

BULLETIN DE LA S. M. F.

LEONCE LESIEUR

Sur la rationalité et la géométrie des intersections d'hyperquadriques

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 113-192

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__113_0

© Bulletin de la S. M. F., 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RATIONALITÉ ET LA GÉOMÉTRIE DES INTERSECTIONS D'HYPERQUADRIQUES;

PAR M. LÉONCE LESIEUR.

INTRODUCTION.

Il y a des caractères de géométrie des hyperespaces que ne révèle pas le seul examen de l'espace ordinaire. La rationalité des intersections d'hyperquadriques est de ceux-là, puisqu'il est bien connu que l'intersection de deux quadriques est rationnelle dès que l'espace a au moins quatre dimensions (Rosati 1899), alors que la biquadratique ordinaire n'est pas unicursale; on sait aussi que l'intersection de plusieurs hyperquadriques est rationnelle quand le nombre des dimensions de l'espace est suffisamment grand (Gauthier 1944).

Le Chapitre I de cette Thèse a pour but de présenter deux effets de la rationalité de la variété commune à deux hyperquadriques. Dans le premier, le point de départ est l'idée suivante : deux représentations rationnelles connues d'une même variété définissent une transformation birationnelle dans l'espace des paramètres. Il faut donc rappeler d'abord la représentation rationnelle d'une hyperbiquadratique (§ I) pour étudier ensuite les transformations birationnelles avec certaines de leurs applications (§ II). La deuxième conséquence de la rationalité d'une hyperbiquadratique porte sur des transformations simplement rationnelles, plus générales que les transformations birationnelles précédentes, et qui peuvent servir à transformer rationnellement deux hyperquadriques données en deux variétés cubiques doubles. Le paragraphe correspondant (III) montre en terminant le lien qui existe entre ce problème et la représentation unicursale de l'hyperbiquadratique.

Les méthodes utilisées dans ce chapitre tiennent compte d'un double désir d'extension : l'indépendance des résultats vis-à-vis du nombre n des dimensions de l'espace, et leur généralisation au cas de l'intersection d'un nombre quelconque r d'hyperquadriques.

C'est cette dernière généralisation qui fait l'objet du Chapitre II. J'étudie d'abord (§ I) la représentation rationnelle de la variété commune à r hyperquadriques dans un espace à n dimensions $n \geq l = \frac{r(r+3)}{2} - 1$. J'examine ensuite (§ II) le cas $n < l$ avec l'hypothèse de la rationalité due à l'existence d'un espace

linéaire à $r-1$ dimensions sur l'intersection. J'analyse enfin (§ III) les transformations birationnelles et rationnelles qui généralisent celles du Chapitre I.

Les résultats sont naturellement plus variés qu'au Chapitre I, mais ils ne font intervenir en définitive que quelques types de variétés, qui dépendent à la fois des entiers r et n , et qui sont reliées par des propriétés permanentes, qu'on augmente n ou r . Les méthodes allient l'intuition géométrique au support solide constitué par des éléments simples de géométrie analytique projective des hyperespaces ⁽¹⁾.

Avec le Chapitre III commence une deuxième partie, géométrique, indépendante de la rationalité, comme du nombre des dimensions de l'espace. L'idée d'utiliser une projection conique sur l'espace ordinaire, de l'intersection de deux cônes du second ordre de l'espace à quatre dimensions, a été mise à profit par Segre (1884) pour étudier les surfaces du quatrième ordre à conique double. Je reprends cette méthode dans l'hyperespace, d'un point de vue différent, et avec des conséquences nouvelles. L'intersection de deux hyperquadriques de l'espace à $n+1$ dimensions se projette sur l'espace à n dimensions suivant une variété particulière, du quatrième ordre, que j'appelle hypercyclide. Celle-ci peut se construire, d'après la méthode Segre, par une génération dite descriptive, à partir des éléments suivants : deux quadriques, traces de deux cônes du faisceau, deux points s_1, s_2 , projections de leurs sommets, et un troisième point i trace de la droite qui joint les sommets. Points et quadriques doivent donc suffire à déterminer les autres points et les quadriques provenant de tous les cônes du faisceau.

Le paragraphe I débute par cette détermination; il souligne le fait intéressant que les quadriques et les points analogues à i ne dépendent aucunement des points analogues à s ; il continue par l'étude générale des générations et ensembles ou équipages de générations descriptives d'une hypercyclide donnée. Le paragraphe II traite spécialement des hypercyclides cubiques, dont le rôle au Chapitre I était fondamental, et qui sont obtenues par projection faite d'un point appartenant à l'hyperbiquadratique. Le paragraphe III s'occupe des applications qui découlent de la résolution du problème de la détermination des points i quand on se donne seulement les quadriques des générations descriptives d'un équipage; les résultats ainsi obtenus me paraissent nouveaux. Le paragraphe se termine par une dernière application qui fait intervenir la courbe de section plane du lieu des tangentes à une biquadratique ordinaire.

Dans le Chapitre IV j'ai été amené, pour étendre à l'espace et aux hyperespaces la dernière application du Chapitre III, à préciser la définition et les propriétés d'un lieu de tangentes particulières, que j'appelle principales, à l'intersection de deux hyperquadriques. Le premier paragraphe commence par le cas d'une variété quelconque à $n-2$ dimensions plongée dans l'espace à n dimensions. Les tangentes principales ont pour lieu une variété à $n-1$ dimensions, dont l'hyperplan tangent reste le même tout le long d'une génératrice. Je joins ainsi, en

⁽¹⁾ Éléments qu'on peut trouver par exemple dans Van der WAERDEN, *Einführung in die algebraische geometrie*, 1939, p. 1 à 43.

partant de l'arête, les variétés $n-2$ — développôides rencontrées par Gauthier dans sa thèse (1944); je m'occupe surtout de la développôide attachée à une hyperbiquadratique de l'espace à quatre dimensions, pour laquelle je donne quelques belles propriétés géométriques, confirmées analytiquement (§ III). Cette limitation du nombre des dimensions n'est pas restrictive : le pas franchi pour passer du plan à l'espace permet d'accéder aux hyperespaces. Enfin certaines congruences d'espaces linéaires à $n-2$ dimensions rencontrées dans ces deux paragraphes, dont la variété focale se présente comme section hyperplane d'une développôide de l'espace à $n+1$ dimensions, suggèrent un aperçu dans l'espace à n dimensions, sur les congruences d'espaces linéaires à p dimensions et sur les tangentes principales d'une variété à p dimensions (§ III).

Notations. — Je désigne par E_n l'espace projectif à n dimensions. Les variétés algébriques intervenant dans ce travail sont des êtres géométriques précis qui m'ont paru réclamer un nom approprié : une Q_n est une quadrique de l'espace E_n , une B_n est une biquadratique intersection de deux Q_n . Une B_n se projette, à partir d'un point O quelconque, sur un E_p ($p = n-1$) suivant une variété du quatrième ordre ayant une Q_{p-1} , double, c'est-à-dire une *Cyclide* C_p . Quand O est sur la B_n , la projection est une variété du troisième ordre passant par une Q_{p-1} , ou *cyclide cubique* T_p . L'hyperplan E_{p-1} qui contient cette Q_{p-1} recoupe T_p suivant un hyperplan E_{p-2} . (Pour $p=3$ c'est la section plane décomposée d'une surface cubique en une droite et une conique). L'intersection résiduelle de T_p avec une quadrique Q_p passant par cet E_{p-2} est une variété V_{p-2}^5 à $p-2$ dimensions, du cinquième ordre. Quand $p=3$, c'est la quintique ⁽¹⁾ commune à une quadrique et une surface cubique se coupant déjà suivant une droite. Quand $p>3$ je lui conserve le nom de *quintique* et je l'appelle q_p . Donc q_p représente, suivant la notation habituelle, une V_{p-2}^5 , Q_n une V_{n-1}^2 , B_n une V_{n-2}^4 , et T_p une V_{p-1}^3 .

Telles sont les notations essentielles utilisées dans le premier et les deux derniers chapitres. Dans le deuxième, qui concerne l'intersection d'un nombre quelconque d'hyperquadriques, il en intervient d'autres qui sont définies chemin faisant; il me semble utile cependant de les rassembler dans le tableau suivant :

Variétés.	Dimension.	Ordre.	Équation.	Référence.
T_p^r	$p-1$	$r+1$	(6)	Chap. II, I, c
q_p^r	$p-2$	$\frac{r(r+3)}{2}$	(4)	id.
V_{p-1}^r	$p-1$	r	(7)	id.
L_p^r	$p-2$	$\frac{r(r-1)}{2}$	(5)	id.
B_n^r	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Intersection de } r \text{ hyperquadriques de} \\ \text{l'espace à } n \text{ dimensions} \end{array} \right.$			

⁽¹⁾ Quintique de genre 2 (ENRIQUES, p. 551). (*Courbes et fonctions algébriques*. Traduction LÉGAUT, Paris, 1926).

Dans certaines équations où les lettres sont affectées d'indices, il faut veiller à ne pas confondre un indice supérieur avec un exposant. Pour éviter la confusion, la lettre est en général mise entre parenthèses dans le cas de l'exposant.

Enfin, toute référence dans le texte à un paragraphe sans numéro de chapitre, est relative au paragraphe du chapitre en cours. Les paragraphes s'accompagnent souvent de subdivisions désignées par des lettres ou des chiffres, et la remarque précédente vaut également pour une subdivision de paragraphe.

CHAPITRE I.

Deux effets de la rationalité de la variété commune à deux hyperquadriques.

La première des conséquences de la rationalité de la variété commune à deux hyperquadriques, que je présente ici, concerne une famille de transformations birationnelles de l'espace à p dimensions, déduite de deux représentations rationnelles connues de l'intersection de deux hyperquadriques d'un espace à $p + 2 = n$ dimensions. Il me semble donc utile de rappeler d'abord, dans un premier paragraphe, les principaux résultats relatifs à cette représentation rationnelle.

I. — REPRÉSENTATION RATIONNELLE D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE ⁽¹⁾.

Elle est liée à l'existence d'une droite sur l'hyperbiquadratique B_n , ce qui suppose $n > 3$. Pour $n = 3$ la biquadratique ordinaire n'est pas en général unicursale; quand $n = 4$ il y a 16 droites sur la B_4 , et pour $n > 4$ une infinité dépendant de $2(n - 4)$ paramètres, telle qu'il en passe par tout point de la B_n ⁽²⁾.

Soit Δ l'une de ces droites : Définissons B_n par deux quadriques Q_n contenant Δ . Un plan variable E_2 passant par Δ recoupe la première quadrique suivant une droite D_1 et la deuxième suivant une droite D_2 , donc B_n en un seul point M qui est en correspondance birationnelle avec le plan, et par suite avec sa trace N sur un $E_{n-2} = E_p$ quelconque.

La rationalité se trouve établie en général. Nous allons préciser d'une façon analytique.

Je prends deux sommets du repère projectif $A_n(0, 0, \dots, 1, 0)$ et $A_{n+1}(0, 0, \dots, 0, 1)$ sur Δ ($x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$). Les deux quadriques sont alors définies par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 + b_1 = 0, \\ a_2^1 X_1 + a_2^2 X_2 + b_2 = 0, \end{cases}$$

a_1^1, a_1^2, a_2^1 et a_2^2 étant des formes linéaires en $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$; b_1 et b_2 des formes quadriques des mêmes variables. Lorsque le déterminant du système (1) linéaire en X_1 et X_2 n'est pas identiquement nul, on peut résoudre

$$X_1 = \frac{a_2^2 b_2 - a_2^1 b_1}{a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1}, \quad X_2 = \frac{a_2^1 b_1 - a_1^1 b_2}{a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1},$$

puis prendre comme paramètres homogènes de la représentation rationnelle les coordonnées $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ dans l' E_{n-2} défini par $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. En posant

$$(2) \quad Q \equiv a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1$$

⁽¹⁾ Cf. LESIEUR, *Bull. Soc. Math. de France*, 1945, p. 43.

⁽²⁾ BERTINI, *Iperspazi*, Messine, 1923, p. 181.

les équations paramétriques de B_n s'obtiennent après multiplication par Q sous la forme

$$(3) \quad x_1 = u_1 Q, \quad x_2 = u_2 Q, \quad \dots, \quad x_{n-1} = u_{n-1} Q, \quad X_1 = A_1, \quad X_2 = A_2.$$

où A_1, A_2 sont des formes cubiques constituées par deux mineurs du tableau des coefficients de (1), le troisième étant Q lui-même.

Du point de vue géométrique le point $N(u)$ est la projection du point $M(x)$ faite de Δ .

J'indique en outre, que dans le cas $Q \equiv 0$, les deux seuls faits suivants peuvent se présenter :

1. L'hyperbiquadratique est l'intersection de deux cônes de même sommet; c'est elle-même un cône dont la rationalité n'est pas assurée, par exemple si la base est une biquadratique ordinaire non unicursale.
2. L'une des quadriques admet Δ pour droite double, aucun de ses points n'étant double pour l'autre; alors la rationalité est assurée et la représentation rationnelle peut encore s'obtenir par des formules qui se rattachent au type (3).

En définitive, toute hyperquadrique non conique est rationnelle, et sa représentation rationnelle peut toujours se mettre sous la forme (3).

Les images des sections hyperplanes de B_n forment, d'après (3), un système linéaire de variétés cubiques ayant en commun l'intersection des surfaces

$$Q = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0.$$

Ses équations s'obtiennent donc en annulant les mineurs de la matrice

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette variété constitue l'intersection résiduelle de la quadrique Q avec la surface cubique $A_1 = 0$, en dehors de l'espace linéaire E_{n-4} d'équations $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

Ainsi, en posant $p = n - 2$, Q est une quadrique Q_p (avec l'espace double $a_1^1 = a_1^2 = a_2^1 = a_2^2 = 0$ si $p \geq 4$); $A_1 = C$ est une cyclide cubique T contenant un E_{p-2} de Q_p et la recoupant ultérieurement suivant la quintique $q_p = V_{p-2}^2$ d'équations (4) (voir *Notations*).

Toute surface cubique image d'une section hyperplane $X_2 = \lambda X_1 + B_1$ (B_1 forme linéaire en $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$) est une cyclide T_p , puisqu'elle recoupe la quadrique Q , dont elle possède déjà la quintique q_p , suivant un E_{p-2} . On peut le vérifier analytiquement; en remplaçant dans (1) X_2 par sa valeur, on obtient pour équation de l'image

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + \lambda a_1^2 & b_1 + a_1^2 B_1 \\ a_2^1 + \lambda a_2^2 & b_2 + a_2^2 B_1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente bien une cyclide T_p recoupant la quadrique Q_p suivant l' E_{p-2} , $a_1^1 + \lambda a_1^2 = 0$, $a_2^1 + \lambda a_2^2 = 0$. Cet E_{p-2} fait partie d'un système d' E_{p-2} générateurs de Q que j'appelle premier système. Ces E_{p-2} (exemple $a_1^1 = a_2^1 = 0$) s'appuient sur la quintique q_p suivant une cyclide cubique T_{p-2} (telle que la section de $A_1 = 0$)

tandis que ceux de l'autre système (exemple $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = 0$) rencontrent q_p suivant une quadrique Q_{p-2} (telle que la section de $b_1 = 0$).

