe 1. (Solution graphique : avec les notations habituelles, l'image de A est l'un quelconque des noyaux conjugués de H, en position p avec H, dans la variété J de classe 2.b : $\overline{D} = H \dot{+} U(D')$; H est noyau maximal de $\overline{D}$; l'étude de ces noyaux a été faite au paragraphe 4 du chapitre 5).

Si D et D′ sont de classe 1 ou 2, montrons qu'il y a une infinité de solutions. Soient N et N′ des noyaux, de déficience infinie dans H, de D et D′ respectivement. Soit $\Delta = D \cap (H \ominus N)$, $\Delta' = D' \cap (H \ominus N')$; on a $D = N \dot{+} \Delta$, $D' = N' \dot{+} \Delta'$, Δ et Δ' ont ∞ dimensions. Il existe un opérateur linéaire fermé A_1, biunivoque, tel que $D_{A_1} = N$, $\Delta_{A_1} = \Delta'$, et un opérateur linéaire fermé A_2, biunivoque, tel que $D_{A_2} = \Delta$, $\Delta_{A_2} = N'$. $A = A_1 P_N + A_2 P_{[\Delta]}$ transforme biunivoquement D en D et est fermé (car, si $X_n \to X$ et $AX_n \to Y$, on a : $P_N X_n \to P_N X$, $A_1 P_N X_n \to P_{[\Delta']} Y$, $P_{[\Delta]} X_n \to P_{[\Delta]} X$, $A_2 P_{[\Delta]} X_n \to P_{N'} Y$; donc : $P_{[\Delta']} Y = AP_N X$, $P_{N'} Y = AP_{[\Delta]} X$; donc $Y = AX$).

Théorème 7,3. — *Étant données deux variétés* J *partout denses dans* H, D *et* D′, *il existe une infinité d'opérateurs linéaires fermés* A *dans le cas p tels que* $D = D_A$, $D' = \Delta_A$, *sauf si l'une des variétés* J *est de classe* 3 *sans que l'autre soit fermée, auquel cas il n'y a pas de solution.*

3. Construction des solutions. — *Première méthode.* — Appliquons les théorèmes 6,1 et 3,5.

Proposition 7,2. — B *et* B′ *étant deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p tels que* $D = \Delta_B$, $D' = \Delta_{B'}$, *l'ensemble des opérateurs linéaires fermés* A *dans le cas p tels que* $D = D_A$, $D' = \Delta_A$ *est donné par la formule* $A = B'MB^{-1}$, *où* M *est un opérateur de* 1^re^ *classe tel que,* X_n *étant une suite de vecteurs unitaires, l'hypothèse* $BX_n \to 0$ *entraîne* $\varliminf_{n=\infty} \| B'MX_n \| > 0$.

On retrouve qu'il n'y a pas de solution quand D est non fermée et D′ de classe 3, car alors B' est complètement continu et MB^{-1} non borné, et il suffit de reprendre la prop. **3,4**. D'autre part, on sait par la prop. **6,2** que la restriction imposée à M par notre prop. est effective dès que D et D' sont non fermées.

Deuxième méthode. — Proposition **7,3**. — *Quand le problème est possible, on obtient l'opérateur linéaire fermé* T *dans le cas p le plus général tel que* $D = D_T$, $D' = \Delta_T$, *par le procédé suivant : soient* (A_i), (a_i), (A'_i), (a'_i) *des bases hétérogonales de* D, D' *et des suites de valeurs propres correspondantes; on prend le plus petit prolongement linéaire fermé de l'opérateur* T' *défini par :* $T'A_i = a'^{-1}_{\varphi(i)} a_i A'_{\varphi(i)}$, φ *étant une permutation de la suite des entiers telle que la suite* $\left(\min(a_i, a'_{\varphi(i)})\right)$ *soit bornée.*

Démonstration. — 1° Montrons que l'opérateur $\widetilde{T'}$ ainsi construit répond à la question. Soient (e_i) une base orthonormale de H, L et L' les opérateurs de 1^re classe définis par $Le_i = A_i$, $L'e_i = A'_{\varphi(i)}$, S l'opérateur défini par $Se_i = a'^{-1}_{\varphi(i)} a_i e_i$. On a : $T' = L'SL^{-1}$, donc : $\widetilde{T'} = L'\widetilde{S}L^{-1}$. Or $\widetilde{S}$ est diagonal dans le cas p, donc $\widetilde{T'}$ est dans le cas p. Cherchons $D_{\widetilde{S}}$; $X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in D_{\widetilde{S}}$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{\infty} a'^{-2}_{\varphi(i)} a_i^2 |x_i|^2 < +\infty$, ce qui, on le voit aisément, est équivalent, vu les hypothèses faites sur φ, à : (1) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 |x_i|^2 < +\infty$. Par suite, $D_{\widetilde{T'}} = L(D_{\widetilde{S}})$ se compose des vecteurs $\sum_{i=1}^{\infty} x_i A_i$ pour lesquels (1) a lieu, d'où $D_{\widetilde{T'}} = D$. De même, $\Delta_{\widetilde{T'}} = D'$.

2° Réciproquement, soit un opérateur linéaire fermé T dans le cas p tel que $D = D_T$, $D' = \Delta_T$. Soit V son image par rapport à H, H', U (notations habituelles). On a : $D = P_H V$, $U(D') = P_{H'} V$. Pour qu'un système hétérogonal (C_i) de V se projette sur H suivant une base (B_i) de D, il faut et il suffit (prop. **5,11**) que la suite duale (D_i) de la suite (C_i) soit une base de $P_V H$. De même, pour que les $P_{H'} C_i = B'_i$ forment une base de $U(D')$, il faut et il suffit que les D_i forment une base de $P_V H'$. Comme V est en position p avec H, $P_V H$ et $P_V H'$ sont complémentaires dans V, donc (th. **5,12**) ont des bases communes. Alors les $A_i = \|B_i\|^{-1} B_i$ et les $A'_i = \|B'_i\|^{-1} B'_i$ forment des bases hétérogonales de D et $U(D')$ respectivement. Soient : $a_i = \|B_i\|^{-1}$, $a'_i = \|B'_i\|^{-1}$. Comme le système (C_i) est hétérogonal, on peut prendre a_i comme valeur propre de D correspondant à A_i, a'_i comme valeur propre de $U(D')$ correspondant à A'_i. D'ailleurs, $TB_i = UB'_i$, donc $TA_i = a'^{-1}_i a_i U(A'_i)$. Enfin :

$$\|C_i\|^2 = \|B_i\|^2 + \|B'_i\|^2 = a_i^{-2} + a'^{-2}_i \leq 2[\min(a_i^2, a'^2_i)]^{-1}.$$

Comme (C_i) est hétérogonal, la suite $\min(a_i, a'_i)$ est bornée.

Remarques. — On retrouve les cas de possibilité et d'impossibilité du problème; quand D' est de classe 3 et D non fermée, on a

$$\lim_{i=\infty} a'_i = \overline{\lim_{i=\infty}}\, a_i = +\infty = \overline{\lim_{i=\infty}} \min(a_i, a'_i).$$

2° La condition nécessaire et suffisante trouvée pour les $\dot{C}_i$ montre que, quand D est non fermée, toute base de D′ n'est pas la transformée par T d'une base de D, contrairement à ce qui se passe (prop. **7,1**) si $D = H$. Car, si D est non fermée, $P_V H$ est non fermée, donc (*cf.* chap. 5, § **13**, remarque 1°, p. 67) il y a des bases de $P_V H'$ qui ne sont pas bases de $P_V H$.

Troisième méthode. — Soit $A = UK$ la décomposition de l'opérateur A cherché, fermé dans le cas p, en un self-adjoint positif K et un unitaire U. La correspondance entre les A fermés dans le cas p et les couples (U, K) où U est unitaire et K self-adjoint positif, est biunivoque. Soit $\overline{D} = \Delta_K$. Nous sommes ramenés à construire successivement $\overline{D}$, U, K.

1° Construction de $\overline{D}$. — Les conditions nécessaires et suffisantes que vérifie $\overline{D}$ sont : $\overline{D}$ et D complémentaires (existence d'un opérateur self-adjoint positif K tel que $D = D_K$, $\overline{D} = \Delta_K$, *cf.* prop. **2,4**), $\overline{D} \simeq D'$. La prop. **5,2** nous montre alors à nouveau que le problème est impossible si l'une des variétés J, D, D′ est de classe 3 sans que l'autre soit fermée; s'il n'en est pas ainsi, la construction de $\overline{D}$ est possible d'une infinité de manières, par la méthode indiquée dans la démonstration de la prop. **5,2**.

2° Construction de U. — Soient (e'_i) une base orthonormale fixe de D′ et $(\overline{e_i})$ une base orthonormale de $\overline{D}$ numérotée de telle sorte que les valeurs propres correspondant à $\overline{e_i}$ et e'_i, dans $\overline{D}$ et D′, puissent être prises égales. On définit alors U par $U\overline{e_i} = e'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Si U_0 est l'un de ces unitaires, tous les autres sont donnés par la formule $U = U'U_0$, où $U' \subset \mathfrak{U}(D')$.

3° Construction de K. — Elle est donnée par la prop. **5,15**.

Quatrième méthode. — Supposons D et D′ de classe 2. Soient V l'image de l'opérateur A^* cherché par rapport à H, H′, U (notations habituelles). V est asymptotique à H et H′, en position p avec H et H′. Soient (prop. **1,8**) V_1 et V_2 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans V, à ∞ dimensions, telles que

1° Les variétés linéaires fermées

$$H_1 = [P_H V_1], \qquad H_2 = [P_H V_2], \qquad H'_1 = [P_{H'} V_1], \qquad H'_2 = [P_{H'} V_2],$$

sont deux à deux orthogonales;

2° $\beta(V_1, H) \leqq \frac{\pi}{4}$, $\alpha(V_2, H) \geqq \frac{\pi}{4}$.

On a

$$D = P_H V = P_H V_1 \dotplus P_H V_2,$$
$$U(D') = P_{H'} V = P_{H'} V_1 \dotplus P_{H'} V_2.$$

Soient A_1, A_2 les restrictions de A à H_1, H_2. On a $A = A_1 P_{H_1} + A_2 P_{H_2}$. Par construction de V_1 et V_2, UA_1 et $(UA_2)^{-1}$ sont bornés. De même par conséquent pour A_1 et A_2^{-1}.

Une démonstration analogue est applicable si D est fermée et D' de classe 2, ou si D et D' sont fermées. Donc :

Proposition 7,4. — *Si* D *et* D' *sont de classe* 1 *ou* 2, *on obtient l'opérateur linéaire fermé* A *dans le cas p le plus général pour lequel* $D = D_A$, $D' = \Delta_A$, *de la manière suivante : soit* N_1, N_2 *des noyaux de* D, D' *respectivement, de déficience infinie. Soit* $\Delta_1 = D \cap (H \ominus N_1)$, $\Delta_2 = D' \cap (H \ominus N_2)$. *Soit* A_1 (*resp.* A_2) *un opérateur linéaire fermé borné biunivoque tel que* $D_{A_1} = N_1$, $\Delta_{A_1} = \Delta_2$ (*resp.* $D_{A_2} = N_2$, $\Delta_{A_2} = \Delta_1$). *On prend* $A = A_1 P_{N_1} + A_2^{-1} P_{[\Delta_1]}$.

Cinquième méthode. — Théorème 7,4. — *Soit* A *un opérateur linéaire fermé dans le cas p; on suppose que ni* A, *ni* A^{-1} *ne sont complètement continus. Alors, on peut trouver deux noyaux conjugués* P_1, P'_1, *de* D_A, *et deux noyaux conjugués* P_2, P'_2, *de* Δ_A, *tels que* $P_2 = A(P_1)$, $P'_2 = A(P'_1)$; A *est alors borné et d'inverse borné dans* P_1 *et* P'_1.

(Ce théorème, auquel on a fait allusion dans l'introduction à propos d'une idée de Julia, est à rapprocher du théorème 7,2; ces deux théorèmes constituent la meilleure justification de la notion de noyau.)

Démonstration. — Ni A, ni A^{-1} ne sont complètement continus, donc D_A et Δ_A sont de classe 1 ou 2; nous utilisons alors la prop. 7,4 et ses notations.

Premier cas. — Δ_1 et Δ_2 possèdent des noyaux. On peut alors appliquer à A_1 et A_2 le théorème 7,2 : on peut trouver, dans N_1, deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions, soit n_1, n'_1, de façon que $A_1(n_1) = p_2$, $A_1(n'_1) = p'_2$ soient deux noyaux conjugués de Δ_2. De même, on peut trouver, dans N_2, deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions, soient n_2, n'_2, de façon que $A_2(n_2) = p_1$, $A_2(n'_2) = p'_1$ soient deux noyaux conjugués de Δ_1. On a alors

$$A(n_1 \dotplus p_1) = A(n_1) \dotplus A(p_1) = A_1(n_1) \dotplus A_2^{-1}(p_1) = p_2 \dotplus n_2.$$

De même

$$A(n'_1 \dotplus p'_1) = p'_2 \dotplus n'_2.$$

Or, n_1 et p_1 sont orthogonaux. Donc $P_1 = n_1 \dotplus p_1$ est fermé. De même pour $P'_1 = n'_1 \dotplus p'_1$, $P_2 = n_2 \dotplus p_2$, $P'_2 = n'_2 \dotplus p'_2$. Ainsi, P_1, P'_1, P_2, P'_2 répondent aux conditions du théorème.

Deuxième cas. — Δ_2 par exemple est de classe 3; alors, A_1 est complètement continu. Soit $S = P_{[\Delta_1]} + 2 P_{N_1}$; on a $S^{-1} = P_{[\Delta_1]} + \frac{1}{2} P_{N_1}$; S est de première classe dans H. Soit P_1 une variété linéaire fermée en position *p* avec $[\Delta_1]$, non asymptotique à $[\Delta_1]$, telle que $P_{[\Delta_1]}(P_1) = \Delta_1$ (prop. 2,2). On a $P_{N_1}(P_1) = N_1$, donc $N_1 \subset P_1 \dotplus \Delta_1$. Soit $P'_1 = S(P_1)$.

a. $P_1 \cap P'_1 = 0$; car, si $Z \in P_1 \cap P'_1$, soit $Z' = S^{-1}Z$; puisque $Z \in P'_1$, on a $Z' \in P_1$, donc $Z - Z' \in P_1$. Or $Z' = P_{[\Delta_1]}Z + \frac{1}{2}P_{N_1}Z$, donc $Z - Z' = \frac{1}{2}P_{N_1}Z \in P_1$. Comme $N_1 \cap P_1 = 0$, on a $P_{N_1}Z = 0$. Comme P_1 est en position p avec N_1, ceci entraîne $Z = 0$.

b. $P_1 \dotplus P'_1 = D_A$: soit $X \in \Delta_1$; il existe $Y \in N_1$ tel que $X + Y \in P_1$; alors, $X + 2Y \in P'_1$, donc $X \in P_1 \dotplus P'_1$, et par suite $\Delta_1 \subset P_1 \dotplus P'_1$. D'ailleurs, $N_1 \subset P_1 \dotplus \Delta_1 \subset P_1 \dotplus P'_1$. Donc $D_A = N_1 \dotplus \Delta_1 \subset P_1 \dotplus P'_1 \subset D_A$. Ainsi, P_1 et P'_1 sont des noyaux conjugués de D_A.

c. Montrons que A est d'inverse borné dans P_1 : l'opérateur $A_1 P_{N_1}$ est, comme A_1, complètement continu. $P_{[\Delta_1]}$ transforme biunivoquement P_1 en Δ_1, A_2^{-1} transforme biunivoquement Δ_1 en N_2, donc $A_2^{-1} P_{[\Delta_1]}$, transformant biunivoquement P_1 en N_2, est borné et d'inverse borné dans P_1. Si A était d'inverse non borné dans P_1, on pourrait trouver dans P_1 une suite de vecteurs unitaires X_n, avec $X_n \to 0$, $AX_n \to 0$. On aurait d'ailleurs $A_1.P_{N_1}X_n \to 0$; donc

$$A_2^{-1} P_{[\Delta_1]}X_n = AX_n - A_1 P_{N_1} X_n \to 0,$$

ce qui est impossible puisque $A_2^{-1} P_{[\Delta_1]}$ est d'inverse borné dans P_1.

d. De même, A est d'inverse borné dans P'_1. $A(P_1)$ et $A(P'_1)$ sont des noyaux conjugués de Δ_A).

Remarques. — Soient V, V' deux variétés linéaires fermées, à ∞ dimensions, sous-tendant H; soient W, W' deux autres variétés linéaires fermées ayant les mêmes propriétés; soient L, L' deux opérateurs linéaires fermés bornés, biunivoques, tels que $D_L = V$, $\Delta_L = W$, $D_{L'} = V'$, $\Delta_{L'} = W'$. Nous définissons, dans $V \dotplus V'$, un opérateur linéaire A de la manière suivante : pour tout vecteur $Z = X + X'$ de $V \dotplus V'$ ($X \in V$, $X' \in V'$), on pose $AZ = LX + L'X'$. A est biunivoque, et l'on a $D_A = V \dotplus V'$, $\Delta_A = W \dotplus W'$. Montrons que A est un opérateur J : soit B l'opérateur linéaire fermé qui transforme Z en X, B' l'opérateur linéaire fermé qui transforme Z en X'; on a $A = LB + L'B'$; il suffit alors d'appliquer le théorème 3,14. Nous désignerons l'opérateur A ainsi construit par $A(V, V'; W, W'; L, L')$.

D'après le théorème 7,4, tout opérateur linéaire fermé est, ou bien de ce type, ou bien complètement continu, ou bien d'inverse complètement continu. Mais réciproquement, tout opérateur $A(V, V'; W, W'; L, L')$ n'est pas fermé ([39]). Si V et V' sont non asymptotiques (cas où $D_A = H$), ou si W et W' sont non asymptotiques (cas où $\Delta_A = H$), on sait que A est fermé. Supposons maintenant V et V' asymptotiques, ainsi que W et W'. D'après le théorème 3,17, A est fermé si et seulement si, (X_n) étant une suite de vecteurs de $V \dotplus V'$ qui tendent vers un vecteur exterieur à $V \dotplus V'$, $\|AX_n\|$ tend vers $+\infty$. (Notons que, comme B et B' sont fermés, on a, même si A est non fermé $\|BX_n\| \to +\infty$, $\|B'X_n\| \to +\infty$; donc $\|LBX_n\| \to +\infty$, $\|L'B'X_n\| \to +\infty$).

([39]) **On verra même ailleurs [*cf.* note ([25])] que tout opérateur J, A, tel que D_A et Δ_A soient de classe 2, est de ce type.**

4. Définition d'un opérateur fermé A dans le cas p par son domaine d'existence D. — (On a $[D] = H$). Soit T un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p tel que $\Delta_T = D$. $S = AT$ est un opérateur J biunivoque tel que $D_S = H$, donc fermé borné dans le cas p. Ainsi, $A = ST^{-1}$, où S est fermé borné dans le cas p. Réciproquement, un tel opérateur n'est fermé que moyennant les conditions du théorème (3,5). Donc :

Proposition 7,5. — *Soit* D *une variété* J *partout dense*, T *un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p tel que* $\Delta_T = D$. *Tous les opérateurs linéaires fermés* A *dans le cas p tels que* $D_A = D$ *sont donnés par la formule* $A = ST^{-1}$, *où* S *est un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p tel que*, (X_n) *étant une suite de vecteurs unitaires, l'hypothèse* $TX_n \to 0$ *entraîne* $\varliminf_{n=\infty} \| SX_n \| > 0$.

Connaissant D_A, *que peut-on dire de* Δ_A? (une fois Δ_A choisi, on sera ramené aux paragraphes précédents) :

Si D_A est de classe 3, $\Delta_A = H$; A est non borné, A^{-1} complètement continu. Si D_A est de classe 1, Δ_A est une variété J partout dense quelconque; A est borné quelconque dans le cas p. Si D_A est de classe 2, Δ_A ne peut être de classe 3, mais est quelconque de classe 1 ou 2; A est non borné, A^{-1} non complètement continu.

Connaissant seulement $D_A = D$, on connaît les domaines d'existence de toutes les restrictions fermées de A : ce sont (prop. 3,14) les sous-variétés J de D fermées dans la topologie de D.

Exemple. — Supposons D de classe $2b$. Alors, $D = N \dot{+} \Delta([\Delta] = H \ominus N)$, où N est un noyau maximal et Δ une variété J de classe 3_∞. Δ et N sont fermés dans la topologie de D. Soient A_1 et A_2 les restrictions, fermées, de A, à N et Δ. A_2^{-1} est complètement continu, donc $A_2(\Delta)$ est un noyau, soit N', de Δ_A. A_1 est fermé borné; soit $\Delta' = A_1(N)$.

N' et Δ' ont ∞ dimensions, sont disjoints, et sous-tendent H. Montrons que ce sont les seules conditions imposées à N' et Δ'. Pour cela, soit une variété linéaire fermée N', et une variété J, Δ', satisfaisant à ces conditions. Soit $D' = N' \dot{+} \Delta'$; on a $[D'] = H$. Soient A_1 un opérateur linéaire fermé borné biunivoque avec $D_{A_1} = N$, $\Delta_{A_1} = \Delta'$, et A_2 un opérateur linéaire fermé biunivoque, d'inverse complètement continu, avec $D_{A_2} = \Delta$, $\Delta_{A_2} = N'$. Montrons que $A = A_1 P_N + A_2 P_{[\Delta]}$ est fermé. (A sera évidemment défini dans D, et dans le cas p) : si $X_n \to X$ et $AX_n \to Y$, ceci entraîne : 1° $A_1 P_N X_n \to A_1 P_N X$, donc $A_2 P_{[\Delta]} X_n \to Y - A_1 P_N X$; 2° $P_{[\Delta]} X_n \to P_{[\Delta]} X$; comme A_2 est fermé, il en résulte $P_{[\Delta]} X \in D_{A_2}$ et $A_2 P_{[\Delta]} X = Y - A_1 P_N X$. Donc $X \in D_A$ et $AX = Y$.

Remarque. — La prop. 7,5 résout, en passant aux images, les problèmes suivants :

1° Trouver toutes les variétés linéaires fermées de $H \oplus H'$, en position p avec H, qui se projettent sur H suivant une variété J donnée; 2° Trouver tous les noyaux conjugués par rapport à une variété J donnée d'un noyau N.

VIII. — Théorèmes de disjonction.

1. Introduction. — Dans l'espace à n dimensions, soit V et W deux variétés linéaires de dimensions p et q, de déficiences p' et q'. On sait que :

1° Pour p, q fixes, la déficience de $V \dotplus W$ augmente en même temps que la dimension de $V \cap W$; 2° Pour p', q' assez grands, V et W peuvent être disjointes. Dans l'espace de Hilbert H, nous allons remplacer V et W par des variétés J; nous trouverons alors des faits en opposition avec la première des règles que nous venons de rappeler; par contre la deuxième règle est applicable aux variétés J de déficience infinie, c'est-à-dire : 1° aux variétés linéaires fermées V telles que $H \ominus V$ ait ∞ dimensions; 2° aux variétés J non fermées (prop. 3,8). Les théorèmes obtenus donnent des renseignements sur la structure de $\mathcal{L}$.

Lemme 8,1. — *Soient* D *une variété* J *partout dense de classe* 2, *et* D′ *une variété* J *de déficience infinie. Il existe un unitaire* U *tel que* $U(D') \subset D$.

Démonstration. — D'abord, il existe une variété J partout dense non fermée, $\overline{D}$, telle que $D' \subset \overline{D}$. Car, si D′ est non fermée, on peut prendre $\overline{D} = D' \dotplus (H \ominus [D'])$; si D′ est une variété linéaire fermée de déficience infinie, on peut prendre $\overline{D} = D' \dotplus D''$, où D″ est non fermée avec $[D''] = H \ominus [D']$.