Résumons l'essentiel : *Les images des sections hyperplanes de B_n forment un système linéaire de cyclides ⁽¹⁾ cubiques T_p passant par une quintique q_p . Elles recourent la quadrique Q_p qui la contient suivant le premier système de ses E_{p-2} générateurs.*

Parmi elles s'en trouvent ∞^p décomposées en la quadrique Q et un E_{p-1} quelconque P , images de la section par l'hyperplan ΔP . Les points de la section ayant leurs projections sur Q sont ceux qui sont infiniment voisins de Δ . Il y a en effet pour les coordonnées d'un point N de Q impossibilité du système (1), donc aucun point de B_n en dehors de Δ dans le plan ΔN . Pour un tel plan les deux génératrices D_1, D_2 de la section se coupent sur Δ : quand elles sont confondues il y a indétermination pour le système (1), exprimée par les équations (4) de la quintique; on est en présence d'une droite D de B_n rencontrant Δ , et le plan $D\Delta$ a pour trace sur E_p un point N de q_p . Dans la section hyperplane de B_n , le point situé sur D a toujours pour projection N , quelle que soit la section : on s'explique ainsi que la quintique figure comme base du système linéaire image des sections planes.

Je rappelle aussi le cas des petites valeurs de p , utiles dans la suite :

$p = 2$. — La représentation d'une B_4 se fait par un système linéaire de cubiques passant par cinq points, qui définissent la conique Q et sont les images de cinq droites rencontrant Δ , tandis que Q est l'image de Δ elle-même. L'hyperplan E_3 qui contient Δ et deux d'entre elles recoupe B_4 suivant une quatrième droite; sa projection joint deux des points; on trouve ainsi dix autres droites, ce qui fait seize au total.

$p = 3$. — Le système représentatif est celui des surfaces cubiques ayant une quintique base commune ⁽²⁾. Chacune d'elles recoupe la quadrique Q qui la contient suivant une corde trisécante.

$p = 4$. — Q devient un cône de sommet $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = \alpha_2^1 = \alpha_2^2 = 0$. La cyclide $A_4 = 0$ admet quatre points doubles définis par $\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = b_1 = b_2 = 0$ (les dérivées partielles s'annulent en l'un de ces points). Chaque surface cubique du système possède de même quatre points doubles, et ces cyclides cubiques T_4 se distinguent essentiellement de la V_3^3 la plus générale de l'espace à quatre dimensions.

$p = 5$. — Q_5 est un cône à droite double. Les T_5 sont des cyclides ayant une B_3 de points doubles.

$p = 6$. — Les quatre points vérifiant $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = \alpha_2^1 = \alpha_2^2 = b_1 = b_2 = 0$ sont triples pour la quintique. L'existence d'éléments triples pour q_p subsiste

⁽¹⁾ Au sens des notations. Elles n'ont pas l'ombilicale commune.

⁽²⁾ Il figure comme l'un des types birationnellement distincts de systèmes linéaires de degré supérieur à 3, à intersections variables elliptiques [(GODEAUX, *Transformations birationnelles de l'espace* (Mém. Sc. Math., fasc. 67, 1934, p. 35.)]

pour $p > 6$, ces points étant alors distribués sur une B_{p-4} appartenant à l' E_{p-4} double pour Q .

Enfin, il n'est pas possible de passer sous silence la représentation rationnelle d'une cyclide cubique T_p , dont le rôle apparaît fondamental pour l'intersection de deux hyperquadriques, et dont nous verrons au Chapitre II l'équivalent pour le cas de la variété commune à plusieurs hyperquadriques.

La définition d'une cyclide cubique T_p , donnée dans les notations, la montre comme variété cubique de E_p à $p - 1$ dimensions, possédant une quadrique Q_{p-1} . Il revient au même de dire qu'elle possède un espace linéaire E_{p-2} . Celui-ci ayant pour équations

$$\alpha_1^1 = 0, \quad \alpha_2^1 = 0,$$

l'équation de la cyclide T_p peut prendre la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & b_1 \\ \alpha_2^1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit que l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes est caractéristique d'une cyclide T_p de l'espace E_p .

1° Une cyclide T_p est la projection sur E_p d'une section hyperplane de E_{p+2} faite d'une droite Δ appartenant à la B_{p+2} .

2° Une cyclide T_p est la projection d'une B_{p+1} sur E_p faite d'un point O appartenant à la B_{p+1} .

Chacune d'elles est évidemment suffisante; il suffit en effet de se reporter pour la première à la représentation rationnelle d'une B_{p+2} , et de noter pour la deuxième que la projection d'une B_{p+1} sur un E_p faite d'un point O de la B_{p+1} est une variété V_{p-1}^2 qui contient la trace E_{p-2} sur E_p de l' E_{p-1} tangent en O à la B_{p+1} . Ces propriétés sont également satisfaites pour toute cyclide T_p . Car l'équation d'une cyclide T_p , écrite plus haut, la montre comme projection faite de Δ par $X_2 = 0$ de l'intersection B_{p+2} des deux quadriques d'équation (1), elle la montre encore comme projection sur E_p de l'intersection B_{p+1} des deux quadriques de E_{p+1} qui ont pour équation

$$\alpha_1^1 X_1 + b_1 = 0, \quad \alpha_2^1 X_1 + b_2 = 0,$$

la projection étant faite du point $(X_1 = 1, u_k = 0)$ qui appartient à la B_{p+1} .

L'une ou l'autre des deux propriétés ainsi établies justifie le théorème suivant :

Une cyclide T_p est rationnelle pour $p \geq 3$. Sa représentation rationnelle peut s'obtenir par $p + 1$ cyclides cubiques T_{p-1} de l'espace E_{p-1} des paramètres, ayant en commun une quintique q_{p-1} , ainsi qu'un point O non situé sur elle.

En effet, si j'utilise par exemple la deuxième propriété, la rationalité découle immédiatement de l'équivalence birationnelle entre la T_p et la B_{p+1} dont elle est la projection. Cette B_{p+1} est rationnelle dès que $p + 1 \geq 4$ ou $p \geq 3$. Pour obtenir

sa représentation rationnelle on projette sur un E_{p-1} à partir d'une droite Δ de la B_{p+1} : aux sections hyperplanes de T_p correspondent ainsi des sections hyperplanes de B_{p+1} passant par le point de vue, puis par projection faite de Δ des cyclides cubiques T_{p-1} passant par un point fixe O et par une quintique q_{p-1} .

La représentation rationnelle d'une B_n , devenue maintenant familière, va nous conduire à certaines transformations birationnelles, par le détour de quelques problèmes énumératifs simples qui font l'objet du début de ce deuxième paragraphe.

II. — LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES t.

a. *Paramètres d'une B_n .* — Leur nombre est celui de deux quadriques Q_n diminué des deux paramètres qui les définissent dans leur faisceau, donc

$$N = n(n+3) - 2 = n^2 + 3n - 2,$$

soit 26, 38, 52, 68, . . . , à partir de $n=4$. Sont comptés dans N les $n(n+2)$ paramètres de la transformation projective de E_n . Il reste donc

$$M = n - 2$$

invariants projectifs de la B_n ⁽¹⁾. On peut les mettre en évidence sur les équations canoniques

$$\begin{aligned} (x_1)^2 - (x_3)^2 - m_1(x_4)^2 - m_2(x_5)^2 - \dots - m_{n-2}(x_{n+1})^2 &= 0, \\ (x_2)^2 + (x_3)^2 + \dots + (x_{n+1})^2 &= 0. \end{aligned}$$

En appelant cône i celui dont l'équation ne contient pas x_i , les invariants m_k ne sont autres que les $n-2$ rapports anharmoniques

$$(1234), (1235), (1236), \dots, [123(n+1)].$$

b. *Paramètres d'une quintique q_p ($p=n-2$).* — Il faut d'abord dénombrer les paramètres des éléments de la matrice (4), puis retrancher le nombre des paramètres des combinaisons linéaires des lignes et des colonnes.

Les éléments $a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2, b_1, b_2$ dépendent dans E_p de $(p+1)(p+2) + 4(p+1)$ paramètres homogènes, donc de $(p+1)(p+2) + 4(p+1) - 1$ paramètres.

Les combinaisons par colonnes fournissent la nouvelle matrice

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_1^1 + \mu_1 a_1^2 & \lambda_2 a_1^1 + \mu_2 a_1^2 & \lambda_3 b_1 + B_1 a_1^1 + B_2 a_1^2 \\ \lambda_1 a_2^1 + \mu_1 a_2^2 & \lambda_2 a_2^1 + \mu_2 a_2^2 & \lambda_3 b_2 + B_1 a_2^1 + B_2 a_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

où B_1 et B_2 sont des formes linéaires en $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$, tandis que les λ et les μ sont des constantes. Elles dépendent donc de $2(p+1) + 5$ paramètres homogènes, ou $2(p+1) + 4$ paramètres. Les combinaisons par lignes dépendent de quatre paramètres homogènes ou trois paramètres.

⁽¹⁾ Cf. BERTINI, *Iperspazi*, p. 169.

En définitive le nombre des paramètres de la quintique est

$$L = (p+1)(p+2) + 4(p+1) - 1 - 2(p+1) - 4 - 3,$$

ou

$$L = p^2 + 5p - 4$$

d'où

p	2	3	4	5	...
L	10	20	32	46	...

Il s'agit pour $p=2$ des paramètres de cinq points d'un plan, pour $p=3$ des vingt paramètres de la quintique de genre 2.

c. Relation entre L et M. — Comptons le nombre des paramètres d'une B_n à l'aide de ceux des $n+1$ cyclides cubiques T_p du réseau à base quintique q_p qui en permet la représentation rationnelle. Le choix des surfaces cubiques dans le réseau équivaut à une projectivité pour B_n dans E_n . Le nombre M des invariants de B_n est donc lié au nombre L des paramètres de la quintique elle-même. Il lui serait égal si, inversement, B_n définissait q_p ; il s'en faut du nombre X des paramètres des transformations birationnelles qui n'altèrent pas la nature algébrique du réseau, c'est-à-dire transforment ses surfaces en nouvelles cyclides cubiques ayant une nouvelle quintique q'_p commune; de telles transformations donnent en effet une nouvelle représentation paramétrique de B_n qui est du même type que l'ancienne. On a donc $M = L - X$ ou

$$X = L - M = p^2 + 4p - 4 = n^2 - 8.$$

Nous obtenons ainsi :

L'existence d'une famille à $p^2 + 4p - 4$ paramètres de transformations birationnelles qui n'altèrent pas la nature algébrique d'un réseau donné de surfaces cubiques à base quintique d'un espace E_p .

Parmi elles se trouvent naturellement les transformations projectives de E_p , qui dépendent de $p(p+2)$ paramètres. Mais dès que $p > 2$, $X = p^2 + 4p - 4$ est supérieur à $p(p+2)$. Il faut donc se poser le problème de la recherche d'autres transformations de cette famille

d. Les transformations birationnelles t. — Le problème posé a son origine dans la représentation rationnelle d'une B_{p+2} : il y trouve aussi sa solution.

Prenons en effet deux droites D et Δ de la B_{p+2} ; faisons correspondre au point m de E_p le point M de B_{p+2} situé dans le plan (D, m) , puis la projection m' de M sur E_p , faite de Δ . Nous définissons ainsi dans E_p une transformation (m, m') évidemment birationnelle, que nous appelons (t) . Nous allons montrer, en l'étudiant pour $p=2,3$, puis $p > 3$, qu'elle fait partie de la famille cherchée.

$p=2$. — L'hyperplan E_3 défini par D et Δ dans E_4 coupe B_4 suivant un quadrilatère gauche et le plan E_2 suivant une droite d . Les projections sur E_2 des

sections hyperplanes de B_4 , faites de D , sont des cubiques passant par cinq points dont deux appartiennent à d ; les autres forment un triangle T . On définit de même pour Δ le triangle θ dont les sommets ne sont pas sur d . Dans la transformation t , à une droite correspond sur B_4 une section par un E_3 contenant D , donc une cubique gauche rencontrant Δ et qui se projette par suite sur une conique; celle-ci passe par les sommets du triangle θ . Dans la transformation inverse, une droite a pour homologue une conique circonscrite au triangle T . Enfin, le réseau des cubiques ayant pour points bases les cinq points relatifs à D se transforme dans le réseau analogue relatif à Δ . *La transformation t est donc une transformation quadrique déterminée faisant partie de la famille cherchée.*

Il en est de même de son produit par une homographie quelconque. Il y a bien $X = 8$ paramètres.

$p = 3$; $X = 17$. — On définit encore la droite d , trace de l'hyperplan E_3 qui contient D et Δ , et corde commune aux deux quintiques relatives à D et Δ . Deux points homologues m et m' sont dans un plan π passant par d , trace de $L'E_4(D\Delta M)$; (t), qui laisse π invariant, est donc une transformation de Jonquières dont l'empreinte sur π est quadratique, les points fondamentaux se trouvant sur les deux quintiques. Les plans ont pour homologues, sur B_4 , les sections par des E_4 qui contiennent D , donc en projection *des surfaces cubiques ayant en commun, avec la droite d , la quintique $q(\Delta)$* ⁽¹⁾. Pour la transformation inverse la base du réseau homaloïdal des surfaces cubiques est formée par d et $q(D)$. A une droite correspond sur B_4 une cubique gauche, qui se projette suivant une cubique gauche, et ceci dans chaque sens; la transformation est donc d'indice $(3, 3)$. Enfin les surfaces cubiques passant par la quintique $q(D)$, qui fournissent sur B_4 les sections par les E_4 , se transforment par là-même en surfaces cubiques contenant $q(\Delta)$. C'est ce qui nous intéresse : la nature algébrique du premier système de surfaces n'est pas changée par t , ni par le produit ht , h étant une homographie. Ce système étant donné, le nombre de paramètres de cette famille de transformations est celui de l'homographie : 15, augmenté des deux paramètres de t qui définissent la corde sur la quintique. Elle dépend bien de dix-sept paramètres.

$p > 3$; $X = n^2 - 8$. — Signalons les circonstances nouvelles. *Le réseau homaloïdal est encore formé de cyclides à base quintique accompagnée d'une de ses cordes*, mais cette base n'est plus une variété décomposée comme dans le cas $p = 3$ où la corde et la quintique avaient même dimension. En outre, l'homologue d'un E_{p-2} est, sur B_{p+2} une B_p , et en projection faite de Δ une B_p qui contient d ⁽²⁾. Par contre une droite se transforme en cubique gauche dans les deux sens, et la propriété essentielle des transformations t subsiste. Le produit ht par une homographie dépend de $p(p+2) = n(n-2)$ paramètres, auxquels il

(¹) C'est-à-dire une sextique de genre 3 décomposée. (t) se présente alors, à une homographie, près, comme cas particulier de la birationnelle définie par trois réciprocités.

(²) Cette propriété est reprise au paragraphe suivant. La transformation t est d'indice 3, 4, 4..., 4, 4, 3.

faut ajouter ceux de t ; la quintique $q(D)$ étant donnée les paramètres de t sont ceux de la droite Δ ou encore de la corde d joignant deux points de q_p , qui est une V_{n-1}^5 , soit $2(n-4)$, en tout $n(n-2) + 2(n-4) = n^2 - 8$. On retrouve X .

Notons, fait commun à toutes les transformations t quel que soit p , que les points de la trace B_p de B_{p+2} sur E_p sont invariants (quatre points pour $p=2$).

Telles sont les caractéristiques générales de la famille de transformations birationnelles annoncées à la fin du paragraphe *c*; elles peuvent comprendre des cas particuliers ⁽¹⁾ divers suivant les particularités de la B_{p+2} , ainsi que les positions de D et Δ . Nous n'en abordons pas l'étude. Dégageons, pour conclure, la méthode employée pour former certaines transformations birationnelles : *elle consiste à prendre, pour une même variété, deux représentations rationnelles dont on a fait auparavant l'étude.*

e. Retour sur la rationalité d'une B_n . — Nous avons remarqué au paragraphe précédent que les transformations t opèrent sur les E_{n-2} quand $n > 3$ pour les transformer en hyperbiquadratiques B_n . Ce serait une nouvelle preuve de la rationalité de B_n si la structure et l'existence même de t n'étaient pas liées à la représentation rationnelle de B_{n+2} , si par exemple on avait fait une analyse autonome de t dans l'espace E_n . Montrons néanmoins comment on peut, à partir d'une B_n donnée, bâtir dans tout E_n une birationnelle qui la transforme en un E_{n-2} . Plongeons E_n dans E_{n+2} ; par E_{n-2} pris dans E_n nous faisons passer un autre E'_n puis nous prenons une droite D quelconque qui ne rencontre pas E_n . Le cône de sommet D et de base B_n ⁽²⁾ est coupé suivant une B'_n sur laquelle nous pouvons choisir une droite Δ lorsque $n \geq 4$; elle se projette dans E_n suivant une droite d de b_n , la projection étant faite de D . Enfin je considère une B_{n+2} qui contient B'_n et D . Il est clair que dans E_n la transformation t définie à l'aide de B_{n+2} et des droites D, Δ fait correspondre à B_n l'espace E_{n-2} . *Il ne s'agit plus seulement, comme dans la représentation rationnelle d'une B_n , d'une correspondance birationnelle de variété à variété, mais d'une transformation birationnelle de Cremona étendue à tout l'espace dans lequel E_n se trouve B_n .*

Cette méthode géométrique est d'ailleurs susceptible d'une réalisation analytique particulière. Partons des éléments suivants dans E_n :

$$B_n \begin{cases} a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2 + b_1 = 0, \\ a_3^2 X_1 + a_4^2 X_2 + b_2 = 0, \end{cases}$$

$$E_{n-2} (X_1 = X_2 = 0); \quad d(x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0);$$

deux variables auxiliaires, X_3 et X_4 , définissent E_{n+2} , et D est la droite

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = X_1 = X_2 = 0.$$

Prenons pour E'_n

$$X_3 = X_1, \quad X_4 = X_2,$$

⁽¹⁾ L'un deux se présente au paragraphe suivant *e*.

⁽²⁾ C'est-à-dire le lieu des E_2 passant par D et s'appuyant sur B_n .

B'_n est alors définie en ajoutant ces deux équations aux deux équations de B_n . Elle se trouve sur

$$\begin{aligned} a_1^1 X_3 + a_1^2 X_2 + b_1 &= 0, \\ a_2^1 X_1 + a_2^2 X_4 + b_2 &= 0, \end{aligned}$$

que nous pouvons prendre pour B_{n+2} . La droite Δ , intersection de E'_n et de l' E_3 (d D) a pour équations

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad X_3 = X_1, \quad X_4 = X_2.$$

Au point $n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2)$ de E_n nous associons le point M de B_{n+2} situé dans le plan Dm. Il a pour coordonnées

$$M \left\{ \begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2, X_3 &= \frac{-b_1 - a_1^2 X_2}{a_1^1}, \\ X_4 &= \frac{-b_2 - a_2^1 X_1}{a_2^2}. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste plus qu'à projeter de Δ . Effectuons pour cela le changement de variables

$$x_i = y_i (i < n), \quad X_1 - X_3 = Y_1, \quad X_2 - X_4 = Y_2, \quad X_1 = Y_3, \quad X_2 = Y_4.$$

Les coordonnées de la projection m' de M sont :

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, Y_1, Y_2,$$

soit ici

$$(5) \quad y_i = x_i (i < n), \quad Y_1 = X_1 + \frac{a_1^2 X_2 + b_1}{a_1^1}, \quad Y_2 = X_2 + \frac{a_2^1 X_1 + b_2}{a_2^2},$$

ou

$$(6) \quad y_i = x_i a_1^1 a_2^2, \quad Y_1 = (a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 + b_1) a_2^2, \quad Y_2 = (a_2^1 X_1 + a_2^2 X_2 + b_2) a_1^1.$$

Telles sont les équations de la transformation que sous la forme (5) on reconnaît birationnelle, et qui transforme B_n en $Y_1 = Y_2 = 0$. Les équations (6) auraient pu s'écrire d'emblée, mais leur formation méthodique a l'avantage de montrer sans plus que la transformation birationnelle correspondante fait partie de la famille (t). Il est vrai qu'elle ne constitue qu'un cas particulier du type général esquissé au paragraphe d , car il est facile de vérifier d'après (6) que chacune des surfaces cubiques du système homaloïdal admet la droite d pour droite double, tandis que la quintique de base se trouve décomposée (¹). Quoi qu'il en soit on peut donner en quelque sorte comme deuxième application des transformations t la propriété suivante :

Il est possible, au moyen d'une transformation birationnelle t de tout l'espace E_n , de transformer une B_n quelconque en un E_{n-2} de l'espace ambiant E_n ($n \geq 4$).

(¹) La variété commune aux surfaces cubiques du système homaloïdal est en effet formée par

$$\begin{cases} a_1^1 = 0 \\ a_2^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^1 = 0 \\ a_1^2 x_2 + b_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2^2 = 0 \\ a_2^1 x_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$

soit un E_{n-2} passant par d et $2Q_{n-1}$ coniques ayant d pour génératrice et situées dans deux E_{n-1} qui se rencontrent suivant l' E_{n-2} précédent.

En effectuant à la suite de t une transformation birationnelle du type inversion la B_n se trouve changée en une quadrique Q_{n-1} . Je vais montrer qu'on peut arriver directement à cette transformation par une birationnelle du troisième ordre faisant partie de la famille (t) .

Il est clair que le passage, dans E_n , du point $m(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2)$ au point $m'(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, Y_1, Y_2)$ par les formules

$$(7) \quad \begin{cases} y_i = x_i (i < n), & Y_1 = \frac{\alpha_1^1 X_1 + \alpha_1^2 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \\ \alpha_2^1 Y_1 + \alpha_2^2 Y_2 + b_2 & = \alpha_2^1 X_1 + \alpha_2^2 X_2 + b_2, \end{cases}$$

définit une transformation birationnelle dans E_n pour laquelle l'homologue de B_n , d'équations (1) , est une quadrique Q_{n-1} d'équations $Y_1 = 0, \alpha_2^2 Y_2 + b_2 = 0$.

Sous forme résolue les équations (7) s'écrivent :

$$(7') \quad y_i = x_i (i < n), \quad Y_1 = \frac{\alpha_1^1 X_1 + \alpha_1^2 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \quad Y_2 = \frac{(\alpha_2^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1) X_2 - \alpha_2^1 b_1}{\alpha_1^1 \alpha_2^2},$$

que nous allons interpréter comme une transformation t . Considérons pour cela l' E_{n+2} obtenu en adjoignant aux coordonnées de E_n les nouvelles variables X_3 et X_4 , et dans E_{n+2} les deux droites

$$(D) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = X_1 = X_2 = 0,$$

et

$$(\Delta) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad X_1 - X_3 = 0, \quad X_2 - X_4 = 0,$$

qui appartiennent à la B_{n+2} suivante :

$$B_{n+2} \quad \begin{cases} \alpha_1^1 X_3 + \alpha_1^2 X_2 + b_1 = 0, \\ \alpha_2^1 X_3 + \alpha_2^2 X_4 = 0. \end{cases}$$

Puis cherchons les équations de la transformation birationnelle t qui associe au point m de E_n la projection m' dans E_n , faite de Δ , du point M de B_{n+2} situé dans l' E_2 défini par D et m . M a pour coordonnées

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2, X_3 = -\frac{\alpha_1^2 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \quad X_4 = \frac{(\alpha_2^1 \alpha_2^2 X_2 + b_1)}{\alpha_1^1 \alpha_2^2}.$$

Pour projeter M de Δ nous effectuons le changement de repère déjà employé

$$x_i = y_i (i < n), \quad X_1 - X_3 = Y_1, \quad X_2 - X_4 = Y_2, \quad X_3 = Y_3, \quad X_4 = Y_4,$$

ce qui donne les coordonnées de m'

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, Y_1, Y_2,$$

soit

$$y_i = x_i (i < n), \quad Y_1 = X_1 + \frac{\alpha_1^2 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \quad Y_2 = X_2 - \frac{\alpha_2^1 (\alpha_1^2 X_2 + b_1)}{\alpha_1^1 \alpha_2^2}.$$

On retrouve les formules $(7')$. Donc :

Au moyen d'une transformation birationnelle du troisième ordre de la famille t , une B_n quelconque d'un espace à quatre dimensions au moins peut être transformée en une quadrique Q_{n-1} .

La transformation (7)' qui nous a servi n'est d'ailleurs qu'une transformation t particulière. On vérifiera sans peine que la quintique de base du système homaloïdal est ici encore décomposée⁽¹⁾.

Quand $n = 3$ les considérations précédentes n'ont plus lieu d'être pour une B_3 générale. Elles s'appliquent cependant à la transformation étendue à tout l'espace, birationnelle, d'une cubique gauche en droite ou en conique. Le réseau homaloïdal est formé dans le premier cas de conoïdes du troisième ordre ayant une droite double d et passant par deux génératrices communes non coplanaires rencontrant d , tandis que dans le dernier cas les deux génératrices se croisent sur d .

J'arrive maintenant à la deuxième conséquence de la rationalité d'une hyperbi-quadrrique, annoncée dans le titre du chapitre. Elle est présentée dans le paragraphe III qui suit.

III. — LES TRANSFORMATIONS SIMPLEMENT RATIONNELLES.

Traisons d'abord un problème simple, comme introduction.

1. **Transformer une conique en conique double.** — Il s'agit de remplacer les coordonnées homogènes x, y, z des points du plan par des polynômes homogènes en u, v, w , tels que la forme quadratique $\varphi(x, y, z)$ devienne identique au carré d'un polynôme homogène $f(u, v, w)$. C'est donc transformer d'une façon rationnelle la conique Q d'équation $\varphi = 0$ en la courbe double $f = 0$ ⁽²⁾.

Associons à Q la quadrique Q_3 de l'espace x, y, z, X d'équation $\varphi(x, y, z) - X^2 = 0$. Il est immédiat que sa représentation paramétrique nous fournit les expressions cherchées pour x, y, z , tandis que l'expression de X donne celle de f .

Par exemple prenons $\varphi \equiv x^2 + y^2 + z^2$. La représentation paramétrique de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 + z^2 - X^2 = 0$, qui se fait en coupant par une droite variable menée par le point $A(0, 0, 1, 1)$, conduit aux formules :

$$(8) \quad x = 2uw, \quad y = 2vw, \quad z = u^2 + v^2 - w^2$$

et

$$X = u^2 + v^2 + w^2.$$

La transformation définie par (3) est l'une des transformations cherchées; elle rend $\varphi \equiv (u^2 + v^2 + w^2)^2$.

(1) Suivant les variétés

$$\begin{cases} a_1^4 = 0 \\ a_1^2 x_2 + b_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2^2 = 0 \\ a_2^4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2^2 = 0 \\ a_1^2 x_2 + b_1 = 0 \end{cases}$$

Le système homaloïdal est alors formé de surfaces cubiques ayant une droite double d , et qui passent par 1° deux Q_{n-1} coniques contenant d et sections d'une même Q_n conique par deux E_{n-1} passant par d ; 2° un E_{n-2} section de l'un deux par un 3° E_{n-1} contenant d .

(2) Nous excluons naturellement les correspondances dégénérées qui n'opèrent que sur ∞^1 points du plan. Exemple, $x = u^2, y = 0, z = 0$. (Cf. GODEAUX, p. 8, Mémorial cité.)

Éclairons cela géométriquement (*fig. 1*). Le point $m(u, v, w)$ du plan (xOy) donne par perspective de A le point P de l'hyperboloïde qui se projette en $M(x, y, z)$. Inversement, au point M correspondent deux points m, m' alignés avec O et conjugués par rapport à zéro et M ainsi que par rapport à la conique $Q(\varphi = x^2 + y^2 + z^2 = 0)$, τ est donc une transformation $(1, 2)$. Quand M est sur Q , P et P' viennent se confondre avec M , ainsi que m et m' . La conique Q se transforme donc en elle-même comptée double.

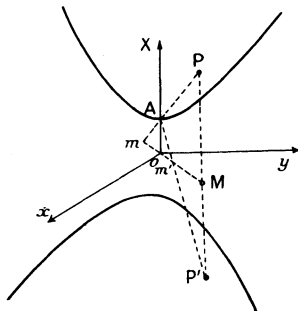


Fig. 1.

REMARQUES. — I. La Jacobienne de la transformation τ , définie par $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = 0$, et qui est du troisième ordre, se décompose donc en cette conique et une droite ($w = 0$).

II. Les transformations $t\tau$ produit de τ par une transformation rationnelle quelconque t transformant encore Q en courbe double. Si t est $(1, p)$, $t\tau$ est une correspondance rationnelle $(1, 2p)$. Une telle correspondance s'obtient par exemple quand la représentation paramétrique de la quadrique est impropre.

III. Il est clair que le problème de transformer une quadrique quelconque Q_p en quadrique double se traite exactement de la même façon, même dans le cas $p = 1$, ou deux points se transforment chacun en points unis ⁽¹⁾.