$\overline{D}$ est de classe 2 ou 3, donc $D \succ \overline{D}$. Donc il existe (prop. 6,3) un unitaire U tel que $U(\overline{D}) \subset D$; alors, $U(D') \subset D$ [40].

2. Extension d'un théorème de Von Neumann. — Lemme 8,2. — *Soient* V_0, V, *deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à* ∞ *dimensions de* H. *Il existe une infinité d'opérateurs linéaires fermés* A *bornés dans le cas p, se réduisant à l'identité dans* V_0, *tels que* $D = A(V)$ *soit partout dense dans* H *et disjoint de* V_0, *avec* $D \cap V$ *de classe* 2.

Démonstration. — Soient V_1, V_2, ... des variétés linéaires fermées deux à deux orthogonales, à ∞ dimensions, sous-tendant V. Soit U_i un opérateur qui transforme isométriquement V_{i+1} en V_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, et $U = \sum_{i=0}^{\infty} U_i P_{V_{i+1}}$ (la série convergeant fortement); soit $A = 1 - U$.

1° A est biunivoque, car $AX = 0$ entraîne $P_{V_i}X = U_i P_{V_{i+1}}X$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, donc $\|P_{V_i}X\| = \|P_{V_{i+1}}X\|$, d'où, comme $\sum_{i=0}^{\infty} \|P_{V_i}X\|^2 < +\infty$, $P_{V_i}X = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, d'où $X = 0$. Comme A se réduit à l'identité dans V_0, il en résulte que

$$D \cap V_0 = A(V) \cap A(V_0) = 0.$$

---

(40) Le lemme peut aussi s'établir très vite directement, par l'emploi de bases orthonormales, sans utiliser la proposition (6,3).

2° Si Y est orthogonal à D, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty}(P_{V_i}Y,\ P_{V_i}X - U_i P_{V_{i+1}}X) = 0 \qquad \text{pour} \quad X \in V,$$

ou

$$\sum_{i=0}^{\infty}(P_{V_i}Y,\ X) - \sum_{i=0}^{\infty}(U_i^{-1} P_{V_i}Y,\ X) = 0 \qquad \text{pour} \quad X \in V,$$

ou

$$\sum_{i=0}^{\infty}(P_{V_i}Y - U_i^{-1} P_{V_i}Y) \in V_0,$$

ce qui donne

$$\| P_{V_0}Y \| = \| P_{V_1}Y \| = \ldots$$

d'où $Y = 0$. Ainsi, D est partout dense. *A fortiori*, Δ_A est partout dense, donc A est dans le cas *p*.

3° On a $A(V_2) = (1 - U)(V_2)$. Ainsi, on voit aussitôt que $A(V_2)$ est fermé, à ∞ dimensions et est contenu dans V. Donc $D \cap V$, qui contient $A(V_2)$ est de classe 2 (il est facile de voir que $D \cap V$ n'est pas fermé, c'est d'ailleurs sans importance pour la suite).

LEMME 8,3. — *Soient* D_1, D_2 *deux variétés* J *de déficience infinie; il existe un unitaire* U *tel que* $D_1 \cap U(D_2) = 0$ [41].

Démonstration. — Soient V, V′ deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions de H. Soit A (lemme 8,2) un opérateur linéaire fermé borné dans le cas *p*, tel que $D = A(V)$ soit partout dense, disjoint de V′, avec $D \cap V$ de classe 2. Soit A′ un opérateur linéaire fermé borné dans le cas *p*, se réduisant à l'identité dans V, tel que $D' = A'(V')$ soit partout dense, avec $D' \cap V'$ de classe 2. Soit $\overline{D} = A'(D)$. Comme $D \cap V' = 0$ et comme A′ est biunivoque, on a $\overline{D} \cap D' = 0$. D′ est partout dense, et de classe 2. $\Delta_{A'}$ est partout dense, donc aussi $\overline{D} = A'(D)$ puisque D est partout dense. $\overline{D}$ est de classe 2 puisque D a des noyaux inclus dans V et que A′ se réduit à l'identité dans V. D'après le lemme 8,1, il existe des unitaires U_1 et U_2 tels que $U_1(D_1) \subset \overline{D}$, $U_2(D_2) \subset D'$. $U = U_1^{-1} U_2$ répond aux conditions du lemme.

THÉORÈME 8,1. — *Soit une suite de variétés* J *de déficience infinie*, D_0, D_1, D_2, ...; *il existe des unitaires* U_1, U_2, ... *tels que* D_0, $U_1(D_1)$, $U_2(D_2)$, ... *soient disjoints.*

Démonstration. — On peut supposer, en remplaçant au besoin chaque D_i par une variété J plus grande, que les variétés J données sont partout denses et non fermées. D'après le lemme 8,3, il existe un unitaire U_1 tel que D_0 et $U_1(D_1)$ soient disjointes. Alors (prop. 3,7), $D_0 \dotplus U_1(D_1)$ est non fermée, donc disjointe

---

[41] Ce résultat a été établi par Von Neumann [1] (pour $[D_1] = H$ et $D_2 = D_1$).

de $U_2(D_2)$ pour un unitaire U_2; donc $D_0 \dot{+} U_1(D_1) \dot{+} U_2(D_2)$ est non fermée, etc. ([42]).

Remarques. — 1° Chaque D_i étant un ensemble de première catégorie dans H, on savait *a priori* que la réunion d'une infinité dénombrable de variétés J non fermées ne peut épuiser H.

2° Étant donné un opérateur linéaire fermé A dans le cas p, on suppose parfois, pour en chercher une représentation matricielle, que $[D_{A^*} \cap D_A] = H$. On voit qu'il s'agit d'une hypothèse très particulière, car, si $A = UK$ est une décomposition de A en self-adjoint K et unitaire U, on a $D_A = D_K$, $D_{A^*} = U(D_K)$; or, U et K peuvent être choisis arbitrairement; on peut donc avoir $D_A \cap D_{A^*} = 0$.

3° Soient D, D′ deux variétés J de classe 2 partout denses. D'après la prop. 5,2, il existe un unitaire U_1 tel que D et $U_1(D')$ soient complémentaires; alors, $[D \cap U_1(D')] = D \dot{+} U_1(D') = H$. D'après le théorème 8,1, il existe un unitaire U_2 tel que D et $U_2(D')$ soient disjointes. Alors (prop. 3,7), $D \dot{+} U_2(D')$ est non fermée, donc $D \cap U_2(D') = 0$, $D \dot{+} U_2(D')$ est de déficience infinie dans H. Ces remarques sont à opposer à la première règle rappelée au paragraphe 1 à propos des variétés linéaires de l'espace à n dimensions. (D'ailleurs, cette règle est déjà enfreinte par les variétés linéaires fermées à ∞ dimensions).

3. **Hypothèse générale de disjonction.** — Appelons « système déficient » dans H tout ensemble d'un nombre fini de variétés J de déficience infinie. Alors, le théorème 8,1 est un cas particulier de l'hypothèse générale suivante : étant donnée une suite (S_i) de systèmes déficients, on peut trouver des unitaires U_i tels que $U_i(S_i) \cap U_j(S_j) = 0$ pour $i \neq j$. Nous n'avons pas démontré l'exactitude de l'hypothèse générale, mais nous avons vérifié des cas particuliers. En voici certains, qui seront utilisés aux chapitres 9 et 10.

LEMME 8,4. — *Soient* V, V′ *deux variétés linéaires fermées à* ∞ *dimensions; on peut trouver deux variétés linéaires fermées à* ∞ *dimensions orthogonales,* W, W′, *avec* $W \subset V$, $W' \subset V'$.

Démonstration. — Si $v = V' \cap (H \ominus V) \not\doteq 0$, on peut prendre $W = V$, $W' = v$. Si $v \doteq 0$, $\overline{V'} = V' \ominus v$ à ∞ dimensions, donc aussi $D = P_V \overline{V'}$. Soit (e_i) un système orthonormal infini inclus dans D, et f_i le vecteur de $\overline{V'}$ tel que $P_V f_i = e_i$. On a $(f_{2i}, e_{2j+1}) = (e_{2i}, e_{2j+1}) = 0$; on peut donc prendre $W = [e_2, e_4, \ldots]$ et $W' = [f_1, f_3, \ldots]$.

LEMME 8,5. — *Soit* D *une variété* J *partout dense de classe* 2, V *une variété linéaire fermée de déficience infinie. Il existe une infinité de noyaux* N *de* D *disjoints de* V.

([42]) On peut démontrer le théorème beaucoup plus fort que voici : soit D une variété J de déficience infinie. On peut trouver un groupe continu d'unitaires $U_t(-\infty < t < +\infty)$ tel que $U_t(D) \cap U_{t'}(D) = 0$ pour $t \neq t'$.

Démonstration. — Soient M et M' deux noyaux conjugués de D. L'une des deux variétés linéaires fermées $M \ominus (M \cap V)$, $M' \ominus (M' \cap V)$ a ∞ dimensions (sinon, V serait de déficience finie dans $M \dotplus M'$, donc dans $M \oplus M' = H$) et fournit un des noyaux N cherchés.

LEMME 8,6. — *Soit* D *une variété* J *partout dense de classe* 2, V *une variété linéaire fermée de déficience infinie. On peut trouver une variété* J, $D' \subset D$, *de classe* 2, *disjointe de* V, *partout dense.*

Démonstration. — D est projection sur H, dans $H \oplus H'$, d'une variété linéaire fermée W en position p avec H. $D \cap V$ est projection d'une variété linéaire fermée $\overline{V} \subset W$, qui est de déficience infinie dans W (sinon, $D \cap V$ serait de déficience finie dans D donc V dans H). Soit (lemme 8,5) N un noyau de D disjoint de V, projection d'une variété linéaire fermée $\overline{N} \subset W$. $\overline{N}$ et $W \ominus \overline{V}$ ont ∞ dimensions, on peut donc (lemme 8,4) trouver deux variétés linéaires fermées à ∞ dimensions, orthogonales, $\overline{N}'$ et M, avec $\overline{N}' \subset \overline{N}$, $M \subset W \ominus \overline{V}$. Alors, $N' = P_H \overline{N}'$ est un noyau de D (car $\overline{N}$, donc $\overline{N}'$, sont non asymptotiques à H'). D'autre part, $\overline{N}'$ et $\overline{V}$ sont disjoints, et $\overline{N}' \oplus \overline{V}$ est de déficience infinie dans W (car orthogonal à M); donc il existe dans $W \ominus \overline{N}'$ une variété J partout dense d, disjointe de $P_{W \ominus \overline{N}'} \overline{V}$ (lemme 8,3); alors $\overline{N}' \dotplus d$ est une variété J partout dense dans W, disjointe de $\overline{V}$, qui se projette sur H suivant une variété J partout dense dans H, D', disjointe de V, et contenant N' donc de classe 2.

LEMME 8,7. — *Soient* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *des variétés linéaires fermées de déficience infinie*, D *une variété* J *de classe* 2 *partout dense*, D' *une variété* J *de déficience infinie. Il existe un unitaire* U *tel que* $U(D')$ *soit disjointe de* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *et incluse dans* D.

Démonstration. — Il existe (lemme 8,6) une variété J, $D_1 \subset D$, partout dense, de classe 2, disjointe de V_1; puis une variété J, $D_2 \subset D_1$ (donc disjointe de V_1), partout dense, de classe 2, disjointe de V_2, etc; finalement, on a une variété J, $D_n \subset D$, partout dense, de classe 2, disjointe des V_i. Il suffit alors d'appliquer le lemme 8,1.

En particulier :

THÉORÈME 8,2. — *Soient* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *des variétés linéaires fermées de déficience infinie, et* D *une variété* J *de déficience infinie. Il existe un unitaire* U *tel que* U(D) *soit disjointe des* V_i.

Établissons maintenant le

THÉORÈME 8,3. — *Soient* D_1, D_2, D_3, *trois variétés* J *de déficience infinie; il existe un unitaire* U *tel que* $U(D_3)$ *soit disjointe de* D_1 *et* D_2.