2. Transformer deux quadriques Q_p en deux cyclides doubles T_p . — Posons-nous le même problème pour deux quadriques quelconques Q_p , d'équations $\varphi = 0, \psi = 0$ dans E_p . La substitution rationnelle transforme φ en $(f)^2$ et ψ en $(g)^2$. Associons-leur la B_{p+2} de l'espace $(x_1, \dots, x_{p+1}, X, Y)$ d'équations $\varphi - X^2 = 0, \psi - Y^2 = 0$. Il est clair que sa représentation paramétrique fournit une solution par les expressions de $x_1, \dots, x_{p+1}$, tandis que celles de X et Y donnent les polynômes f et g . D'après la forme de ces expressions, étudiées au paragraphe 1, la transformation τ fait correspondre aux plans E_{p-1} de l'espace E_p un réseau de dimension p de cyclides cubiques T_p ayant une quintique commune q_p , et les deux quadriques φ et ψ deviennent chacune une cyclide du réseau

⁽¹⁾ Transformation utilisée au paragraphe 3.

comptée double. Interprétons τ géométriquement comme au paragraphe 1. Soit Δ la droite de B_{p+2} qui sert à faire la représentation paramétrique, et D la droite $x_1 = \dots = x_{p+1} = 0$, qui ne rencontre pas B_{p+2} . Au point $M(x)$ correspondent sur B_{p+2} les quatre points P situés dans le plan DM , puis par projection faite de Δ quatre points $m(u)$. τ est donc une transformation $(1, 4)$. Les quatre points m sont dans un plan E_2 qui contient M et pivote autour de la trace d sur E_p de l'hyperplan E_3 défini par ΔD ; en effet, cet E_2 est l'intersection avec E_p de l' E_4 défini par ΔD et M . Dans E_2 , qui coupe la quintique q_p en cinq points, l'empreinte de τ est une correspondance rationnelle $(1, 4)$ qui transforme les droites en un réseau à deux dimensions de cubiques passant par ces cinq points. Notons encore que l'involution des quatre points m homologues de M admet pour triangle diagonal abM (fig. 2), où a et b sont les projections faites des points $A(x_1 = 0, X = 0, Y = 1)$ et $B(x_1 = 0, X = 1, Y = 0)$ de D , car ABM est le triangle diagonal du quadrangle des quatre points P .

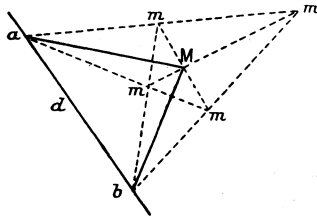


Fig. 2.

Quand à la propriété de τ concernant la transformation de φ et ψ en cyclides doubles, elle s'explique par la considération du faisceau de quadriques $\varphi - \lambda\psi = 0$.

A chaque quadrique de ce faisceau correspondent sur B_{p+2} deux sections planes $X = \pm\sqrt{\lambda}\psi$ variant dans le faisceau de base E_p d'une façon involutive. Il en est de même des projections qui sont deux cyclides ayant en commun la quintique q_p et l'intersection B_p des deux quadriques φ et ψ . Les deux cyclides viennent se confondre quand il s'agit des plans doubles $X = 0$ et $Y = 0$, c'est-à-dire pour les homologues de φ et ψ . Leur biquadratique commune est invariante de façon qu'un de ses points M coïncide avec les quatre points m homologues, tandis qu'un point quelconque de φ ou ψ donne deux points distincts dont chacun représente deux points m confondus.

Signalons comme au paragraphe 1 que le produit de τ par une transformation rationnelle $(1, p)$ est une correspondance rationnelle $(1, 4p)$ qui rend encore φ et ψ surfaces doubles. C'est le cas d'une représentation impropre de B_{p+2} .

Mentionnons aussi que la transformation simplement rationnelle τ devient birationnelle lorsque la droite D , qui sert dans sa définition, appartient à la B_{p+2} . Elle coïncide alors avec une transformation t de la famille étudiée au paragraphe II.

Terminons enfin par l'exemple des deux quadriques

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv x^2 - y^2 + 2z^2 - t^2 = 0, \\ \psi &\equiv x^2 + y^2 + 3z^2 - 3t^2 = 0,\end{aligned}$$

à transformer en cyclides doubles. On leur associe la B_3

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + 2z^2 - t^2 - X^2 &= 0, \\x^2 + y^2 + 3z^2 - 3t^2 - 2Y^2 &= 0,\end{aligned}$$

dont la représentation rationnelle obtenue à partir de la droite.

$$\Delta \begin{cases} x = y = Y, \\ z = t = X, \end{cases}$$

donne pour équations de τ

$$\begin{aligned}x &= -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2), \\y &= -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2h^2[3uv + (v + w)(u - 2h)], \\z &= -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2), \\t &= -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2v[3uv + (v + w)(u - 2h)],\end{aligned}$$

avec les cyclides transformées de φ et ψ respectivement

$$\begin{aligned}X &= -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2v[3uv + (v + w)(u - 2h)] = 0, \\Y &= -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2v[3uv + (v + w)(u - 2h)] = 0.\end{aligned}$$

3. Points unis d'une transformation. — Montrons comment le seul examen des points unis d'une des transformations simplement rationnelles τ , donne immédiatement certaines conditions *nécessaires*, relatives à son existence et à son ordre minimum. Ces points unis ont pour lieu la jacobienne de τ , définie par le déterminant $\frac{D(x_i)}{D(m)} = 0$.

Pour $p = 1$. — Le degré de la jacobienne d'une transformation simplement rationnelle d'ordre m sur la droite représente le nombre de ses points unis, soit : $2(m - 1)$. Les quatre zéros de deux formes quadratiques deviennent en général $4m$ points, qui, s'ils étaient deux à deux unis, compteraient pour $2m$ dans le nombre des points unis. Or celui-ci est seulement $2m - 2$. Il est donc impossible en général de rendre carrés parfaits deux formes quadratiques homogènes à deux variables, et cette impossibilité traduit l'irrationalité de la B_3 . Cela deviendrait possible si les deux formes avaient un zéro commun; on aurait alors seulement $\frac{3m}{2}$ points unis provenant de ces deux formes et l'inégalité $\frac{3m}{2} \leq 2(m - 1)$ est satisfaite pour $m \geq 4$. Effectivement, les deux formes sont alors réductibles à xy et

$x(ax + by)$; les deux quadriques associées $xy - z^2 = 0$ et $x(ax + by) - t^2 = 0$ ont au point commun $x = z = t = 0$ même plan tangent $x = 0$. Ce point est double dans l'intersection, qui est unicursale; sa représentation paramétrique peut s'obtenir par une transformation rationnelle de la droite rendant trois points unis; celle-ci sera par exemple le produit de deux transformations d'ordre 2, du type du paragraphe 4; la première transforme deux points en points deux à deux unis et le troisième en un couple de points que l'on peut rendre à leur tour unis

par une transformation du même type. On aura ainsi réalisé le schéma de la figure 3 pour les zéros $A_1 A_2 A'_1 A'_2$ dont deux coïncident.

Exemple :

$$xy - z^2 = 0, \quad x(x - y) - t^2 = 0.$$

On rend $xy(A_1 A'_1)$ carré parfait par une représentation paramétrique de $xy - z^2 = 0$ soit $x = X^2, y = Y^2, (z = XY)$. Alors $x - y(A'_2)$ devient $X^2 - Y^2$

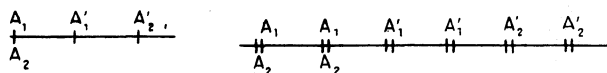


Fig. 3.

qu'on rend à son tour carré par la représentation paramétrique de $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$, soit

$$X = u^2 + v^2, \quad Y = u^2 - v^2,$$

Par suite

$$x = (u^2 + v^2)^2, \quad y = (u^2 - v^2)^2, \quad z = u^2 - v^2, \quad t = 2uv(u^2 + v^2);$$

c'est donc une véritable méthode qui se dégage de ces remarques simples.

Lorsque $p = 2$ une transformation rationnelle d'ordre m a pour jacobienne une courbe de degré $3(m - 1)$; les transformées, supposées doubles, de deux coniques, comptent pour le degré $2m$; ce qui entraîne la condition $3(m - 1) \geq 2m$ ou $m \geq 3$. Il n'y a plus cette fois d'impossibilité, et la transformation d'ordre minimum est cubique, comme celle qui a été trouvée au paragraphe 2.

Enfin quand $p > 2$ l'inégalité obtenue s'écrit $(p + 1)(m - 1) \geq 2m$ ou $m \geq 1 + \frac{2}{p-1}$; m étant entier elle équivaut à $m \geq 2$ mais rien ne prouve qu'il

existe en général des transformations d'ordre 2 répondant à la question. La condition $m \geq 2$, qui est nécessaire, est peut-être trop large; il paraît déjà remarquable que les transformations τ du paragraphe 2, qui sont du troisième ordre, résolvent le problème. Celui-ci, d'ailleurs, s'il est résolu par la représentation rationnelle d'une B_{p+2} , n'exige qu'une représentation unicursale, même impropre ⁽¹⁾, de cette variété. Il équivaut donc à la rationalité dans le cas $p = 1$ (théorème de Lüroth), $p = 2$ (théorème de Castel-nuovo sur la rationalité des involutions du plan), mais cela n'est déjà plus vrai pour $p = 3$ [ENRIQUES, *Sopra un' involuzione non razionale dello spazio* (*Acad. Lincei*, 1912)].

Les considérations précédentes sur la jacobienne d'une transformation simplement rationnelle qui rend deux quadriques surfaces doubles, se vérifient facilement pour le cas des solutions τ du paragraphe 2; leur jacobienne comprend comme parties les deux cyclides transformées de φ et ψ . Quand $p = 2$ ce sont deux

⁽¹⁾ Cette idée suggère la solution de problèmes parallèles tels que : transformer par substitution simplement rationnelle une surface cubique de l'espace ordinaire $\varphi = 0$ en surface triple $(f)^3 = 0$. On y arrive par une représentation paramétrique impropre de la variété cubique de l'espace à quatre dimensions $\varphi - \lambda^3 = 0$.

cubiques qui la constituent entièrement; pour $p > 2$ l'expression Q figure dans son équation à la puissance $p - 2$; elle y compte donc pour l'ordre $2(p - 2)$, et les deux cyclides pour 6, soit en tout $2(p + 1)$, c'est-à-dire que ces surfaces la forment entièrement.

CHAPITRE II.

Extension au cas de r hyperquadriques.

Si l'on veut étendre les résultats du chapitre I, qui proviennent de la rationalité de l'intersection de deux hyperquadriques, il faut d'abord se demander si la variété commune à r hyperquadriques de l'espace E_n est rationnelle. J'avais trouvé une réponse satisfaisante à cette question en même temps qu'elle paraissait dans une note de L. Gauthier⁽¹⁾ sous la forme suivante :

« L'intersection de r hyperquadriques quelconques d'un espace E_n à n dimensions est certainement rationnelle pour $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$. La rationalité provient dans ce cas de l'existence d'un E_{r-1} sur l'intersection : un point M variable sur celle-ci est en correspondance birationnelle avec la trace N dans un E_p ($p = n - 2$) de l' E_r défini par E_{r-1} et M . »

Il suffit par exemple $n \geq 4$, comme on l'a vu au chapitre I, pour assurer la rationalité d'une B_n ; il suffit $n \geq 8$ pour la rationalité de l'intersection de trois hyperquadriques.

Comme en définitive les conséquences que nous en tirons sont relatives à l'espace des paramètres E_p , on ne peut se contenter de l'affirmation de la rationalité; une étude précise de la représentation rationnelle elle-même est nécessaire : paragraphe I. Les méthodes employées sont inspirées du chapitre I; les notations s'en déduisent en règle générale par l'addition de l'indice r , qui vaut implicitement deux dans le chapitre I : par exemple une B'_n représente la variété commune à r hyperquadriques de l'espace à n dimensions, de même qu'une B_n ou B_n^2 désigne la biquadratique intersection de deux hyperquadriques de E_n . Toutes précisions utiles sont d'ailleurs données en cours de route, et cette notation remplace avantageusement, sans l'exclure, la notation V_{n-r}^r , moins précise et plus compliquée.

Sauf indication contraire, nous avons supposé dans ce premier paragraphe la dimension n de l'espace supérieure ou égale à la valeur limite $l = \frac{r(r+3)}{2} - 1$ qui assure la rationalité de la B'_n grâce à l'existence d'un E_{r-1} situé sur elle. Dans le deuxième paragraphe j'examine le cas $n < l$ avec l'hypothèse d'un E_{r-1} contenu dans la B'_n ; les résultats sont plus variés qu'au chapitre I ($l = 4$) où se présentait seulement la décomposition d'une biquadratique en cubique gauche accompagnée d'une corde; ici la variété B'_n ayant un E_{r-1} se trouve décomposée pour $n \leq 2r - 1$, et son étude est indispensable pour celle des transformations birationnelles t_r qui font avec les transformations rationnelles τ_r l'objet du paragraphe III.

(1) L. GAUTHIER, *Rationalité de l'intersection de p hyperquadriques dans l'espace S_r à r dimensions* (Bulletin Soc. Roy. Sc., Liège, 13, p. 191, 1944).

I. — REPRÉSENTATION RATIONNELLE DE L'INTERSECTION DE r HYPERQUADRIQUES

$$\text{DE L'ESPACE } E_n \left(n \geq l = \frac{r(r+3)}{2} - 1 \right).$$

a. Équations paramétriques. — Il vient d'être rappelé comment on obtient la représentation rationnelle à partir d'un $E_{r-1} \Delta$ situé sur la B_n^r . Précisons d'une façon analytique, en choisissant r sommets du repère projectif dans l' $E_{r-1} \Delta$ ($x_1 = x_2 = \dots = x_{n-r+1} = 0$). Les r quadriques sont alors définies par les équations

$$(1) \quad a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + \dots + a_i^r X_r + b_i = 0,$$

où $i = 1, 2, \dots, r$, les a_i^j étant des formes linéaires en $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, et les b_i des formes quadratiques des mêmes variables. Lorsque le déterminant du système (1), linéaire en $X_1 \dots X_r$, n'est pas identiquement nul, on peut résoudre :

$$X_1 = \frac{A_1}{B}, \quad X_2 = \frac{A_2}{B}, \quad \dots, \quad X_r = \frac{A_r}{B}$$

en posant

$$(2) \quad B = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^r \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r^1 & a_r^2 & \dots & a_r^r \end{vmatrix}$$

et en désignant par A_i le mineur tiré du tableau des coefficients de (1) par suppression de la colonne i . Il suffit de prendre comme paramètres homogènes de la représentation rationnelle les coordonnées $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ ($p = n - r$) d'un point N quelconque de l'espace E_p défini par les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, pour obtenir après multiplication par B les équations paramétriques suivantes :

$$(3) \quad x_1 = u_1 B, \quad x_2 = u_2 B, \dots, x_{p+1} = u_{p+1} B, \quad X_1 = A_1, \quad X_2 = A_2, \dots, X_r = A_r,$$

B est d'après (2) une forme d'ordre r en $u_1 \dots u_{p+1}$, et les A_i des formes d'ordre $r+1$.

Du point de vue géométrique le point $N(u)$ est la projection sur E_p , faite de Δ , du point $M(x)$.

b. Cas particulier. — Lorsque B est identiquement nul, les a_i^j peuvent être reliés :

1° soit par une combinaison linéaire des colonnes

$$\lambda_1 a_i^1 + \lambda_2 a_i^2 + \dots + \lambda_r a_i^r \equiv 0,$$

à coefficients λ constants et non tous nuls, grâce à laquelle les équations (1) s'écrivent ($\lambda_r \neq 0$)

$$a_i^1 (X_1 + \mu_1 X_r) + a_i^2 (X_2 + \mu_2 X_r) + \dots + a_i^{r-1} (X_{r-1} + \mu_{r-1} X_r) + b_i = 0,$$

par le changement de repère dans l' $E_{r-1} \Delta$:

$$X_1 + \mu_1 X_r = Y_1, \quad X_2 + \mu_2 X_r = Y_2, \dots, X_{r-1} + \mu_{r-1} X_r = Y_{r-1}.$$

On vérifie que la B_n^r est l'intersection de r cônes ayant leur sommet commun dans Δ ; c'est elle-même un cône dont la base est une B_{n-1}^r . Sa rationalité n'est plus assurée.

2° soit par une combinaison linéaire des colonnes

$$\lambda_1 a_1^r + \lambda_2 a_2^r + \dots + \lambda_r a_r^r = 0,$$

à coefficients constants et non tous nuls, d'où l'on déduit

$$b'_r = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_r b_r = 0,$$

pour l'une des quadriques contenant la B_n^r . Cette quadrique est un cône de sommet E_{r-1} , dont la représentation rationnelle permet d'obtenir celle de la B_n^r , à condition que le système (1) soit de rang $r-1$, c'est-à-dire qu'il existe un déterminant d'ordre $r-1$ non identiquement nul tiré des coefficients a_i^r . S'il n'en est pas ainsi, si le rang du système est seulement $r-2$, deux des équations (1), par exemple les deux dernières, pourront être remplacées par

$$b'_{r-1} = 0, \quad b'_r = 0.$$

Dans l'espace E_p ces deux quadriques ont une intersection rationnelle en général, ce qui entraîne la rationalité de la B_n^r ; il y a exception pour le cas où l'hyperbiquadratique est un cône non rationnel (1).

Poursuivant le même raisonnement on arrive à supposer le rang du système (1) égal à 1. L'intersection B_n^r se trouve alors définie par

$$\begin{aligned} a_1^r x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^r x_r + b_1 &= 0, \\ b'_2 = 0, \quad b'_3 = 0, \dots, \quad b'_r &= 0. \end{aligned}$$

Dans E_p les $r-1$ quadriques b'_i ont en général une intersection rationnelle; il faut pour le vérifier montrer que la dimension $p = n - r$ est supérieure ou égale à la valeur limite l' relative à $r-1$. Or

$$l' = \frac{(r-1)(r+2)}{2} - 1 \quad \text{et} \quad p = n - r = \frac{r(r+1)}{2} - 1.$$

La condition $p > l'$ est remplie si

$$r(r+1) > (r-1)(r+2),$$

ce qui est vérifié. Pourtant la rationalité n'est pas assurée quand l'intersection des $r-1$ quadriques est un cône non rationnel, ce qui n'implique pas que la B_n^r elle-même fût un cône.

On voit ainsi apparaître une nouvelle circonstance pour laquelle une B_n^r n'est pas à coup sûr rationnelle même si le nombre n des dimensions de l'espace où elle se trouve est suffisamment grand. Elle exige, comme on vient de le voir, que deux au moins des quadriques qui contiennent B_n^r soient des cônes de sommet E_{r-1} commun Δ . Δ est alors sur B_n^r d'un ordre de multiplicité supérieur à 2.

(1) Sa base est alors une biquadratique ordinaire sans point double (Chap. I, § 1).

Donc :

Toute B_n^r est certainement rationnelle pour $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$ sauf peut-être dans l'un des deux cas suivants :

- 1° la B_n^r est un cône;
- 2° la B_n^r admet Δ comme E_{r-1} multiple d'ordre supérieur à 2.

S'il m'a semblé nécessaire d'ajouter ces précisions sur la rationalité d'une B_n^r , ce n'est pas elles pourtant que je veux mettre en lumière, mais le fait que la représentation rationnelle peut toujours s'obtenir par les équations (3). Ce fait résulte aussi de ce qui précède, sauf dans le cas du cône rationnel, et les cas rationnels où Δ est multiple. Je peux donc énoncer le résultat suivant :

Toute B_n^r non conique et dépourvue d'un E_{r-1} double ⁽¹⁾ est rationnelle pour $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$, et sa représentation rationnelle peut toujours s'effectuer d'après les équations (3).

Celles-ci permettent l'étude facile de la représentation rationnelle, que nous poursuivons maintenant.

c. Images des sections planes. — Elles varient, d'après (3), dans un système linéaire de variétés d'ordre $r+1$ ayant en commun l'intersection des surfaces

$$B = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \dots, A_r = 0.$$

Ses équations s'obtiennent donc en annulant la matrice à r lignes et $r+1$ colonnes

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^r & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^r & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_r^1 & a_r^2 & \dots & a_r^r & b_r \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{q_p^r}.$$

Cette variété constitue l'intersection résiduelle de la variété d'ordre r d'équation $B = 0$, avec la variété d'ordre $r+1$ d'équation $A_1 = 0$, en dehors d'une variété déjà commune d'équation

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^r \\ a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r^2 & a_r^3 & \dots & a_r^r \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{L_p^r}.$$

La détermination de l'ordre des variétés (4) et (5) se fait immédiatement d'après un calcul de Salmon ⁽²⁾ sur l'ordre d'un tableau dont les éléments sont des

⁽¹⁾ Dans le cas où Δ est double sur l'une des quadriques qui contiennent B_n^r , cas où l'une des équations se réduisent à $b_p = 0$, la représentation rationnelle ne s'obtient pas à partir de celle de $b_p = 0$ sous la forme (3). On pourrait l'y ramener à partir d'un autre E_{r-1} situé sur B_n^r ; quand on coupe celle-ci par un E_r contenant Δ il faudrait pour obtenir un deuxième E_{r-1} que le système (1) se réduise à une quadrique; cela exige pour le point N dans $E_{p,r}(r-2)+1$ conditions.

Pour $p = l - r = \frac{r(r+1)}{2} - 1$ elles ne peuvent être satisfaites que si $\frac{r(r+1)}{2} - 1 \geq r(r-2) + 1$ ou $(r-1)(r-4) \leq 0$, soit pour $r = 1, 2, 3, 4$. Donc : Lorsqu'une B_n^r admet un E_{r-1} double Δ il existe, pour $n \geq l$ et quand r ne dépasse pas 4, d'autres E_{r-1} sur B_n^r incidents à Δ suivant un E_r .

⁽²⁾ SALMON, Algèbre supérieure, p. 415.

polynomes par rapport aux variables : la variété (4) généralisant la quintique q_p est une variété à $p - 2$ dimensions, d'ordre $\frac{r(r+3)}{2}$. Je la désigne par q_p^r . La variété (5) est à $p - 2$ dimensions et son ordre (Salmon) vaut $\frac{r(r-1)}{2}$, elle généralise un E_{p-2} du cas $r = 2$, je la désigne par L_p^r . Toute variété V_{p-1}^{r-1} dont l'équation peut prendre la forme

$$(6) \quad | a_i^2 \ a_i^2 \ \dots \ a_i^r \ b_i | = 0 \quad \boxed{T_p^r}$$

et qui généralise par conséquent la cyclide T_p , sera désignée par T_p^r . Je vais montrer que l'image d'une section hyperplane quelconque de la B_n^r

$$X_r = \lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 + \dots + \lambda^{r-1} X_{r-1} + B_1,$$

où B_1 est une forme linéaire en $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$, et les λ^i des constantes, constitue une variété T_p^r ; il suffit de remplacer dans (1) X_r par son expression; on obtient alors comme équation de l'image

$$| a_i^1 + \lambda^1 a_i^r, \quad a_i^2 + \lambda^2 a_i^r, \dots, a_i^{r-1} + \lambda^{r-1} a_i^r, \quad b_i + B_1 a_i^r | = 0$$

qui est bien une variété T_p^r . Elle contient la q_p^r et recoupe la variété $B = 0$ suiv an une L_p^r d'équation :

$$|| a_i^1 + \lambda^1 a_i^r, \quad a_i^2 + \lambda^2 a_i^r, \dots, a_i^{r-1} + \lambda^{r-1} a_i^r || = 0$$

Ces notations admises, on vient ainsi de prouver que :

Les images des sections hyperplanes d'une B_n^r forment dans E_p un système linéaire complet de variétés T_p^r de dimensions $p - 1$ et d'ordre $r + 1$, ayant une variété commune q_p^r , de dimension $p - 2$ et d'ordre $r(r + 3)$.

Parmi elles s'en trouvent ∞^r décomposées en un E_{p-1} et la variété V_{p-1}^{r-1} d'équation

$$(7) \quad | a_i^1 \ a_i^2 \ \dots \ a_i^r | = 0 \quad \boxed{V_{p-1}^{r-1}}$$

qui contient la q_p^r , de même que la quadrique Q passait par la quintique pour $r = 2$. Ces images décomposées correspondent aux hyperplans E_{n-1} passant par l' E_{r-1} Δ . Un point N de V_{p-1}^{r-1} est la projection d'un point sur B_n^r infiniment voisin de Δ . Il y a en effet impossibilité du système (1) pour les coordonnées de ce point N , donc aucun point de B_n^r en dehors de Δ dans l' $E_r \Delta N$; quand se produit l'indétermination, exprimée par les équations (4) de q_p^r , on est en présence d'une droite de B_n^r rencontrant Δ . Chaque point de q_p^r est donc la projection d'une droite incidente à Δ : on s'explique ainsi que la variété q_p^r figure comme base du système linéaire image des sections planes. Dans le cas $p = l - r$, c'est-à-dire $n = l$, il ne saurait y avoir dans le système (1) d'indétermination suffisante pour entraîner l'existence d'un deuxième E_{r-1} de la B_n^r rencontrant le premier suivant un E_{r-2} ; il faudrait en effet que le tableau des coefficients de (1), les b_i compris, ait toutes ses lignes proportionnelles, ce qui exige $r(r - 1)$

conditions algébriques dans l'espace à $p = \frac{r(r+1)}{2} - 1$ dimensions. Or l'inégalité

$$\frac{r(r+1)}{2} - 1 \geq r(r-1)$$

s'écrit

$$(r-1)(r-2) \leq 0.$$

Elle n'est vérifiée que pour $r=2$ ($r=1$ est sans intérêt). Donc,

Quand $n=l$, c'est-à-dire quand le nombre des E_{r-1} communs à r hyperquadriques de E_n est fini et non nul, il n'en existe pas deux qui soient incidents suivant un E_{r-2} , sauf pour $r=2$ (1).

d. Exemples et propriétés. — $r=1$. Cas banal de la représentation rationnelle d'une hyperquadrique, d'une quadrique, ou d'une conique. La représentation rationnelle s'effectue dans E_p par des quadriques Q_p ayant une Q_{p-1} commune ($a_1=0, b_1=0$). Donc

$$V_{p-1}^1 = E_{p-1}, \quad T_p^1 = Q_p, \quad q_{p-1} = Q_{p-1}.$$

$r=2$ — Cas traité au chapitre I ($l=4$).

$r=3$ — ($l=8$). La représentation rationnelle de l'intersection de trois hyperquadriques d'un espace à huit dimensions au moins

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + a_i^3 X_3 + b_i = 0 \quad (i=1, 2, 3),$$

se fait dans E_p ($p \geq 5$) par des variétés à $p-1$ dimensions d'ordre 4 désignées par T_p^4 , ayant en commun l'intersection résiduelle de l'une d'elles

$$T_p^4 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & b_1 \\ a_2^2 & a_2^3 & b_2 \\ a_3^2 & a_3^3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

avec la variété à $p-1$ dimensions, d'ordre 3, d'équation

$$V_{p-1}^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

en dehors de la V_{p-2}^3 définie par

$$L_p^3 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) La configuration des E_{r-1} communs à r hyperquadriques pour $n=l$, ne généralise donc pas celle des droites communes à deux hyperquadriques de l'espace à quatre dimensions ($r=2, p=2$, Chap. I). Cependant j'ai montré précédemment (Chap. II, § 1-2 en note) comment les valeurs d'exception pour r comprennent aussi trois et quatre, pour un E_{r-1} à double sur la B_n^r .

Cette variété, base du système linéaire, est à $p-2$ dimensions et d'ordre 9; ses équations s'écrivent :

$$q_p^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les remarques suivantes permettent de mieux saisir les rapports mutuels de ces différentes variétés. Tout d'abord, il est clair que les deux variétés à $p-2$ dimension q_p^3 et L_p^3 sont *complémentaires* ⁽¹⁾, c'est-à-dire qu'elles forment l'intersection totale de deux variétés à $p-1$ dimensions (T_p^3 et V_{p-1}^3). De plus L_p^3 est complémentaire de l' E_{p-2} d'équations

$$a_1^1 = 0, \quad a_1^2 = 0$$

(qui est un L_p^2). Il en résulte que

La variété q_p^3 se *déduit* ⁽¹⁾ d'un E_{p-2} , et que la suite de variétés E_{p-2} , L_p^3 , q_p^3 forment une *chaîne* ⁽¹⁾.

Il en va de même pour $r > 3$, où la suite L_p^r , L_p^{r-1} , ..., L_p^3 , q_p^r forme encore une chaîne.

La variété V_{p-1}^r d'équation (7) généralise la quadrique Q_p rencontrée pour $r=2$. C'est un lieu d' E_{p-r} à $r-1$ paramètres, d'équations

$$(8) \quad \lambda_1 a_1^i + \lambda_2 a_2^i + \dots + \lambda_r a_r^i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r).$$

Un tel E_{p-r} , par exemple $a_i^1 = 0$, rencontre q_p^r suivant la section par $A_1 = 0$, c'est-à-dire une T_{p-r}^r . Il joue le rôle d'une corde trisécante pour la quintique gauche de genre 2. Un E_{p-r} de l'autre système (tel que $a_1^i = 0$, $a_2^i = 0$, ..., $a_r^i = 0$) rencontre q_p^r suivant une quadrique Q_{p-r} (telle que la section par $b_1 = 0$).