Démonstration. — On peut supposer D_1, D_2, D_3, partout denses non fermées, en les remplaçant au besoin par des variétés J plus grandes. Si $D_1 \dotplus D_2$ est non fermée, l'existence de U résulte du lemme 8,3. Si $D_1 \dot{+} D_2 = H$, il existe (prop. 3,12) deux variétés linéaires fermées V_1, V_2, avec : $V_1 \cap V_2 = o$; $V_1 \dot{+} V_2 = H$; $D_1 = V_1 \dot{+} (D_1 \cap V_2)$; $D_2 = V_2 \dot{+} (D_2 \cap V_1)$. $D_1 \cap V_2$ et $D_2 \cap V_1$ sont non fermées (donc V_1 et V_2 ont une dimension et par suite une déficience infinies). Il existe donc (lemme 8,3) deux variétés J de classe 2, $\Delta_1 \subset V_1$, $\Delta_2 \subset V_2$, disjointes respectivement de $D_1 \cap V_1$, $D_2 \cap V_2$, partout denses respectivement dans V_1, V_2. Alors, $\overline{D} = \Delta_1 \dot{+} \Delta_2$ est une variété J partout dense dans H, de classe 2, et $\overline{D} \cap D_1 \subset V_1$, $\overline{D} \cap D_2 \subset V_2$. Il existe (lemme 8,7) un unitaire U tel que $U(D_3)$ soit incluse dans $\overline{D}$ et disjointe de V_1, V_2, donc de D_1, D_2.

Théorème 8,4. — *Soient* D, D' *deux variétés* J *non fermées complémentaires; on peut trouver deux variétés linéaires fermées à ∞ dimensions orthogonales complémentaires disjointes de* D, D'.

Démonstration. — Il existe deux variétés linéaires fermées à ∞ dimensions, V, V', orthogonales complémentaires, et deux variétés J non fermées, Δ, Δ' avec $[\Delta] = V$, $[\Delta'] = V'$, telles que $D = V \dot{+} \Delta'$, $D' = V' \dot{+} \Delta$ (prop. 2,5). Soient W, W' deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions; soient $\overline{V}$, $\overline{V'}$, deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires, en position p avec W et W', asymptotiques à W et W'. Il existe un opérateur isométrique U transformant V en $\overline{V}$, tel que $\overline{\Delta} = U(\Delta)$ soit disjointe de $P_{\overline{V}}W$ et $P_{\overline{V}}W'$ qui sont non fermées (th. 8,3); de même, il existe un opérateur isométrique U' transformant V' en $\overline{V'}$, tel que $\overline{\Delta'} = U'(\Delta')$ soit disjointe de $P_{\overline{V'}}W$ et $P_{\overline{V'}}W'$. Par construction, $\overline{D} = \overline{V} \dot{+} \overline{\Delta'}$ et $\overline{D'} = \overline{V'} \dot{+} \overline{\Delta}$ sont disjointes de W et W'. Mais $J = UP_V + U'P_{V'}$ est un unitaire, et $J(D) = \overline{D}$, $J(D') = \overline{D'}$. Donc $J^{-1}(W)$ et $J^{-1}(W')$ sont les variétés linéaires fermées du théorème.

4. **Un résultat auxiliaire.** — Proposition 8,1. — *Soit* V *une variété linéaire fermée en position p avec* H *dans* $H \oplus H'$ *asymptotique à* H *et* H'; *soit* $V' = (H \oplus H') \ominus V$. *Considérons les variétés* J *complémentaires non fermées* $D = P_H V$, $D' = P_H V'$, *et la variété* J *non fermée* $\overline{D} = P_H P_V H \subset D$. *Il existe une infinité de variétés linéaires fermées* $W \subset D$, *à ∞ dimensions, disjointes de* D' *et* $\overline{D}$.

Démonstration. — Il existe (prop. 1,8) dans H (resp. V; H') des variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires H^1, H^2 (resp. V^1, V^2; H'^1, H'^2) telles que :

$$V^1 \subset H^1 \oplus H'^1;\ V^1 \text{ en position } p \text{ avec } H^1 \text{ dans } H^1 \oplus H'^1;\ \beta(V^1, H^1) < \frac{\pi}{2}.$$

$$V^2 \subset H^2 \oplus H'^2;\ V^2 \text{ en position } p \text{ avec } H^2 \text{ dans } H^2 \oplus H'^2;\ \beta(V^2, H'^2) < \frac{\pi}{2}.$$

On a $P_V H = V^1 \dot{+} P_{V^2} H^2$, $P_V H' = V^2 \dot{+} P_{V^1} H'^1$. $P_{V^2} H^2$ et $P_{V^1} H'^1$ sont non fermées, partout denses dans V^2 et V^1 respectivement. Soient Δ_1 et Δ_2 deux variétés J de classe 2 telles que $[\Delta_1] = V^1$, $[\Delta_2] = V^2$, disjointes respectivement de $P_{V_1}H'^1$ et $P_{V_1}H^2$ (lemme 8,3). Soit A un opérateur linéaire fermé biunivoque tel que $D_A = \Delta_1$, $\Delta_A = \Delta_2$ (th. 7,3). Les vecteurs $X + AX$ décrivent, quand X décrit Δ_1, une variété linéaire fermée $\overline{W}$, disjointe de V^1 et V^2, telle que $P_{V^1}\overline{W} = \Delta_1$, $P_{V_2}\overline{W} = \Delta_2$, donc asymptotique à V^1 et V^2, et disjointe de $P_V H$ et $P_V H'$. Donc $P_H \overline{W}$ est disjointe de $P_H P_V H$ et de $P_H P_V H' = P_H V \cap P_H V'$ (remarques $\mathcal{R}$). Comme $P_H \overline{W} \subset P_H V$, on voit que $P_H \overline{W}$ est disjointe de $P_H V'$. D'autre part, puisque $\overline{W}$ est asymptotique à V^1 et disjointe de V^1, il existe une suite de vecteurs unitaires X_i de $\overline{W}$ tels que $\lim\limits_{i=\infty} \alpha(X_i, V^1) = 0$, donc tels que $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, \alpha(X_i, H) < \frac{\pi}{2}$. Par suite (th. 1,5) $\overline{W}$ n'est pas complètement asymptotique à H', donc (th. 1,4) $P_H \overline{W}$ contient des noyaux qui sont les variétés linéaires fermées W de la proposition.

IX. — Applications des théorèmes de disjonction.

1. Lemme 9,1. — *Soient* V_1, V_2 *deux variétés linéaires fermées de* H, $\overline{V}_2 \subset V_2$ *une autre variété linéaire fermée, et* $D = P_{V_1}\overline{V}_2$. *On a*

$$P_{V_2}(V_1 \ominus [D]) = P_{V_2} V_1 \cap (V_2 \ominus \overline{V}_2).$$

En particulier, si $V_1 \cap (H \ominus V_2) = 0$ (*c'est le cas si* V_1 *et* V_2 *sont en position* p'), D *est partout dense dans* V_1 *si et seulement si* $V_2 \ominus \overline{V}_2$ *et* $P_{V_2} V_1$ *sont disjoints.*

Démonstration. — Si $X \in P_{V_2}(V_1 \ominus [D])$, on a $X = P_{V_2} Y$, où $Y \in V_1 \ominus [D]$. Donc : 1° $X \in P_{V_2} V_1$; 2° $(Y, Y') = 0$ pour tout $Y' \in D$, donc $(Y, X') = 0$ pour tout $X' \in \overline{V}_2$, donc $(X, X') = 0$ pour tout $X' \in \overline{V}_2 : X \in V_2 \ominus \overline{V}_2$. Réciproquement, si $X \in P_{V_2} V_1 \cap (V_2 \ominus \overline{V}_2)$, on a : 1° $X = P_{V_2} Y$, où $Y \in V_1$; 2° $(X, X') = 0$ pour tout $X' \in \overline{V}_2$, donc $(Y, X') = 0$ pour tout $X' \in \overline{V}_2$, donc $(Y, Y') = 0$ pour tout $Y' \in D : Y \in V_1 \ominus [D]$.

2. **Prolongements d'un opérateur fermé** A. — Soit A un opérateur linéaire fermé uniforme, avec $[D_A] = H$ (A est dans le cas p'). Peut-on prolonger A de façon qu'il reste uniforme? C'est évidemment impossible si A est borné, car alors $D_A = H$. Supposons donc A non borné, c'est-à-dire $D_A \neq H$. Comme le fait remarquer Stone [43], il est facile de prolonger A : soit $X \notin D_A$; on pose : $AX = Y$, où Y est arbitraire et l'on prolonge A par linéarité dans $\{D_A, X\}$; Stone montre aisément que l'opérateur $\overline{A}$ obtenu est encore linéaire fermé uniforme. $\overline{A}$ est évidemment non borné, donc $D_{\overline{A}} \neq H$ (d'ailleurs, nous savions que D_A est de déficience infinie dans H) et l'on peut recommencer. Il ne peut donc être question, dans le cas non borné, d'opérateurs linéaires fermés maximaux, si l'on donne à ce terme un sens analogue à celui qu'il a dans la théorie des opérateurs symétriques.

---

(43) [1], p. 48. Von Neumann [2], p. 310, s'occupe aussi de ces problèmes de prolongement.

On va généraliser ceci par l'emploi des images. Soit V l'image de l'opérateur linéaire fermé A (que nous ne supposons plus dans le cas p') par rapport à H, H', U. Prendre un prolongement linéaire fermé $\overline{A}$ de A revient à prendre une variété linéaire fermée $\overline{V} \supset V$. Le nombre de dimensions de $\overline{V} \ominus V$ sera appelé la dimension du prolongement. Soit $V' = \mathcal{H} \ominus V$ ($\mathcal{H} = H \oplus H'$) l'image de $-A^{*-1}$ par rapport à H, H', U. On a $\overline{V} \ominus V \subset V'$, de sorte que le prolongement de A peut toujours être considéré comme emprunté à $-A^{*-1}$. Comme $U(V')$, $U(\mathcal{H} \ominus \overline{V})$ sont les images de $-A^*$, $-\overline{A}^*$, on voit aussi que :

Lemme 9,2. — *Si* $\overline{A}$ *est un prolongement à m dimensions de* A, A^* *est un prolongement à m dimensions de* $\overline{A}^*$.

Il est immédiat aussi que :

Lemme 9,3. — *Si* $\overline{A}$ *est un prolongement à m dimensions de* A, *avec m fini, on a :* $D_{\overline{A}} = D_A \dot{+} p$, *où p est une variété linéaire fermée de dimension finie.*

Revenons au cas où A est dans le cas p'. D'après le procédé de Stone, on peut toujours faire, d'une infinité de manières, des prolongements uniformes de dimension finie, quand A est non borné. Mais peut-on faire des prolongements uniformes de dimension infinie? (Si un tel prolongement était impossible pour certains A, on pourrait introduire une nouvelle notion d'opérateur maximal, de même qu'on a défini les noyaux maximaux dans les variétés J). Il s'agit de trouver dans V' une variété linéaire fermée v à ∞ dimensions telle que $(V \oplus v) \cap H' = o$. On va voir que, pour A non borné, c'est toujours possible d'une infinité de manières. La condition nécessaire et suffisante pour que $(V \oplus v) \cap H' = o$ est qu'on ne puisse trouver deux vecteurs, $Z \in V$, $Z' \in v$, tels que $P_H Z = P_H Z'$, sauf si $Z = Z' = o$. Or, les vecteurs de V' dont la projection sur H appartient à $P_H V = D_A$ forment la variété $P_{V'} H'$ (remarques $\mathcal{R}$). D'où : $(V \oplus v) \cap H' = o$ si et seulement si $v \cap P_{V'} H' = o$. Or, V' et H' sont en position p', de sorte que $[P_{V'} H'] = V'$. On pourra donc (lemme 8,3) trouver des variétés linéaires fermées disjointes de $P_{V'} H'$ si et seulement si $P_{V'} H'$ est non fermée (et alors, v pourra avoir ∞ dimensions), c'est-à-dire si H' et V sont asymptotiques, c'est-à-dire si A est non borné. Donc :

Théorème 9,1. — *Un opérateur linéaire fermé* A *dans le cas* p' *admet un prolongement fermé dans le cas* p' *si et seulement si* A *est non borné ; et il existe alors une infinité de tels prolongements à* ∞ *dimensions.*

Supposons maintenant A dans le cas p : A^{-1} est uniforme, et $[\Delta_A] = H$. Peut-on prolonger A en $\overline{A}$ de façon que $\overline{A}$ fermé soit encore dans le cas p, c'est-à-dire que $\overline{A}$ et $\overline{A}^{-1}$ soient encore uniformes (on aura évidemment $[D_{\overline{A}}] = [\Delta_{\overline{A}}] = H$) ? C'est impossible (th. 9,1) si A est borné ou si A^{-1} est borné. Supposons donc $D_A \neq H$, $\Delta_A \neq H$; alors, par le procédé de Stone, on voit aisément qu'on peut obtenir des prolongements linéaires fermés dans le cas p de dimension finie. Mais peut-on obtenir des prolongements linéaires fermés dans le cas p à ∞ dimensions ?