Toute V_{p-1}^r d'équation (7) est rationnelle pour $p \geq r$ ⁽²⁾.

En effet, si $p=r$, on peut dans les équations (8) qui définissent les coordonnées du point générique exprimer birationnellement les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ en fonction des p paramètres homogènes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Quand $p > r$ il suffit d'ajouter aux paramètres précédents $p-r$ coordonnées $x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_{p+1}$ pour résoudre en $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$.

C'est ainsi qu'on obtient pour $p=r=3$ la surface cubique de l'espace, qui ne se présente pas cette fois comme une cyclide cubique; c'est pour $p=4$ une variété cubique à trois dimensions qui admet pour points doubles ceux qui annulent tous les mineurs du deuxième ordre tirés du déterminant qui est au premier membre de son équation ⁽³⁾. A partir de $p=9$, l' E_{p-6} défini par $a_i^j = 0$

⁽¹⁾ Définition donnée par P. DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques* (Actualités Scientifiques et Industrielles, 1935, p. 23).

⁽²⁾ La définition, par leurs équations, des différentes variétés rencontrées : V_{p-1}^r , T_p^r , q_p^r , L_p^r , est naturellement valable quel que soit p , qui peut être, comme dans cet énoncé, inférieur à $l-r$.

⁽³⁾ Soit six points doubles, d'après un résultat de Segre (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. 9, 1900, série 2, p. 253).

a tous ses points multiples d'ordre 3 sur la V_{p-1}^3 qui se réduit donc à un cône rationnel du troisième ordre de sommet E_{p-1} .

Il en est de même pour r quelconque; la variété V_{p-1}^r devient un cône rationnel d'ordre r lorsque $p \geq (r)^2$, qui a pour sommet l' $E_{p-(r)^2}$ défini par

$$a_i^j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

La propriété caractéristique d'une V_{p-1}^r d'équation (7) est de contenir une variété L_p^r . Nous allons dire maintenant quelques mots de cette dernière.

Rappelons qu'elle est définie par son équation de la forme (5), qu'elle est à $p-2$ dimensions et que son ordre vaut $\frac{r(r-1)}{2}$. Luc Gauthier la rencontre pour $p=r$ dans sa thèse (2) sur les congruences linéaires de droites d'un hyper-espace, comme focale propre Ω_r d'une congruence linéaire de droites dans l'espace E_r . Il démontre sa rationalité en la transformant en un E_{r-2} par une transformation birationnelle de tout l'espace E_r . Je vais établir directement le théorème plus général :

Toute L_p^r , d'équation (5), est rationnelle pour $p \geq r$.

En effet L_p^r peut s'interpréter comme lieu dans E_p de l' E_{p-r} commun aux r plans

$$\lambda_2 a_i^2 + \lambda_3 a_i^3 + \dots + \lambda_r a_i^r = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r);$$

quand $p=r$ on peut exprimer birationnellement les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ en fonction des $p-1$ paramètres homogènes $\lambda_2, \dots, \lambda_r$. Quand $p > r$ il suffit d'ajouter aux paramètres précédents $p-r$ coordonnées $x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_{p+1}$ pour avoir une expression birationnelle de toutes les coordonnées en fonction de $p-1$ paramètres homogènes (1).

La représentation rationnelle pour $p=r$ se fait comme celle de Luc Gauthier, par un système linéaire de V_{r-3}^r qui ont une variété L_{r-2}^r commune.

Poursuivant l'examen des variétés rencontrées dans la représentation rationnelle d'une B_n^r nous arrivons aux variétés T_p^r qui généralisent pour r quelconque les cyclides cubiques du cas $r=2$. Elles sont à $p-1$ dimensions, et d'ordre $r+1$; leur équation, par définition, peut se mettre sous la forme (6). J'indique d'abord quelques propriétés caractéristiques indépendantes de la dimension p de l'espace où elles se trouvent.

1° Une T_p^r est dans E_p une variété, à $p-1$ dimensions, d'ordre $r+1$, qui contient une q_p^r .

(Cf. Une cyclide cubique T_p est une V_{p-1}^3 qui passe par une quintique q_p .)

(2) Paris, 1944, Chapitre V, p. 94.

(1) Dans le cas $p=r$ la rationalité de L_p^r entraîne celle de V_{p-1}^r , car un point de V_{p-1}^r est en correspondance birationnelle avec une droite de la congruence linéaire définie par L_p^r : une droite de cette congruence s'appuie sur L_p^r en $r-1$ points (Gauthier) et ne coupe V_{p-1}^r , qui est d'ordre r , qu'en un point variable en dehors de L_p^r . Inversement par un point de V_{p-1}^r ne passe qu'une droite de la congruence puisque celle-ci est linéaire.

2° Une T_p^r est dans E_p une V_{p-1}^{r+1} qui contient une q_p^{r-1} . — Celle qui a pour équation (6) contient en effet la q_p^{r-1} définie par le tableau :

$$\| a_i^2 \quad a_i^3 \quad \dots \quad a_i^r \quad b_i \| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r-1).$$

(Cf. Une cyclide cubique T_p est une V_{p-1}^3 qui passe par une quadrique Q_{p-1} .)

3° Une T_p^r est dans E_p une V_{p-1}^{r+1} qui contient une L_p^r . — Celle qui a pour équation (6) contient en effet la variété L_p^r définie par le tableau :

$$\| a_i^2 \quad a_i^3 \quad \dots \quad a_i^r \| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

(Cf. Une cyclide cubique T_p est une V_{p-1}^3 qui passe par un E_{p-2} .)

Cette variété L_p^r constitue avec la variété q_p^{r-1} de la propriété précédente l'intersection complète de T_p^r avec la variété V_{p-1}^{r-1} d'équation $| a_i^2 \quad a_i^3 \quad \dots \quad a_i^r | = 0$ où $(i = 1, 2, \dots, r-1)$, en accord avec le théorème de Bezout généralisé

$$(r-1)(r+1) = \frac{(r-1)(r+2)}{2} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Il s'agit pour $r = 2$ de la section décomposée d'une cyclide cubique par l' E_{p-1} de l'une de ses quadriques Q_{p-1} . Enfin toute V_{p-1}^{r-1} passant par L_p^r recoupe la variété T_p^r suivant une q_p^{r-1} , ces variétés V_{p-1}^{r-1} forment un système linéaire à $r-1$ paramètres

$$| \lambda_i, a_i^2, a_i^3, \dots, a_i^r | = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

où les λ_i sont r constantes.

4° Une T_p^r est la projection sur un E_p d'une section hyperplane de l'intersection B_n^r de r hyperquadriques d'un espace à $n = p + r$ dimensions, projection faite d'un E_{r-1} situé sur la B_n^r .

Associons à la T_p^r d'équation (6) la B_n^r d'équations (1) dans l' $E_{p+r}(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, X_1, X_2, \dots, X_r)$. La T_p^r se présente alors comme la projection dans E_p de la section par $X_1 = 0$, projection faite à partir de l' E_{r-1} , $x_1 = x_2 = \dots = x_{p+1} = 0$ situé sur B_n^r .

Inversement toute projection sur un E_p faite suivant les conditions de l'énoncé, donne une variété T_p^r , comme je l'ai montré dans la représentation rationnelle d'une B_n^r au paragraphe c.

5° Une T_p^r est la projection sur un E_p de l'intersection B_{n-1}^r de r hyperquadriques d'un espace à $n-1 = p + r - 1$ dimensions, projection faite à partir d'un E_{r-2} situé sur la B_{n-1}^r .

(Cf. Une cyclide cubique T_p est la projection sur un E_p de l'intersection B_{p+1} de deux hyperquadriques de E_{p+1} , faite d'un point O appartenant à la B_{p+1} .)

L'équation (6) résulte en effet de l'élimination de $X_2, X_3, \dots, X_r$ entre les r équations

$$a_i^2 X_2 + a_i^3 X_3 + \dots + a_i^r X_r + b_i = 0$$

qui sont celles de r quadriques de l'espace $E_{p+r-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, X_2, X_3, \dots, X_r)$ ayant en commun l' E_{r-2} , $x_1 = x_2 = \dots = x_{p+1} = 0$.

Inversement toute projection faite suivant les conditions de l'énoncé peut se traduire analytiquement par ce calcul.

On déduit de la propriété 5 ou 4 une conséquence intéressante, mais qui dépend cette fois de la valeur de p :

6° Toute hypersurface T_p^r est rationnelle pour $p \geq \frac{r(r+1)}{2}$.

(Cf. Une cyclide cubique T_p est rationnelle pour $p \geq 3$.)

D'après la propriété 4, une T_p^r se trouve en correspondance birationnelle avec la section hyperplane de l'intersection de r hyperquadriques de E_{p+r} , c'est-à-dire avec l'intersection de r hyperquadriques de E_{p+r-1} . Or, celle-ci est rationnelle puisque

$$p + r - 1 \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1 = l.$$

Cela résulte aussi de la propriété 5. La B_{n-1}^r peut être considérée comme l'intersection d'une quadrique avec une B_{n-1}^{r-1} passant par l' E_{r-2} . La correspondance par projection de l' E_{r-2} s'identifie avec une représentation rationnelle de B_{n-1}^{r-1} , elle établit donc une correspondance birationnelle entre B_{n-1}^r et T_p^r . Or B_{n-1}^r est rationnelle pour $n-1 \geq l$ ou $p + r - 1 \geq l$, ce qui est vérifié d'après l'hypothèse sur p .

On peut en déduire la représentation rationnelle d'une T_p^r , par l'intermédiaire de la représentation rationnelle de la B_{n-1}^r sur un E_{p-1} . Cette dernière s'effectue par projection faite d'un E_{r-1} de la B_{n-1}^r . Cherchons alors l'homologue d'une section de la T_p^r par un E_{p-1} , elle donne sur B_{n-1}^r une section par un hyperplan qui contient E_{r-2} , puis par projection faite de l' E_{r-1} sur E_{p-1} une variété T_{p-1}^r qui contient un E_{r-2} fixe, ainsi qu'une variété q_{p-1}^r ; cet E_{r-2} coupe la q_{p-1}^r suivant une variété V_{r-3}^r , comme on va le voir au paragraphe II (c). Donc :

La représentation rationnelle d'une T_p^r peut toujours s'effectuer dans E_{p-1} par $p+1$ variétés T_{p-1}^r ayant en commun une variété q_{p-1}^r ainsi qu'un E_{r-2} qui s'appuie sur elle suivant une V_{r-3}^r .

7° Une variété T_p^r admet des points multiples d'ordre r pour $p \geq r^2$.

Pour la T_p^r d'équation (6), ce sont ceux dont les coordonnées vérifient les r^2 équations

$$a_i^2 = a_i^3 = \dots = a_i^r = b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Les dérivées partielles d'ordre $r-1$, prises sous la forme d'une somme de déterminants, s'annulent en effet pour les coordonnées d'un de ces points, qui se trouvent répartis sur une $B_{p-(r-1)r}^r$.

L'existence d'un point multiple d'ordre r entraîne évidemment la rationalité de T_p^r , qui est d'ordre $r+1$, de sorte que la propriété 6 garde surtout son intérêt pour les valeurs de p comprises entre $\frac{r(r+1)}{2}$ et r^2 , limite inférieure incluse, soit $p = 3$ pour $r = 2$, cas de la cyclide cubique; $p = 6, 7, 8$ pour $r = 3$, cas de la T_p^3 d'ordre 4.

On tire de γ la propriété suivante, concernant la variété q_p^r :

8° La variété q_p^r admet des points multiples d'ordre $\frac{r(r+1)}{2}$ pour $p \geq r(r+1)$.
Ce sont ceux dont les coordonnées vérifient

$$a_i^j = 0, \quad b_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

Un E_2 quelconque passant par l'un de ces points O, qui est multiple d'ordre r pour la V_{p-1}^r et pour la T_p^r , coupe la première variété suivant r droites issues de O et la deuxième suivant une courbe d'ordre $r+1$ admettant O pour point r -uple. donc q^r en r points seulement différents de O. C'est donc que celui-ci en absorbe $\frac{r(r+3)}{2} - r = \frac{r(r+1)}{2}$. Ces points multiples O sont répartis sur une $B_{p-r,2}^r$ située dans l'espace linéaire sommet de V_{p-1}^r ,

II. — CAS $n < l$.

Il n'y avait à signaler, pour $r=2$ et $n < 4$, que la décomposition d'une biquadratique en une cubique gauche et l'une de ses cordes, au cas où l'on impose l'existence d'une droite sur la B_3 . On pourrait ajouter, quand $n=2$, la décomposition mixte en une droite et un point.

Prenons maintenant trois hyperquadriques ($r=3$, $l=8$) dans un espace à moins de huit dimensions. La présence d'un E_2 sur l'intersection n'étant plus assurée, il nous faut la supposer, elle entraîne la rationalité; la variété correspondante est décomposée suivant E_2 et :

1° Un point pour $n=3$;

2° Une courbe rationnelle normale d'ordre 4 pour $n=4$, trisécante à E_2 .

Coupons en effet la courbe, d'équation (1) par un E_3 quelconque

$$X_3 = \lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 + B_1,$$

où λ^1 et λ^2 sont des constantes et B_1 une forme linéaire en x_1 et x_2 . On obtient en portant dans (1)

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire quatre points dont les coordonnées x_1, x_2 vérifient

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe est d'ordre 4, et trisécante à E_2 puisqu'un E_3 variable passant par E_2 ne la coupe qu'en un point. On retrouve d'ailleurs la façon classique d'obtenir la représentation rationnelle de la courbe d'ordre 4 de E_4 , à partir d'un E_3 qui pivote autour d'un E_2 quelconque joignant trois points de la courbe.

3° L'intersection V_2^r de trois quadriques de E_5 ayant déjà E_2 en commun, rationnelle, comme il se doit d'après le paragraphe I, et représentée sur le plan par des quartiques ayant neuf points communs. Cette variété n'est pas sans intérêt, puisque sa projection sur un E_1 , faite d'un de ses points, constitue la

surface de Véronèse-Bordiga, représentée sur le plan par des quartiques ayant dix points communs, et surface focale propre de la congruence linéaire de ses trisécantes ⁽¹⁾.

Restent les cas de l'espace à six ou sept dimensions, pour lesquels l'intersection *n'est plus décomposée*, malgré la présence de l' E_2 .

Pour $n = 6$, on représente rationnellement sur l'espace ordinaire l'intersection de trois quadriques de E_6 ayant un E_2 commun. Cette représentation se fait par des T_3^2 ou surfaces du quatrième ordre qui passent par une q_3^2 , c'est-à-dire une courbe du neuvième ordre intersection résiduelle d'une surface du quatrième ordre et d'une surface cubique ayant déjà une cubique gauche commune ⁽²⁾,

Pour $n = 7$, on représente rationnellement sur l'espace à quatre dimensions l'intersection de trois quadriques de E_7 ayant un E_2 commun, au moyen de $T_3^2 = V_3^4$ qui passent par une même $q_3^2 = V_3^2$.