Revenant aux notations antérieures, V et H sont en position p, on veut que $(V \oplus v) \cap H = (V \oplus v) \cap H' = o$; comme plus haut, on voit que ceci revient à exiger que v soit disjointe de $P_{V'}H$, $P_{V'}H'$, qui sont des variétés J complémentaires dans V'. Il est donc nécessaire que $P_{V'}H$ et $P_{V'}H'$ soient non fermées (c'est-à-dire que V soit asymptotique à H et H', c'est-à-dire que A et A^{-1} soient non bornés); réciproquement, si cette condition est remplie, on pourra (th. 8,4) trouver une infinité de variétés linéaires fermées v, disjointes de $P_{V'}H$ et $P_{V'}H'$, à ∞ dimensions. Donc :

Théorème 9,2. — *Un opérateur linéaire fermé dans le cas p admet un prolongement fermé dans le cas p si et seulement si* A *et* A^{-1} *sont non bornés; et il existe alors une infinité de tels prolongements à* ∞ *dimensions.*

Prolongements simples. — Reprenons l'opérateur linéaire fermé A dans le cas p et les notations précédentes. La recherche d'une variété linéaire fermée $v \subset V'$ disjointe de $P_{V'}H$ et $P_{V'}H'$ revient, en projetant sur H, à la recherche d'une variété J, $d \subset P_H V' (= \Delta_{A^*})$, fermée dans la topologie de $P_H V'$, disjointe de $P_H P_{V'} H = (\Delta_{A^*A})$ et de $P_H P_{V'} H' (= D_A \cap \Delta_{A^*})$. Remarquons que la donnée de A et de $\overline{A}$ définit univoquement d: car, quand on fait varier la symétrie U, $P_H(\overline{V} \ominus V)$ ne change pas. Ainsi :

Proposition 9,1. — *Le prolongement linéaire fermé dans le cas p le plus général de l'opérateur linéaire fermé* A *dans le cas p s'obtient de la manière suivante : on prend une variété* J, $d \subset \Delta_{A^*}$, *fermée dans la topologie de* Δ_{A^*}, *disjointe de* D_A *et de* Δ_{A^*A}; *pour tout vecteur*

$$Z = X + Y \in D_{\overline{A}} = D_A \dot{+} d \, (X \in D_A,\ Y \in d),$$

on définit $\overline{A}$ *par* : $\overline{A}Z = AX - A^{*-1} Y$.

Cette construction est certainement possible, d'après le th. 9,2 dès que A et A^{-1} sont non bornés. Mais on peut supposer d sous-variété J simple de D_A, et $[d]$ disjointe de $P_H P_{V'} H$ et $P_H V$, car c'est là une conséquence particulière de la prop. 8,1. D'où la notion que voici : on dira qu'un prolongement linéaire fermé $\overline{A}$ de A (fermé dans le cas p) est un prolongement simple lorsqu'il peut s'obtenir par la construction de la prop. 9,1, d étant une sous-variété J simple de Δ_{A^*} telle que $[d] \cap D_A = [d] \cap \Delta_{A^*A} = o$. Tout prolongement dans le cas p de dimension finie est un prolongement simple (car alors d est une sous-variété J simple de Δ_{A^*} disjointe de D_A et Δ_{A^*A}, et $[d] = d$). Mais la proposition (8,1) nous apprend l'existence de prolongements simples à ∞ dimensions. Il reste à prouver que tout prolongement linéaire fermé dans le cas p n'est pas simple. Pour cela, supposons que, non seulement v, mais $V' \ominus v$ soit disjointe de $P_{V'}H$ et $P_{V'}H'$ (ce qui, d'après le théorème (8,4), est possible d'une infinité de manières). Alors, (lemme 9,1), $P_H v = d$ est partout dense dans H; donc d ne peut être sous-variété J simple de $P_H V'$, de sorte que le prolongement correspondant $\overline{A}$ de A n'est pas simple (et même n'est pas prolongeable en prolongement simple de A).

3. **Restrictions d'un opérateur fermé** A. — Si A est dans le cas p', on peut chercher s'il existe des opérateurs linéaires fermés dans le cas p', $\overline{A}$, dont A soit prolongement. Il faut que $[D_{\overline{A}}] = H$. ($\overline{A}$ est évidemment, comme A, uniforme). Si A est dans le cas p, on peut chercher s'il existe des opérateurs linéaires fermés dans le cas p, $\overline{A}$, dont A soit prolongement. Il faut que $[D_{\overline{A}}] = [\Delta_{\overline{A}}] = H$ ($\overline{A}$ et $\overline{A}^{-1}$ sont évidemment, comme A et A^{-1}, uniformes). On pourrait traiter ces problèmes comme au paragraphe 2, mais on se ramène aussitôt aux problèmes de prolongements, grâce au lemme 9,2, en échangeant les rôles de A et A^*. Ainsi le premier problème admet une infinité de solutions dès que A est non borné, et le deuxième problème admet une infinité de solutions dès que A et A^{-1} sont non bornés (dans les deux cas, on peut alors supposer que A est un prolongement de $\overline{A}$ à ∞ dimensions). Ces conditions sont d'ailleurs nécessaires. En particulier, on voit que :

Proposition 9,2. — *Tout opérateur linéaire fermé symétrique* A *non borné admet une infinité de restrictions fermées symétriques* $\overline{A}$; *on peut même supposer que* A *est un prolongement de* $\overline{A}$ *à* ∞ *dimensions.*

4. **Construction de Neumark.** — Neumark a construit un opérateur linéaire fermé symétrique K dont le carré n'est défini qu'en o, c'est-à-dire tel que $D_K \cap \Delta_K = o$. Une telle construction est aisée à partir des théorèmes du chapitre 8. Soit A un opérateur linéaire fermé symétrique dans le cas p, avec A et A^{-1} non bornés; soit V son image par rapport à H, H′, U ; soit $\mathcal{H} = H \oplus H'$, $V' = \mathcal{H} \ominus V$. On sait que : $D_A = P_H V$, $\Delta_A \subset \Delta_{A^*} = P_H V'$. Soient v et $\bar{v}$, deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans V, à ∞ dimensions, disjointes de $P_V H$ et $P_V H'$, qui sont complémentaires dans V et non fermées (th. 8,4); v est l'image, par rapport à H, H′, U, d'un opérateur K : 1° $[D_K] = [P_H v] = H$ (lemme 9,1) puisque $(V \ominus v) \cap P_V H = o$. Comme $v \subset V$, K est symétrique, (et même, on le voit aisément, dans le cas p); 2° Les $X \in V$ tels que $P_H X \in P_H V'$ sont dans $P_V H'$ (remarques $\mathcal{R}$); comme v est disjointe de $P_V H'$, $D_K = P_H v$ est disjointe de $P_H V' = \Delta_{A^*}$. *A fortiori*, $D_K \cap \Delta_K = o$. D'où un résultat plus fort que celui de Neumark.

Théorème 9,3. — *Soit* A *un opérateur linéaire fermé symétrique dans le cas p. Dès que* A *et* A^{-1} *sont non bornés*, A *est prolongement d'une infinité d'opérateurs linéaires fermés symétriques* K, *d'indices de déficience* (∞, ∞), *tels que* $D_K \cap \Delta_{A^*} = o$ (*donc, a fortiori, qui n'ont pas de carré*).

On peut même remarquer, en raisonnant sur $\bar{v}$ comme sur v, que $[P_H \bar{v}] = H$, $P_H \bar{v} \cap \Delta_{A^*} = P_H \bar{v} \cap D_K = o$, $D_A = D_K \dot{+} (P_H \bar{v})$. La construction de Neumark est ainsi une application particulière de la

Proposition 9,3. — *Soient* D, D′, *deux variétés* J *complémentaires non fermées; on peut trouver, dans* D, *deux variétés* J *partout denses dans* H, d_1 *et* d_2, *disjointes entre elles et disjointes de* D′, *telles que* $D = d_1 \dot{+} d_2$.

Observons aussi que V', v, $\bar{v}$ sont orthogonales deux à deux, sous-tendent $\mathcal{H}$, et que chacune de ces variétés est en position p avec H. D'où la

PROPOSITION 9,2. — *On peut trouver trois variétés* J *partout denses, deux à deux disjointes, la somme de deux quelconques d'entre elles (forcément non fermée) étant complémentaire de la troisième* ([44]).

Ainsi, alors que la somme de deux variétés J disjointes, dont l'une est non fermée (prop. 3,7), on vient de construire trois variétés J partout denses disjointes dont la somme est H.

5. **Sur la topologie propre d'une variété J.** — PROPOSITION 9,5. — *Soit* D *une variété* J *partout dense non fermée. On peut trouver, d'une infinité de manières, deux variétés* J *partout denses disjointes* D_1 *et* D_2 *telles que* $D = D_1 \dot{+} D_2$. *Alors, dans la topologie propre de* D, D_1 *et* D_2 *sont fermées, non asymptotiques, et sous-tendent* D.

(Ainsi, l'exemple construit p. 43 n'a rien de pathologique.)

Démonstration. — D est projection sur H, dans $H \oplus H'$, d'une variété linéaire fermée V en position p avec H. $P_V H$ est non fermée. Soit (th. 8,4) W_1 et W_2, deux variétés linéaires fermées à ∞ dimensions, orthogonales complémentaires dans V, disjointes de $P_V H$. D'après le lemme (9, 1), on peut prendre : $D_1 = P_H W_1$, $D_2 = P_H W_2$.

On peut, à ce propos, faire les rapprochements suivants :

1° Soit D une variété J non fermée, avec $[D] = H$. Si la variété J, $D' \subset D$, est partout dense dans la topologie de D, la deuxième interprétation de cette topologie montre aussitôt que D' est partout dense dans H. De même, si D' est fermée dans H, D' est fermée dans la topologie de D. Les réciproques sont fausses : la proposition (9,5) le prouve.

2° Dans le lemme (8,2), étant donnée une variété linéaire fermée V de déficience infinie, on construit un opérateur linéaire fermé A borné dans le cas p tel que $[A(V)] = H$: $A(V)$ est alors fermé de déficience infinie dans la topologie de Δ_A, d'après la première interprétation de cette topologie.

6. **Propriété caractéristique des variétés asymptotiques.** — PROPOSITION 9,6. — *Soient* V, W *deux variétés linéaires fermées disjointes. Si* V *et* W *sont non asymptotiques,* $V \oplus \overline{W}$ *est strictement contenue dans* $V \oplus W$ *dès que la variété linéaire fermée* $\overline{W}$ *est strictement contenue dans* W. *Au contraire, si* V *et* W *sont asymptotiques, on peut trouver une infinité de variétés linéaires fermées* $\overline{W} \subset W$, *de déficience infinie dans* W, *telles que* $V \oplus W = V \oplus \overline{W}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{H} = V \oplus W$, $V' = \mathcal{H} \ominus V$, $D = P_{V'} W$, $\bar{D} = P_{V'} \overline{W}$.