La diversité des cas augmente ainsi avec r . La représentation rationnelle du paragraphe I s'applique encore à l'intersection de r hyperquadriques de l'espace E_n , quand $n < l$, et quand on suppose l'existence d'un E_{r-1} commun aux hyperquadriques. Il ne s'agit plus alors d'une B_n' générale dans son espace E_n , mais d'une variété rationnelle d'ordre inférieur à $2r$ dans le cas $n < 2r - 1$: quand $n = 2r - 1$, l'intersection totale est décomposée suivant E_{r-1} et une variété rationnelle à $r - 1$ dimensions d'ordre $2r - 1$; quand $n < 2r - 1$, l'intersection totale est mixte, décomposée suivant E_{r-1} et une variété rationnelle à moins de $r - 1$ dimensions : $n - r$, dont il faut d'abord déterminer l'ordre; c'est l'objet du paragraphe a.

$$a. \quad r \leq n < 2r.$$

$n = r$. — L'intersection de r quadriques de E_r ayant un E_{r-1} commun, est constituée, puisque les quadriques sont alors décomposées, par cet E_{r-1} , et l'intersection de r autres E_{r-1} , c'est-à-dire un point unique. C'est d'ailleurs cette propriété qui permet d'établir la rationalité d'une B_n' quelconque ($n \geq l$).

$n = r + 1$. — L'intersection de r quadriques de E_{r+1} , qui ont pour équations (1), et contiennent un même E_{r-1} , comprend en dehors de E_{r-1} une courbe dont l'ordre s'obtient en coupant par un E_r quelconque :

$$X_r = \lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 + \dots + \lambda^{r-1} X_{r-1} + B_1$$

B_1 étant une forme linéaire en x_1, x_2 et les λ des constantes. Les coordonnées des points de section vérifient les équations obtenues en portant X_r dans (1)

$$\alpha_i^1 X_1 + \alpha_i^2 X_2 + \dots + \alpha_i^{r-1} X_{r-1} + b_i^1 = 0,$$

⁽¹⁾ GAUTHIER, *Thèse*, Chap. VI, p. 86.

⁽²⁾ Cette courbe d'ordre 9, intersection partielle de deux surfaces, est aussi de genre 9. Elle coupe la cubique gauche Γ en onze points, et les surfaces cubiques contenant Γ découpent sur elle la série canonique complète. Trois surfaces du quatrième ordre qui la contiennent se coupent naturellement en huit points (EXRIQUES, *Courbes algébriques*, traduction LÉGAULT, Paris, 1926, p. 535).

d'où en éliminant $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$

$$|a_i^{r-1} \ a_i^{r-2} \ a_i^{r-3} \ b_i| = 0.$$

Le premier nombre est un déterminant d'ordre r , et l'équation a $r+1$ racines. D'où :

r quadriques d'un espace E_{r+1} qui ont un E_{r-1} commun se recoupent suivant une courbe rationnelle normale d'ordre $r+1$, r fois sécante à E_{r-1} .

$n = r+2$. — Il faut pour déterminer l'ordre de la surface à deux dimensions suivant laquelle se recoupent r quadriques de E_{r+2} passant par un E_{r-1} ajouter aux équations (1) de ces quadriques les deux équations d'un E_r .

$$\begin{aligned} X_{r-1} &= \lambda_1^1 X_1 + \lambda_1^2 X_2 + \dots + \lambda_1^{r-2} X_{r-2} + B_1, \\ X_r &= \lambda_2^1 X_1 + \lambda_2^2 X_2 + \dots + \lambda_2^{r-2} X_{r-2} + B_2. \end{aligned}$$

On obtient alors en portant dans (1)

$$a_i^{r-1} X_1 + a_i^{r-2} X_2 + \dots + a_i^{r-2} X_{r-2} + b_i = 0.$$

L'élimination de $X_1, X_2, \dots, X_{r-2}$ donne l'annulation d'une matrice à r lignes et $r-1$ colonnes dont la dernière est quadratique

$$\|a_i^{r-1} \ a_i^{r-2} \ \dots \ a_i^{r-2} \ b_i\| = 0.$$

Son ordre (Salmon, p. 415) est

$$1 + C_r^1 + C_r^2 = \frac{r^2 + r + 2}{2}.$$

Donc : r quadriques d'un espace E_{r+2} qui ont un E_{r-1} commun se recoupent suivant une surface rationnelle à deux dimensions d'ordre $m = 1 + C_r^1 + C_r^2$, $m-1$ fois sécante à E_{r-1} .

$n = r+k$ ($k < r$). — On obtiendra de même, en coupant par un E_r quelconque, l'ordre de l'intersection résiduelle à k dimensions, égal à celui d'une matrice à r lignes et $r-k+1$ colonnes

$$\|a_i^{r-1} \ a_i^{r-2} \ \dots \ a_i^{r-k} \ b_i\| = 0$$

qui vaut (Salmon, p. 415)

$$1 + C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^k.$$

Le théorème général s'énonce donc :

r quadriques d'un espace E_{r+k} se recoupent en dehors d'un E_{r-1} commun suivant une variété à k dimensions d'ordre,

$$m = 1 + C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^k \quad (k < r)$$

$m-1$ fois sécante à E_{r-1} .

Cette valeur de m vaut tant que $k < r$. Pour $k = r-1$, m est la somme des coefficients du binôme diminuée du dernier, ou $2^r - 1$. La variété correspondante, de dimension $r-1$, joue un rôle dans la théorie des congruences linéaires : sa

projection sur un E_{r+4} , à partir d'un E_{r-3} situé sur elle, constitue la focale propre Ω_{r-1} d'une congruence linéaire dans E_{r+4} (1).

$2r \leq n < l$. — L'intersection totale, qui comprend toujours un E_{r-1} par hypothèse, n'est plus alors décomposée. Elle reste rationnelle et la représentation rationnelle par variétés T_p^r à base q_p^r est toujours valable.

b. Les T_p^r dont il s'agit dans cette représentation sont générales dans l'espace E_p , mais nous savons (paragraphe I, d, propriété 5) qu'on rencontre aussi la variété T_p^r en projetant une B_{n-1}^r à partir d'un E_{r-2} qui lui appartient. Étudions, pour le cas $n < l$, les T_p^r obtenues de cette façon. Prenons, pour fixer les idées, le cas de trois hyperquadriques dans un espace à moins de huit dimensions, qui possèdent en commun par hypothèse, un plan E_2 et une droite D.

Cette droite sert à faire la projection, nous la supposons complètement étrangère au plan. Les sommets A_1, A_2 du repère projectif étant sur D, les trois quadriques auront pour équation

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nous pouvons étudier la projection sur un E_p passant par E_2 , le résultat sera valable à une homographie près dans E_p . Choisissons pour cela trois autres sommets du repère dans E_p , qui est alors défini par les trois variables x_1, x_2, x_3 .

Si $p = 3$: E_p contient les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 , E_2 a pour équations

$$X_1 = X_2 = x_4 = 0,$$

ce qui entraîne

$$b_i \equiv x_4 B_i,$$

où B_i est une forme linéaire en x_1, x_2, x_3, x_4 .

La variété T_p^r correspondante se décompose en un plan $x_4 = 0$ et une surface cubique d'équation

$$|a_i^1 \quad a_i^2 \quad B_i| = 0.$$

Cette décomposition est tout à fait normale puisque la B_3^3 que l'on projette se trouve elle-même décomposée en un plan E_2 et une V_2^1 .

Si $p = 4$: E_p contient les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ; E_2 a pour équations $X_1 = X_2 = x_4 = x_5 = 0$, ce qui entraîne

$$b_i = x_4 B_i^1 + x_5 B_i^2,$$

de sorte que T_p^r a pour équation

$$|a_i^1 \quad a_i^2 \quad x_4 B_i^1 + x_5 B_i^2| = 0.$$

Elle contient évidemment dans E_4 , l' $E_2 x_4 = x_5 = 0$.

(1) GAUTHIER, Thèse. Cf. le cas $r = 3$ signalé au début du paragraphe II.

C'est une T_4^3 particulière dans E_4 , rationnelle d'après le paragraphe I. d (raisonnement de la propriété 6), et représentée rationnellement sur l'espace ordinaire par des surfaces d'ordre 4 ayant en commun une courbe d'ordre 9 et de genre 9, accompagnée d'une trisécante.

Si $p = 5$: On obtient pour T_p^r particulière une variété d'ordre 4 projection de l'intersection de trois hyperquadriques de l'espace à sept dimensions passant par un même E_2 , faite à partir d'une droite commune. On voit comme plus haut que son équation peut prendre la forme

$$|a_1^4 \quad a_2^4 \quad x_1 B_1^4 + x_2 B_2^4 + x_3 B_3^4| = 0.$$

Elle contient l' $E_2 x_4 = x_5 = x_6 = 0$, elle est représentée rationnellement sur l'espace à quatre dimensions par des T_4^3 ayant une q_4^3 commune ainsi qu'une corde trisécante.

Enfin pour $p = 6$, on obtient la T_p^r générale de E_6 par projection d'une B_3^3 faite de l'une de ses droites. Elle contient certainement un E_2 .

Ce qui vient d'être dit pour $r = 3$ peut se répéter quand $r > 3$; le plan E_2 est remplacé par un E_{r-4} , la droite D par un E_{r-2} ; les valeurs de p à envisager sont celles qui vont de la décomposition $p = r$, au cas général de la T_p^r , $p = \frac{r(r+1)}{2}$ qui devient rationnelle à coup sûr. La variété T_p^r particulière obtenue pour ces valeurs de p contient un E_{r-4} ; elle est rationnelle et son équation peut se mettre sous la forme (6).

$$|a_1^r \quad a_2^r \quad \dots \quad a_i^r \quad b_i| = 0,$$

où les r quadriques $b_i = 0$ ont un E_{r-4} commun.

REMARQUES. — I. Les valeurs de p inférieures à r n'ont pas d'intérêt ici, car la présence de l' E_{r-2} sur les r quadriques ayant un E_{r-4} commun entraînerait une nouvelle décomposition de l'intersection résiduelle.

II. Les deux espaces E_{r-4} et E_{r-2} sont supposés quelconques. Sans entrer dans le détail des conséquences relatives à chaque cas particulier, je veux pourtant signaler le cas où E_{r-2} est tout entier dans E_{r-4} . En prenant $r-1$ sommets du repère dans E_{r-2} , le suivant dans E_{r-4} , la projection s'obtient immédiatement sous la forme

$$|a_1^r \quad a_2^r \dots a_{r-1}^r \quad a_r^r X_r + b_r| = 0.$$

C'est dans E_p , défini par les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_p, X_r$ une variété T_p^r d'ordre $r+1$, admettant évidemment le point $(x_1 = x_2, \dots, = x_p = 0, X_r = 1)$ comme point multiple d'ordre r . Elle est bien rationnelle.

Cette remarque vaut quel que soit p , sous réserve de l'existence des deux espaces E_{r-4} et E_{r-2} . Nous l'appliquerons au paragraphe III b.

c. Nous avons eu à considérer dans le paragraphe b et dès le paragraphe I, d (propriété 5) r quadriques ayant en commun deux espaces linéaires, un E_{r-4} et un E_{r-2} . Examinons maintenant r quadriques passant par un E_{r-4} et un E_2 quelconques, le résultat nous est utile pour la suite.

E_{r-1} et E_s déterminent un E_{r+s} dans lequel nous nous plaçons d'abord. Les coordonnées dans E_{r-1} sont $X_1, X_2, \dots, X_r$; dans E_s $x_1, x_2, \dots, x_{s+1}$; les r quadriques ont pour équation

$$\alpha_i^{kj} X_k x_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s+1; i = 1, 2, \dots, r)$$

dans E_{r+s} . Si le point $N(X_k = 0, x_j)$ de E_{s+1} est trace d'un E_r passant par E_{r-1} et rencontrant l'intersection, ses coordonnées doivent annuler le déterminant à r lignes et r colonnes

$$|\alpha_i^{kj} \quad x_j| = 0,$$

et cette intersection est une droite. Donc r quadriques de E_{r+s} qui ont en commun un E_{r-1} et un E_s se rencontrent en outre suivant une variété réglée dont la projection faite de E_{r-1} sur E_s est une V_{s-1}^r .

Lorsque $s = r-1$ E_s et E_{r-1} jouent des rôles symétriques. C'est le cas de deux quadriques de l'espace ayant deux droites communes non coplanaires, de trois quadriques de E_3 ayant deux plans E_2 communs, la variété réglée rencontre alors chacun des E_2 suivant une cubique. Plus généralement considérons r hyperquadriques de E_n ayant deux E_{r-1} communs; la projection sur un E_p , faite du premier E_{r-1} , des droites de B_n^r qui le rencontrent, est une variété q_p^r (paragraphe I) coupée par la projection du deuxième E_{r-1} suivant une variété V_{r-2}^r .

Quand $s = r-2$ la projection faite de E_{r-1} sur E_{r-2} est une V_{r-3}^r , d'après ce qui précède pour s quelconque. Considérons alors r quadriques de E_n qui ont en commun un E_{r-1} et un E_{r-2} ; la projection sur un E_p , faite de E_{r-1} , des droites de B_n^r qui rencontrent E_{r-1} , est une variété q_p^r , coupée par la projection de E_{r-2} suivant une variété V_{r-3}^r . On justifie le résultat énoncé à propos de la représentation d'une T_p^r rationnelle. La variété réglée commune aux r quadriques rencontre E_{r-1} suivant le lieu des points qui annulent la matrice à r lignes et $r-1$ colonnes

$$|\alpha_i^{kj} \quad X_k| = 0,$$

c'est-à-dire une L_{r-1}^r .

REMARQUE. — Il est facile de voir géométriquement que la variété commune à r hyperquadriques de E_{r+s} qui passent par E_{r-1} et E_s est réglée. Par un point M de cette variété on peut en effet tracer une droite qui s'appuie sur E_{s-1} et E_r ; elle rencontre alors chacune des quadriques en trois points et par suite leur appartient.

A chaque droite de cette variété correspond un point sur la variété de Segre ⁽¹⁾ définie par E_{r-1} et E_s ; et les équations $\alpha_i^{kj} X_k x_j = 0$ montrent que l'intersection des r hyperquadriques a pour image la section de la variété de Segre par r hyperplans. Cette image n'est pas forcément rationnelle.

Nous possédons actuellement les notions nécessaires à l'étude des transformations du paragraphe III.

⁽¹⁾ SEGRE, *Coppie die punti di due piani o spazi* (Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, 5, 1892).