([44]) On peut construire n variétés J (n fini quelconque) présentant une disposition analogue.

V et W sont en position p'' dans $\mathcal{H}$, donc W et V' sont en position p'; D est partout dense dans V'. D'autre part, $V \oplus \overline{W} = [V \dotplus \overline{D}]$, de sorte que $V \oplus \overline{W} = \mathcal{H}$ si et seulement si $\overline{D}$ est partout dense dans V'. Si W est non asymptotique à V, il y a entre $X \in W$ et $P_{V'}X$ une correspondance biunivoque bornée dans les deux sens, donc $\overline{D}$, qui est fermée, est égale à V' si et seulement si $\overline{W} = W$. Si W est asymptotique à V, $\overline{D}$ peut être partout dense dans V' avec une variété $\overline{W}$ de déficience infinie dans W : il suffit (lemme 9,1) que $W \ominus \overline{W}$ soit disjointe de $P_W V'$.

Ainsi, on peut déterminer si deux variétés linéaires fermées sont asymptotiques par seul emploi des opérations $\cap$ et $\oplus$ (sans emploi de $\dotplus$).

7. **Sur les systèmes** L. — Proposition 9,7. — *Soit* T *un opérateur linéaire fermé dans le cas p, borné, d'inverse non borné. Il existe une infinité de systèmes orthonormaux complets* (e_i) *tels que la suite* (Te_i) *admette tout l'espace pour noyau* (45).

Démonstration. — Δ_T et Δ_{T^*} sont non fermées. Soit (lemme 8,3) D une variété J partout dense dans H et disjointe de Δ_{T^*}, et (e_i) un système orthonormal complet inclus dans D. On a $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset D$. Posons $Te_i = A_i$. Les A_i forment un système L. T* est défini (Julia [2]) par

$$(T^*X, e_i) = (X, A_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Mais, comme $\{e_1, e_2, \ldots\} \cap \Delta_{T^*} = 0$ (46), les systèmes du type

$$(A_i, X) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où c_i diffère de zéro seulement pour un nombre fini de valeurs de i, sont insolubles sauf si tous les c_i sont nuls. Autrement dit, les équations

$$(A_i, X) = 0 \qquad (i = n + 1, n + 2, \ldots),$$

entraînent $X = 0$ (car les A_i sous-tendent H puisque T est dans le cas p). Donc $[A_n, A_{n+1}, \ldots] = H$ pour tout n, c'est-à-dire que (A_i) admet H pour noyau. En particulier, aucun vecteur de la suite n'est essentiel.

8. **Représentations covariantes et contravariantes d'opérateurs fermés.** — On peut construire des opérateurs linéaires fermés par les deux méthodes suivantes (Julia [4] [9]).

Soient (A_i) et (A'_i) deux suites de vecteurs :

1° On définit le transformé d'un vecteur X comme le vecteur Y qui a mêmes coordonnées covariantes par rapport aux A'_i que X par rapport aux A_i :

$$(A_i, X) = (A'_i, Y) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Désignons par $\mathfrak{T}_1(A_i, A'_i)$ l'opérateur obtenu ; il est fermé.

(45) Sur cette notion, cf. Julia [7], [8].
(46) On peut réaliser cette disposition sans emploi du lemme 8,3.

2° On prend le plus petit prolongement linéaire fermé de l'opérateur qui transforme A_i en A'_i pour tout i. Soit $\mathcal{G}_2(A_i, A'_i)$ cet opérateur ([47]).

Ces opérateurs peuvent être multiformes. Mais, si les suites (A_i), (A'_i) sont des bases faibles, $\mathcal{G}_1(A_i, A'_i)$ et $\mathcal{G}_2(A_i, A'_i)$ sont uniformes. C'est immédiat pour $\mathcal{G}_1(A_i, A'_i)$; pour $\mathcal{G}_2(A_i, A'_i)$, remarquons que X a mêmes coordonnées contravariantes, par rapport aux A_i, que le transformé de X par $\mathcal{G}_2(A_i, A'_i)$, par rapport aux A'_i ; donc, si l'on désigne par (B_i), (B'_i) les suites duales de (A_i), (A'_i), on a

(1) $$\mathcal{G}_2(A_i, A'_i) \leqq \mathcal{G}_1(B_i, B'_i).$$

De même

(1') $$\mathcal{G}_2(B_i, B'_i) \leqq \mathcal{G}_1(A_i, A'_i).$$

Limitons-nous désormais aux suites de vecteurs qui sont des bases faibles. Si l'on avait toujours : $\mathcal{G}_2(A_i, A'_i) = \mathcal{G}_1(B_i, B'_i)$, il suffirait d'étudier les opérateurs du type $\mathcal{G}_1$. Mais on verra qu'il n'en est pas ainsi : c'est le but de cette étude, proposée par Julia quand les A_i forment une base orthonormale de H.

La méthode des images éclaire cette question et montre sa connexion avec celle des opérateurs adjoints. Soit H' un espace de Hilbert orthogonal à H. U étant une symétrie de $\mathcal{H} = H \oplus H'$ qui transforme H en H', on posera :

$$\overline{A}_i = UA'_i, \qquad \overline{B}_i = UB'_i, \qquad C_i = A_i + \overline{A}_i, \qquad D_i = -B_i + \overline{B}_i.$$

On a

$$(C_i, D_j) = -(A_i, B_j) + (\overline{A}_i, \overline{B}_j) = -\delta_{ij} + \delta_{ij} = 0,$$

donc C_i et D_j sont orthogonaux.

Image de $\mathcal{G}_2(A_i, A'_i)$ par rapport à H, H', U : c'est $V_2 = [C_1, C_2, \ldots]$. De même, l'image de $-\mathcal{G}_2(B_i, B'_i) = \mathcal{G}_2(-B_i, B'_i)$ est $V'_2 = [D_1, D_2, \ldots]$. Comme (A_i) et (A'_i) sont des bases faibles, on voit que

$$[P_H V_2] = [P_H V'_2] = H, \qquad [P_{H'} V_2] = [P_{H'} V'_2] = H' ;$$

comme V_2 et V'_2 sont orthogonales, on en déduit que

$$V_2 \cap H = V_2 \cap H' = V'_2 \cap H = V'_2 \cap H' = 0;$$

bref, V_2 et V'_2 sont en position p avec H et H', $\mathcal{G}_2(A_i, A'_i)$ et $\mathcal{G}_2(B_i, B'_i)$ sont dans le cas p. De plus, l'orthogonalité de V_2 et V'_2 prouve que

$$-\mathcal{G}_2(B_i\, B'_i) \leqq -\mathcal{G}_2^{*-1}(A_i, A'_i),$$

ou

(2) $$\mathcal{G}_2(B_i, B'_i) \leqq \mathcal{G}_2^{*-1}(A_i, A'_i),$$

De même

(2') $$\mathcal{G}_2(A_i, A'_i) \leqq \mathcal{G}_2^{*-1}(B_i, B'_i).$$

Image de $\mathcal{G}_1(A_i, A'_i)$: soit $X \in H$, $Y \in H$; la relation $(A_i, X) = -(A'_i, Y)$ peut

---

([47]) On sait que tout opérateur linéaire fermé est du type $\mathcal{G}_1$ ou du type $\mathcal{G}_2$, et même qu'il est susceptible de représentations plus précises encore : il suffit de partir de la proposition 7.3.

s'écrire

$$(A_i + \bar{A}_i,\ X + UY) = 0,$$

ou : $X + UY$ orthogonal à C_i.

Donc l'image de $\mathcal{T}_1(A_i,\ -A'_i)$ par rapport à H, H', U est $V_1 = \mathcal{H} \ominus V_2$; de même, l'image de $\mathcal{T}_1(B_i,\ B'_i)$ est $V'_1 = \mathcal{H} \ominus V'_2$. Donc

$$\mathcal{T}_1(A_i,\ A'_i) = \mathcal{T}_2^{*-1}(A_i,\ A'_i). \tag{3}$$

De même

$$\mathcal{T}_1(B_i,\ B'_i) = \mathcal{T}_2^{*-1}(B_i,\ B'_i). \tag{3'}$$

On voit que $\mathcal{T}_1(A_i,\ A'_i)$ et $\mathcal{T}_1(B_i,\ B'_i)$ sont dans le cas p. On retrouve, à partir de (2), (2'), (3), (3') les relations (1), (1').

Donc la question de savoir si l'on a égalité ou inégalité dans ces relations se ramène à la question suivante : V_2 et V'_2 sont-elles ou non complémentaires dans $\mathcal{H}$?

Nous allons voir que les deux éventualités sont réalisables, et même en restreignant beaucoup les conditions du problème : en effet, d'une part, on va partir d'un opérateur linéaire fermé T dans le cas p donné ; soit V son image par rapport à H, H', U; soit $V' = \mathcal{H} \ominus V$ l'image de $-T^{*-1}$. On va chercher des représentations de T du type $\mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_2$, et même (deuxième restriction) on imposera aux A_i d'être une base orthonormale de H : ils sont alors confondus avec les B_i ; on posera $A_i = B_i = e_i$.

Pour que T puisse être du type $\mathcal{T}_2(e_i,\ A'_i)$, il faut que $e_i \in P_H V = D_T$. Alors, $e_i = P_H C_i$, où $C_i \in V$. Soit $\bar{A}_i = P_{H'} C_i$, $A'_i = U\bar{A}_i$. L'opérateur $\mathcal{T}_2(e_i,\ A'_i)$ a pour image $[C_1, C_2, \ldots]$, de sorte que $\mathcal{T}_2(e_i,\ A'_i) \leq T$. L'égalité a lieu seulement si :

Condition γ_1 : $\{C_1, C_2, \ldots\}$ est partout dense dans V, c'est-à-dire que $\{e_1, e_2, \ldots\}$ est partout dense dans D_T au sens de la topologie propre de D_T.

Les A'_i forment dans H une base faible si et seulement si les circonstances suivantes sont réalisées :

a. $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots\}$ est partout dense dans H'; ceci est une conséquence de la condition γ_1.

b. Les $\bar{A}_i$ admettent une suite duale $(\bar{B}_i)$, ou, ce qui est équivalent ([48]),

$$e_i \in (P_H V) \cap (P_H V'),$$

c'est-à-dire encore :

Condition γ_2 : $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset (P_H V) \cap (P_H V')$.

Alors, $-e_i = P_H D_i$, où $D_i \in V'$, et $P_{H'} D_i = \bar{B}_i$. D'autre part, il existe dans H'

([48]) En effet, les conditions : (1) $(\bar{B}_i,\ \bar{A}_j) = \delta_{ij}$ sont équivalentes aux conditions

$$(-e_i + \bar{B}_i,\ C_j) = (-e_i,\ e_j) + (\bar{B}_i,\ \bar{A}_j) = -\delta_{ij} + \delta_{ij} = 0$$

pour tout i et j. L'existence des $\bar{B}_i$ satisfaisant à (1) est donc équivalente à l'existence de vecteurs $D_i = -e_i + \bar{B}_i$ avec $(\bar{B}_i \in H')$ orthogonaux aux C_i donc à V, donc appartenant à V', ou encore à l'existence de vecteurs $D_i \in V'$ tels que $P_H D_i = -e_i$.

une suite E_i telle que

$$C_i = P_V E_i, \qquad D_i = P_{V'} E_i, \qquad E_i = C_i + D_i = \overline{A}_i + \overline{B}_i \quad (^{49}).$$

On posera $U\overline{B}_i = B'_i$.

c. Condition γ_3 : $\{\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots\}$ est partout dense dans H'.

Les conditions γ_1, γ_2, γ_3 étant supposées vérifiées (elles ne concernent au fond que les e_i), on sait que $W' = [D_1, D_2, \ldots]$ est l'image de $-\mathcal{T}_2(e_i, B'_i)$, que V' est l'image de $-\mathcal{T}_1(e_i, A'_i) = -\mathcal{T}_2^{*-1}(e_i, A'_i)$, et que $W = \mathcal{H} \ominus W'$ est l'image de $\mathcal{T}_1(e_i, B'_i) = \mathcal{T}_2^{*-1}(e_i, B'_i)$. On a $V \subset W$, donc $\mathcal{T}_2(e_i, A'_i) = T \leqq \mathcal{T}_1(e_i, B'_i)$. De même, $W' \subset V'$, donc $\mathcal{T}_2(e_i, B'_i) \leqq T^{*-1} = \mathcal{T}_1(e_i, A'_i)$. L'écart entre les modes de représentations $\mathcal{T}_2(e_i, A'_i)$ et $\mathcal{T}_1(e_i, B'_i)$ est matérialisé par la variété $v = W \ominus V = V' \ominus W'$. De même pour l'écart entre $\mathcal{T}_2(B'_i, e_i)$ et $\mathcal{T}_1(A'_i, e_i)$ (seul, *a priori*, $\mathcal{T}_1(A'_i, e_i)$ représente exactement T^*).

Ceci posé, le problème est le suivant : tout en vérifiant les conditions γ_1, γ_2, γ_3, peut-on s'arranger pour que $v = 0$ ou au contraire pour que la dimension de v soit finie ou infinie? Observons d'abord que γ_1, γ_2, γ_3 font intervenir, non pas les e_i individuellement, mais la variété $e = \{e_1, e_2, \ldots\}$, car le choix de e détermine les variétés $\{C_1, C_2, \ldots\}$ et $\{\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots\}$; une fois e choisie conformément à γ_1, γ_2, γ_3, il suffira de choisir dans e un système orthonormal sous-tendant $[e] = H$ (ce qui peut se faire d'une infinité de manières) pour avoir des e_i satisfaisant à γ_1, γ_2, γ_3.

Soit $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots\}$. On a $e = P_H P_V \mathcal{E} = P_H P_{V'} \mathcal{E}$. Au lieu de partir de e, on peut partir de $\mathcal{E}$, et prendre $e = P_H P_V \mathcal{E}$. La condition γ_1 est alors remplacée par :

Condition γ'_1 : $P_V \mathcal{E}$ est partout dense dans V.

La condition γ_2 sera automatiquement vérifiée; la condition γ_3 devient (puisque $\overline{B}_i = P_{H'} P_{V'} E_i$).

Condition γ'_2 : $P_{H'} P_{V'} \mathcal{E}$ est partout dense dans H'.

Comme $D_i = P_{V'} E_i$, on a : $W' = [P_{V'} \mathcal{E}]$. Donc, si l'on veut réaliser $V = W$, auquel cas $T = \mathcal{T}_2(e_i, A'_i) = \mathcal{T}_1(e_i, B'_i)$, il faut et il suffit que l'on ait :

Condition γ'_3 : $P_{V'} \mathcal{E}$ est partout dense dans V'; et si l'on veut $V \subsetneqq W$, il faut et il suffit que l'on ait :

Condition $\overline{\gamma}'_3$: $P_{V'} \mathcal{E}$ est non partout dense dans V'.

Conclusions. — 1° Cherchons à réaliser $V = W$. On a les conditions nécessaires et suffisantes γ'_1 et γ'_3 (car γ'_3 entraîne γ'_2). D'après le lemme 9,1 ces conditions sont équivalentes à $H' \ominus [\mathcal{E}]$ disjointe de $P_{H'} V$ et $P_{H'} V'$. Ceci peut toujours être obtenu en prenant $[\mathcal{E}] = H'$; mais, dès que les variétés J complémentaires $P_{H'} V$ et $P_{H'} V'$ sont non fermées, c'est-à-dire dès que T et T^{-1} sont non bornés, ceci peut être obtenu avec une variété $H \ominus [\mathcal{E}]$ à ∞ dimensions (th. 8,4).

2° Cherchons à réaliser $V \subsetneqq W$; on a les conditions nécessaires et suffisantes γ'_1, γ'_2, $\overline{\gamma}'_3$; on va les remplacer à nouveau par d'autres conditions; d'après le lemme 9,1, γ'_1 est équivalente à :

---

(49) Car $C_i + D_i = e_i + \overline{A}_i - e_i + \overline{B}_i = \overline{A}_i + \overline{B}_i = E_i \in H$; donc $C_i = P_V E_i$, $D_i = P_{V'} E_i$.

Condition γ''_1 : $H'\ominus[\mathcal{E}]$ est disjointe de $P_{H'}V$. De même, $\overline{\gamma}'_3$ est équivalente à :

Condition γ''_2 : $(H'\ominus[\mathcal{E}])\cap(P_{H'}V')\neq o$ (et les $X\in V'$ tels que $P_{H'}X\in H'\ominus[\mathcal{E}]$ constituent la variété $v = W\ominus V$: on voit que $P_{H'}v$ est une sous-variété J simple de $P_{H'}V'$).

Enfin, $P_{H'}(P_{V'}\mathcal{E})$ est partout dense dans H' si et seulement si $v = V'\ominus[P_{V'}\mathcal{E}]$ est disjointe de $P_{V'}H'$, c'est-à-dire si les vecteurs de V' qui se projettent sur H' à l'intérieur de $H'\ominus[\mathcal{E}]$ sont extérieurs à $P_{V'}H'$, c'est-à-dire enfin si :

Condition γ''_3 : $H'\ominus[\mathcal{E}]$ est disjointe de $P_{H'}P_{V'}H'$.

La condition γ''_2 impose $H'\ominus[\mathcal{E}]\neq o$; alors, γ''_1 n'est réalisable que si $P_{H'}V$ est non fermée, c'est-à-dire si T^{-1} est non borné; γ''_3 n'est réalisable que si $P_{H'}P_{V'}H'$ est non fermée, c'est-à-dire si T est non borné. Donc, si T, dans le cas p, est borné ou d'inverse borné, on aura toujours :

$$T = \mathcal{C}_2(e_i, A'_i) = \mathcal{C}_1(e_i, B'_i). \qquad T^* = \mathcal{C}_2(B'_i, e_i) = \mathcal{C}_1(A'_i, e_i).$$

Mais, si T et T^{-1} sont non bornés, γ''_1, γ''_2, γ''_3 sont réalisables, d'après la prop. 8,1, avec même des variétés $H'\ominus[\mathcal{E}]$, donc des variétés v, à ∞ dimensions. Donc, dans ce cas, $\mathcal{C}_1(e_i, B'_i)$ est un prolongement linéaire fermé à ∞ dimensions dans le cas p de $T = \mathcal{C}_2(e_i, A'_i)$. De plus, les conditions γ''_1, γ''_2, γ''_3, par leur caractère nécessaire et suffisant, montrent que $\mathcal{C}_1^{-1}(e_i, B'_i)$ est un prolongement simple arbitraire de T^{-1}. Donc :

Théorème 9,4. — *Soit* T *un opérateur linéaire fermé dans le cas p. Choisissons dans* D_T *un système orthonormal complet* (e_i) *tel que les* $Te_i = A'_i$ *forment une base faible et tel que* $T = \mathcal{C}_2(e_i, A'_i)$. *Ce choix est possible d'une infinité de façons, et, suivant le choix fait, on peut avoir les cas suivants :*

$$(1) \qquad T = \mathcal{C}_2(e_i, A'_i) = \mathcal{C}_1(e_i, B'_i). \qquad T^* = \mathcal{C}_2(B'_i, e_i) = \mathcal{C}_1(A'_i, e_i)$$

(*la suite* B'_i *étant la duale de la suite* A'_i). *Cette circonstance se présentera seule si* T *est borné, ou si* T^{-1} *est borné, cas dans lesquels on a de plus*

$$[A'_1 + B'_1, A'_2 + B'_2, \dots] = H.$$

Dès que T *et* T^{-1} *sont non bornés, cette circonstance peut être réalisée avec une variété* $[A'_1 + B'_1, A'_2 + B'_2, \dots]$ *de déficience quelconque.*

$$(2) \qquad T = \mathcal{C}_2(e_i, A'_i) < \mathcal{C}_1(e_i, B'_i); \qquad T^* = \mathcal{C}_1(A'_i, e_i) > \mathcal{C}_2(B'_i, e_i)$$

seulement si T *et* T^{-1} *sont non bornés.* $\mathcal{C}_1^{-1}(e_i, B'_i)$ *est alors un prolongement simple arbitraire de* T^{-1}. *Si n est la dimension du prolongement et d la déficience de la variété* $[A'_1 + B'_1, A'_2 + B'_2, \dots]$, *on a :* $n \leqq d$. *Les vecteurs*

---

[70] Les vecteurs irréguliers forment une sorte de domaine générateur des domaines où

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(A'_i, X)|^2 < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} |(B'_i, Y)|^2 < +\infty, (X, Y) \neq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{(A'_i, X)}(B'_i, Y).$$

Cette question sera étudiée ailleurs.

irréguliers de la suite A'_i ([70]) *sous-tendent une variété linéaire fermée à n dimensions.*

X. — Domaines d'existence des opérateurs symétriques.

1. Définition des variétés J_S. — On sait qu'une variété J est définie à une transformation isométrique près quand on connaît la suite de ses valeurs propres (qu'on peut supposer entières), donc quand on se donne, pour chaque entier k, la multiplicité de la valeur propre k; cette multiplicité peut être nulle ou infinie. Si, pour tout k, cette multiplicité peut être supposée infinie, nous dirons qu'on a une variété J_S. Toutes les variétés J_S sont isométriquement équivalentes. Elles sont de classe $2a$.

LEMME 10,1. — *Soit* (V_i) *une suite de variétés linéaires fermées deux à deux orthogonales, à* ∞ *dimensions. Soit* D *l'ensemble des* $X \in [V_1, V_2, \ldots]$ *tels que* $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \| P_{V_i} X \|^2 < +\infty$. D *est la variété* J_S *la plus générale.*

Démonstration. — Si $(e_1^i, e_2^i, \ldots)$ est une base orthonormale de V_i, les $e_i^j (i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots)$ forment une base orthonormale de D avec les valeurs propres correspondantes $a_i^j = j$.

LEMME 10,2. — *Soit* D *une variété* J_S, *et* $D' \subset H \ominus [D]$ *une variété* J *quelconque;* $D \dot{+} D'$ *est une variété* J_S.

Démonstration. — Supposons D construite à partir des variétés V_i comme dans le lemme 10,1. Soit d'autre part (e_i) une base orthonormale de D', (a_i) une suite correspondante de valeurs propres qu'on peut supposer entières. Soit v_i la variété linéaire fermée sous-tendue par les e_k pour lesquels $a_k = i$, et soit $W_i = V_i \oplus v_i$. $D \dot{+} D'$ est l'ensemble des $X \in [W_1, W_2, \ldots]$ pour lesquels $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \|P_{W_i} X\|^2 < +\infty$. V_i, donc *a fortiori* W_i, ont ∞ dimensions pour tout i. Donc $D \dot{+} D'$ est une variété J_S (lemme 10,1).

LEMME 10,3. — *Soit* D *une variété* J_S *et* v *une variété linéaire à n dimensions (n fini)*; $D \dot{+} v$ *est une variété* J_S.

Démonstration. — Supposons D construite à partir des variétés V_i comme dans le lemme 10,1. Soit $v_i = P_{V_i} v$; v_i a une dimension finie. Soit $\overline{V}_i = V_i \ominus v_i$; $\overline{V}_i$ a ∞ dimensions. Soit $\overline{D}$ la variété J formée des $X \in [\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots]$ pour lesquels $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \| P_{\overline{V}_i} X \|^2 < +\infty$ et D' la variété J formée des $Y \in [v_1, v_2, \ldots]$ pour lesquels $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \| P_{v_i} Y \|^2 < +\infty$. $\overline{D}$ est une variété J_S; on a, $D = \overline{D} \dot{+} D'$, donc, $D \dot{+} v = \overline{D} \dot{+} (D' \dot{+} v)$. Or, $D' \dot{+} v \subset H \oplus [\overline{D}]$. Donc (lemme 10,2) $D \dot{+} v$ est une variété J_S.

THÉORÈME 10,1. — *Soit un opérateur self-adjoint* K *dont le spectre contient un segment* $(0,\varepsilon)$ $(\varepsilon \neq 0)$. Δ_K *est une variété* J_S.

Démonstration. — Soit E_λ la décomposition de l'unité attachée à K, et $V_\lambda = \Delta_{E_\lambda}$. Posons, si par exemple $\varepsilon > 0$:

$$W_n = V_{\varepsilon/n} \ominus V_{\varepsilon/n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$
$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots, \qquad W' = H \ominus W.$$

Les W_n ont ∞ dimensions et réduisent K. $X \in W$ est un vecteur de Δ_K si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \| P_{W_i} X \|^2 < +\infty$. Donc $\Delta_K \cap W$ est une variété J_S. Comme $\Delta_K = (\Delta_K \cap W) \dot{+} (\Delta_K \cap W')$, Δ_K est une variété J_S (lemme 10,2).

Proposition 10,1. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p. Si les spectres de* A^*A *et* B^*B *contiennent un segment* $(0,\varepsilon)$, *il existe un opérateur de première classe* L *et un unitaire* U *tels que* $A = UBL$.

Démonstration. — Les spectres de $\sqrt{A^*A}$ et $\sqrt{B^*B}$ contiennent le segment $(0, \sqrt{\varepsilon})$, donc $\Delta_{\sqrt{A^*A}}$ et $\Delta_{\sqrt{B^*B}}$ sont des variétés J_S. Or, $\Delta_A \simeq \Delta_{\sqrt{A^*A}}$, $\Delta_B \simeq \Delta_{\sqrt{B^*B}}$. Il suffit d'appliquer les théorèmes 3,8 et 3,9.

2. Domaines d'existence des opérateurs fermés symétriques d'indices de déficience (m, m). — THÉORÈME 10,2. — *Toute variété* J *partout dense non fermée peut être considérée comme le domaine d'existence d'un opérateur fermé symétrique d'indices de déficience* (m, m) *où* m *est quelconque, fini ou infini.*

Démonstration. — Soit D une variété J partout dense non fermée. Soit (lemme 8,3) D' une variété J à m dimensions disjointe de D. Soit $\Delta = D \dot{+} D'$. Il existe un opérateur self-adjoint K tel que $\Delta = D_K$. Puisque $\Delta = D \dot{+} D'$, D est fermée dans la topologie Δ (théorème 3,11) et de déficience m dans Δ. Donc (prop. 3,14) la restriction $\overline{K}$ de K à D est fermée symétrique; K est un prolongement à m dimensions de $\overline{K}$, donc $\overline{K}$ a pour indices de déficience (m, m).

En particulier, D peut être de classe 3, donc $\overline{K}^{-1}$ complètement continu; mais alors, $\Delta_{\overline{K}}$, fermée, n'est pas partout dense.

3. Domaines d'existence des opérateurs fermés symétriques d'indices de déficience (m, n) $(m \neq n)$. — LEMME 10,4. — *Soit* S *un opérateur symétrique maximal élémentaire.* D_S *est une variété* J_S.

Démonstration. — Soit U le transformé de CAYLEY de S. On sait qu'il existe une base orthonormale (e_i) de H, telle que U soit défini par

$$U e_i = e_{i+1} (i = 1, 2, \ldots).$$

On a $D_S = \Delta_A$, où $A = U - 1$. Or,

$$A^*A = (U^* - 1)(U - 1) = 2 - U - U^* = 2 - 2T.$$

Il est facile de calculer $2T$ sous forme matricielle par rapport aux e_i. On trouve

$$2T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{Vmatrix}$$

$2T$ est donc l'opérateur self-adjoint bien connu associé à la forme hermitienne $x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3 + \dots$. On voit sans peine que (TX, X) parcourt, pour $\|X\| = 1$, le segment $(-1, +1)$, qu'il n'y a pas de vecteurs propres, et que le vecteur X de coordonnées

$$(e_n, X) = \int_0^{\text{Arc cos}\,\lambda} \sin nt\, dt \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

est une solution différentielle. Donc T a pour spectre continu le segment $(-1, +1)$. Donc A^*A a pour spectre continu le segment $(0, 4)$, et $\sqrt{A^*A}$ le segment $(0, 2)$. Donc (th. 10,1) $D_S \simeq \Delta_{\sqrt{A^*A}}$ est une variété J_S.

Lemme 10,5. — *Soit* A *un opérateur symétrique maximal non self-adjoint.* D_A *est une variété* J_S.

Démonstration. — Le lemme 10,4 s'applique, c'est immédiat, aux opérateurs symétriques d'indices $(1, 0)$ comme à ceux d'indices $(0, 1)$. Soit alors A, symétrique maximal non self-adjoint; on sait qu'il existe une variété linéaire fermée V réduisant A dans laquelle A induit un opérateur symétrique d'indices $(1, 0)$ ou $(0, 1)$. Donc V réduit D_A, et $V \cap D_A$ est une variété J_S. Comme

$$D_A = (D_A \cap V) \dotplus \big(D_A \cap (H \ominus V)\big),$$

D_A est une variété J_S (lemme 10,2).

Lemme 10,6. — *Soit* A *un opérateur fermé symétrique. Si* $[\Delta_A] = H$, A *est dans le cas* p.

Démonstration. — A est uniforme, $[D_A] = H$, par définition des opérateurs symétriques. Il suffit de montrer que A^{-1} est uniforme. Or, si $AX = 0$, on a : $0 = (AX, Y) = (X, AY)$ pour tout $Y \in D_A$, donc Δ_A est orthogonal à X, et par suite $X = 0$.

Lemme 10,7. — *Soit* A *un opérateur fermé symétrique dans le cas* p, *d'indices de déficience* (m, n) *où* $m \neq n$. D_A *est une variété* J_S.

Démonstration. — Supposons par exemple $m < n$. Alors m est fini. A admet un prolongement à m dimensions, soit B, qui est symétrique maximal non self-adjoint, d'indices $(0, n-m)$. Δ_A est partout dense, donc aussi $\Delta_B \supset \Delta_A$, donc (lemme 10,6) B est dans le cas p. On a : $A \leqq B < B^* \leqq A^*$, et, puisque A et B sont dans le cas p, $D_A \simeq D_{A^*}$, $D_B \simeq D_{B^*}$. D'après le lemme 10,5, D_B, donc aussi D_{B^*}, sont des variétés J_S. D'après le lemme 9,2, A^* est un prolongement à m dimensions de B^*, donc (lemme 9,3) $D_{A^*} = D_{B^*} \dot{+} w$ où $w \ddot{=} 0$. Donc (lemme 10,3) D_{A^*}, et par suite D_A, sont des variétés J_S.

THÉORÈME 10,3. — *Soit* A *un opérateur fermé symétrique d'indices de déficience* (m, n) *où* $m \neq n$. D_A *est une variété* J_S.

Démonstration. — Soit V la variété des zéros de A, et $V' = H \ominus V$. D'après la démonstration du lemme 10,6, V et V' réduisent A, et $[\Delta_A] = V'$. A induit dans V' un opérateur fermé A' symétrique dans le cas p (lemme 10,6) qui n'est pas prolongeable en opérateur self-adjoint dans V', car alors A serait aussi prolongeable en opérateur self-adjoint. Donc $D_{A'} = D_A \cap V'$ est une variété J_S (lemme 10,7). Donc $D_A = D_{A'} \dot{+} V$ est une variété J_S (lemme 10,2).

On en déduit aussitôt le résultat suivant, qui entre dans le cadre du programme tracé par Julia (étudier l'influence sur un opérateur de la structure du domaine d'existence) :

THÉORÈME 10,4. — *Soit* A *un opérateur fermé symétrique. Si* D_A *n'est pas une variété* J_S, A *admet un prolongement self-adjoint.*

(Thèse soutenue le 17 juin 1948.)

BIBLIOGRAPHIE.

J. DIEUDONNÉ. — [1] *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*, (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 59, 1942, p. 107-139).

J. DIXMIER. — [1] *Sur une classe nouvelle de variétés linéaires et d'opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert* (*C. R. Acad. Sc.*, 223, 1946, p. 971-972).

[2] *Propriétés géométriques des domaines d'existence des opérateurs linéaires fermés de l'espace de Hilbert* (*C. R. Acad. Sc.*, 224, 1947, p. 180-181).

[3] *Définition des opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert par leurs domaines d'existence et des valeurs* (*C. R. Acad. Sc.*, 224, 1947, p. 255-257).

[4] *Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert* (*Revue Scientifique*, 86, 1948, p. 367-380).

G. JULIA. — [1] *La théorie des fonctions et la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien* (*J. Math. pures et appl.*, 22, 1943, p. 71-83).

[2] *Sur une définition d'opérateurs linéaires dans l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 212, 1941, p. 733-736).

[3] *Sur une décomposition canonique des opérateurs linéaires bornés de l'espace hilbertien et sur leur classification* (*C. R. Acad. Sc.*, 213, 1941, p. 5-9).

[4] *Détermination des adjoints de quelques opérateurs linéaires non bornés de l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 216, 1943, p. 221-224).

[5] *Remarques géométriques sur le problème des moments dans l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 216, 1943, p. 257-260).

[6] *Sur les systèmes duaux de vecteurs dans l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 216, 1943, p. 324-326)

[7] *Sur la structure des systèmes duaux dans l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 216, 1943, p. 396-399).

[8] *Exemples de structure des systèmes duaux de l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 216, 1943, p. 465-468).

[9] *Sur l'adjoint de l'opérateur linéaire non borné défini par une matrice* (*C. R. Acad. Sc.*, 216, 1943, p. 853-856).

[10] *Sur les projections des systèmes orthonormaux de l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 218, 1944, p. 892-895).

[11] *Les projections des systèmes orthonormaux de l'espace hilbertien et les opérateurs bornés* (*C. R. Acad. Sc.*, 219, 1944, p. 8-11).

[12] *Sur la représentation analytique des opérateurs bornés ou fermés de l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 219, 1944, p. 225-227).

[13] *Les symétries dans l'espace hilbertien* (*C. R. Acad. Sc.*, 221, 1945, p. 81-83).

H. Kober. — [1] *A theorem on Banach spaces* (*Compos. Math.*, 7, 1939, p. 135-140).

G. Köthe. — [1] *Die Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum* (*Math. Z.*, 41, 1936, p. 153-162).

E. R. Lorch. — [1] *Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 45, 1939, p. 564-569).

[2] *On a calculus of operators in reflexive vector spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 45, 1939, p. 217-234).

G. W. Mackey. — [1] *Isomorphisms of normed linear spaces* (*Ann. of Math.* 43, 1942, p. 244-260).

[2] *On infinite dimensional linear spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 57, 1945, p. 155-207).

[3] *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52, 1946, Abstract 1009.

A. Markouchevitch. — [1] *Sur les bases (au sens large) dans les espaces linéaires* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, Ns., 41, 1943, p. 227-229).

F. J. Murray. — [1] *Linear transformations between Hilbert spaces and applications of this theory to linear partial differential equations* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 37, 1935, p. 301-338).

[2] *On complementary manifolds and projections in spaces* L_p *and* l_p (*Trans. Amer. Math., Soc.*, 41, 1937, p. 138-152).

J. von Neumann. — [1] *Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen* (*Journal f. d. reine u. angew. Math.*, 161, 1929, p. 208-236).

[2] *Uber adjungierte Funktionaloperationen* (*Ann. of Math.*, 33, 1932, p. 294-310).

M. Neumark. — [1] *On the domain of a self-adjoint operator* (*Bull. Acad. Sc. U. R. S. S.*, Ser. Math., Nr. 2, 1939, p. 165-175).

[2] *A complement to the paper « On the square of a closed symmetric operator »* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, Ns. 28, 1940, p. 207-208).

F. Rellich. — [1] *Störungstheorie der Spektralzerlegung* (*Math. Ann.*, 118, 1942, p. 462-484).

M. H. Stone. — [1] *Linear transformations in Hilbert space*, New-York, 1932.

B. von Sz. Nagy. — [1] *Spektraldarstellung linearer transformationen des Hilbertschen Raumes* (*Erg. der Math.*, 5, 1942).