III. — TRANSFORMATIONS RATIONNELLES ET BIRATIONNELLES (1).

a. Les transformations birationnelles v . — Deux représentations rationnelles connues, sur un E_p , de l'intersection de r quadriques de E_n ($n = p + r$), définissent une transformation birationnelle dans E_p . Soient en effet deux E_{r-1} , P et Q , pris dans E_n sur B'_n ; le point m de E_p a pour homologue dans E_p le point m' obtenu en projetant de Q le point M de B'_n situé dans l' E_r défini par P et m . Quand m décrit un E_{p-1} , M varie sur la section par un hyperplan E_{n-1} , contenant P , dont la projection faite de Q est, d'après le paragraphe I, une variété T^r_p . Cette variété passe constamment par la q^r_p relative à Q ainsi que par la projection de P ; celle-ci est un E_{r-1} s'appuyant sur q^r_p en tous les points d'une V^r_{r-2} (paragraphe II, c). On en déduit :

Les variétés T^r_p , de dimension $p - 1$ et d'ordre $r + 1$, passant dans E_p par une variété q^r_p et par l' E_{r-1} (π) d'une variété V^r_{r-2} située sur elle, définissent le réseau homaloïdal d'une transformation birationnelle t_r .

Exemple : $r = 2$. — Transformations t_2 étudiées au Chapitre I.

$r = 3$. — La transformation t_3 est définie par des variétés T^3_p , à $p - 1$ dimensions et du quatrième ordre, passant par une q^3_p , à $p - 2$ dimensions et du neuvième ordre, ainsi que par le plan π d'une cubique plane située sur elle.

Pour $r = 2$, le cas du plan ($p = 2$) était particulier puisque t_3 dégénérait en une transformation quadratique. J'étudie de même en premier lieu le cas $p = r$.

Cas $p = r$, ou $n = 2r$. L'hyperplan E_{2r-1} défini par P et Q , d'équation $u = 0$, coupe E_p suivant un E_{r-1} . Les quadriques dans E_{2r} ont pour équation

$$a_1^i X_1 + a_2^i X_2 + \dots + a_r^i X_r + u B_i = 0$$

de sorte que la q^r_p relative à P se décompose en

$$u = 0 \quad |a_1^i \quad a_2^i \quad \dots \quad a_r^i| = 0$$

qui est une V^r_{r-2} et

$$|a_1^i \quad a_2^i \quad \dots \quad a_r^i \quad B_i| = 0$$

qui est une L^{r+1}_r , c'est-à-dire une variété à $r - 2$ dimensions d'ordre $\frac{r(r+1)}{2}$.

Aux E_{r-1} correspondent les sections hyperplanes passant par P , puis leurs projections faites de Q , qui sont des variétés d'ordre r à base L^{r+1}_r , c'est-à-dire des variétés V^r_{r-1} . Cette transformation est classique dans E_r ; elle constitue la transformation définie par r réciprociétés. Donc, dans la famille des transformations t_r pour les différentes valeurs de p , le cas $p = r$ correspond à la transformation définie par r réciprociétés.

(1) J'ai présenté le cas $r = 3$ dans une Note aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (juin 1945, t. 220, p. 724-726).

Transformation quadratique plane pour $r = 2$, transformation d'indices (3,3) définie dans l'espace par un système linéaire de surfaces cubiques à base sextique de genre 3, pour $r = 3$ ⁽¹⁾.

Cas $p > r$. — L'hyperplan défini par P et Q a pour trace dans E_p un $E_{r-1}(\pi)$ s'appuyant sur chacune des variétés q_p^r relatives à P et à Q suivant une variété V_{r-2}^r .

Le système homaloïdal est, rappelons-le, formé par les variétés T_p^r qui passent par la q_p^r relative à Q ainsi que par l' $E_{r-1}(\pi)$. Deux points homologues, m et m' , sont dans un même E_r passant par π , trace de l'hyperplan PQM.

La transformation t_r laisse donc invariant chaque E_r passant par π , et son empreinte dans E_r est la forme particulière prise par t_r pour $p = r$, la base du système homaloïdal de l'empreinte étant constituée par la section L_{r+1}^{r+1} , en dehors de la V_{r-2}^r contenue dans π , de q_p^r par E_r .

La transformation inverse est de même nature; (π) reste le même et la q_p^r relative à P remplace la q_p^r relative à Q; la transformation est symétrique. Cherchons ses indices.

A une droite correspond dans E_n l'intersection de r quadriques de E_{r+1} ayant l' $E_{r-1}P$ en commun, c'est-à-dire (paragraphe II a) une courbe rationnelle normale d'ordre $r + 1$ d'un E_{r+1} . Il en est de même en projection dans E_p .

A un E_2 correspond dans E_n l'intersection de r quadriques de E_{r+2} qui ont l' $E_{r-1}P$ en commun, c'est-à-dire (paragraphe II a) une surface rationnelle d'ordre $\frac{2+r+r^2}{2}$.

Plus généralement à un E_k correspond dans E_n l'intersection de r quadriques de E_{r+k} qui ont l' $E_{r-1}P$ en commun, c'est-à-dire (paragraphe II a) une variété à k dimensions d'ordre $1 + C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^k$.

Lorsque $k > r$ l'homologue est une B_{r+k}^r d'ordre 2^r qui devient la B_n^r générale quand $r + k \geq l$.

Ainsi, en appelant S_k la somme des $k + 1$ premiers coefficients du développement de $(1 + x)^r$

$$1, C_r^1, C_r^2, \dots, C_r^k, \dots, C_r^{r-1}, C_r^r,$$

la transformation t_r a pour indices

$$(S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_r, 2^r, 2^r, \dots, S_r, \dots, S_k, \dots, S_2, \dots, S_1).$$

Les indices de la transformation inverse sont formés de la même suite ⁽²⁾.

Nous avons constaté pour $p = r$ l'identité de la transformation t_r avec la transformation classique définie par r réciprociétés dans E_r ; nous avons remarqué aussi (Chap. I, § II-d, en note) que dans le cas $p = 3$, $r = 3$ la transformation t_2 constitue un cas particulier de la transformation de l'espace définie par trois réciprociétés. Établissons que ce fait est général dans E_p :

La transformation t_r dans E_p n'est qu'un cas particulier de la transformation birationnelle définie par p réciprociétés.

⁽¹⁾ Étudiée par L. GODEAUX, *Cours de géométrie supérieure*.

⁽²⁾ La transformation est symétrique.

Procédons analytiquement. L' E_{p-r} P dans E_p est défini par les coordonnées $X_1, X_2, \dots, X_r$, et l' E_{p-r} Q par les coordonnées $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$. Le repère de coordonnées se trouve complété par $x_1, x_2, \dots, x_{p+1-r}$ dans un E_{p-r} . Nous allons considérer la transformation birationnelle suivante : au point m de l' E_p défini par E_{p-r} et Q nous faisons correspondre le point M d'une B_p^r passant par P et Q situé dans l' $E_r(Pm)$, puis sa projection m' faite de Q sur un deuxième E_p défini par E_{p-r} et P. La transformation birationnelle ainsi obtenue est à des homographies près une transformation t_r dont nous allons chercher les équations. Celles des quadriques sont r équations de la forme.

$$(9) \quad \lambda_k^i X_i Y_j + a_k^i X_i + b_k^j Y_j + c_k = 0,$$

i, j, k prenant les valeurs $1, 2, \dots, r$, où les λ sont des constantes, a_k^i et b_k^j des formes linéaires en $x_1, x_2, \dots, x_{p+1-r}$, et c_k une forme quadratique des mêmes variables. La correspondance entre le point $m (y_1, y_2, \dots, y_{p-r}, y_{p+1-r} = 1, Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$ et le point $m' (x_1, x_2, \dots, x_{p-r}, x_{p+1-r} = 1, X_1, X_2, \dots, X_r)$ s'obtient en ajoutant aux r équations (9) les $p-r$ équations

$$(10) \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_{p-r} = x_{p-r}.$$

Les équations (10) sont linéaires, les équations (9) peuvent être rendues bilinéaires par rapport aux deux groupes de variables

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_{p-r}, \quad X_1, X_2, \dots, X_r, \\ y_1, y_2, \dots, y_{p-r}, \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_r. \end{aligned}$$

Il suffit en effet de remplacer $a_k^i(x)$ par $a_k^i(y)$ d'après (10) et $c_k = x_k^i x_i y_j$ par

$$c_k = x_k^i x_i y_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, p+1-r).$$

Les équations (9) et (10) deviennent ainsi bilinéaires par rapport aux coordonnées absolues de m et m' . Elles définissent p réciprocités. Le théorème est démontré.

Les transformations t_r rentrent donc dans un type plus général. Elles n'en jouent pas moins un rôle intéressant qui leur est propre, elles dépendent des deux entiers r et p ; elles sont du même ordre $r+1$, quel que soit p , pour une valeur donnée de r , tandis que pour le cas général de p réciprocités dans E_p la transformation est d'ordre $p+1$.

b. Quelques applications des transformations t_r . — 1° Dans la transformation t_r de E_p , une variété T_p^r passant par la q_p^r relative à P correspond sur la B_p^r à une section hyperplane quelconque; elle a donc pour homologue dans la projection faite de Q une variété T_p^r passant par la variété q_p^r relative à Q. Nous exprimons cette propriété sous la forme suivante :

Une transformation t_r permet de transformer dans E_p un système linéaire de variétés T_p^r ayant une variété q_p^r commune en un système linéaire de même nature algébrique, c'est-à-dire formé par de nouvelles variétés T_p^r ayant une nouvelle q_p^r commune.

2° Comptons les paramètres des transformations t_r obtenues de cette façon, quand on se donne le premier système linéaire. Leur nombre est celui des paramètres d'un E_{r-1} variable sur une B_n^r , ou

$$r \left[p - \frac{r(r+1)}{2} + 1 \right].$$

Le produit de t_r par une homographie h dépend donc de

$$\boxed{X = r \left[p - \frac{r(r+1)}{2} + 1 \right] + p(p+2)} \quad \text{paramètres.}$$

Ainsi, la famille ht_r de transformations birationnelles à X paramètres, dans E_p , n'altère pas la nature algébrique d'un réseau donné de variétés T_p^r à base q_p^r .

On peut en déduire indirectement le nombre des paramètres de la base q_p^r , par une marche analogue à celle du chapitre I (§ II, c). Le choix des surfaces base du réseau équivaut à une projectivité pour la B_n^r , le nombre L des paramètres de q_p^r est donc lié au nombre M des invariants projectifs de B_n^r . D'une façon plus précise on a

$$L = M + X.$$

Calculons M . Une quadrique dans E_n ($n = p + r$) dépend de $\frac{1}{2}(p+r)(p+r+3)$ paramètres, desquels il faut retrancher les $r-1$ paramètres qui la définissent dans le réseau à base B_n^r . Celle-ci a donc

$$\frac{r}{2}(p+r)(p+r+3) - r(r-1)$$

paramètres. Comme il en faut $(p+r)(p+r+2)$ pour l'homographie dans E_n , il vient en définitive

$$M = r \left[\frac{(p+r)(p+r+3)}{2} - r + 1 \right] - (p+r)(p+r+2).$$

En ajoutant la valeur de X trouvée plus haut, on obtient après développement

$$\boxed{L = \frac{p^2 r}{2} + pr \left(r + \frac{1}{2} \right) - r^2.}$$

On peut d'autre part comme vérification, calculer L directement, d'après l'équation (4) de q_p^r (cf. Chap. I, § II-b). Les éléments qui figurent dans cette équation sont :

r quadriques b_i avec $\frac{r}{2}(p+1)(p+2)$ paramètres, $(r)^2$ hyperplans a_i^r avec $(r)^2(p+1)$ paramètres, en tout $\frac{r}{2}(p+1)(p+2) + (r)^2(p+1) - 1$ paramètres non homogènes. Il faut en retrancher le nombre des paramètres des combinaisons par colonnes; la dernière peut être remplacée par

$$\lambda b_i + B_k a_i^k,$$

B_k étant une forme linéaire, λ une constante; la première par $\lambda_j a_i^j$, les λ_j étant constants. Cela fait donc pour la dernière colonne

$$r(p+1)+1$$

et pour les r premières : $(r)^2$, en tout $(r)^2 + r(p+1) + 1 - 1$ paramètres non homogènes. On trouve de même pour les combinaisons par lignes

$$r^2 - 1 \text{ paramètres.}$$

Donc

$$L = \frac{r}{2}(p+1)(p+2) + (r)^2(p+1) - 1 - (r)^2 - r(p+1) - (r)^2 + 1.$$

$$L = \frac{p^2 r}{2} + p \left(r^2 + \frac{r}{2} \right) - r^2.$$

C'est bien la valeur trouvée précédemment Elle donne pour

$$r = 2, \quad L = p^2 + 5p - 4 \quad (\text{chap. I, § II}),$$

$$p = 2, \quad L = r(r+3).$$

ou nombre des paramètres des $\frac{1}{2} r(r+3)$ points d'un plan qui forment une q_2^r plane

$$p = 3, \quad L = 2r(r+3).$$

nombre des paramètres d'une courbe q_3^r d'ordre $\frac{r(r+3)}{2}$ de l'espace.⁽¹⁾

3° On peut par une transformation t_r de l'espace E_n transformer une B_n de cet espace en un E_{n-r} ($n \geq l$).

Employons une méthode suggérée par le chapitre I (§ II).

Nous pouvons, puisque $n \geq l$, prendre les équations de la B_n^r sous la forme (1)

$$(1) \quad a_1^l X_1 + a_2^l X_2 + \dots + b_l = 0.$$

r variables auxiliaires $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ définissent un E_{n+r} . Prenons pour B_{n+r}^r la variété

$$a_1^l X_1 + a_2^l X_2 + \dots + a_l^l Z_l + \dots + a_r^l X_r + b_l = 0,$$

obtenue en remplaçant X_i par Z_i dans la $i^{\text{ème}}$ équation (1). Cette B_{n+r}^r contient les deux E_{r-1} .

$$P(x_k = 0, X_i = 0) \quad (k = 1, 2, \dots, p+1, i = 1, 2, \dots, r)$$

et

$$Q(x_k = 0, X_i = Z_i) \quad (k = 1, 2, \dots, p+1, i = 1, 2, \dots, r).$$

La transformation t_r définie dans E_n au moyen des éléments B_{n+r}^r , P et Q , de E_{n+r} a pour équations (on s'en rendra facilement compte)

$$Y_k = x_k, \quad Y_l = \frac{a_1^l X_1 + a_2^l X_2 + \dots + a_r^l X_r + b_l}{a_l^l}.$$

(1) C'est ici l'ordre de la courbe multiplié par $\frac{1}{2}$ (Cf. ENRIQUES, *Courbes algébriques*, p. 521).

Elle transforme évidemment la B'_n en l' E_{n-r} $Y_1 = Y_2 = \dots Y_r = 0$ dans E_n , et cette transformation fait partie de la famille t_r (1).

Plus généralement :

On peut par une transformation t_r de l'espace E_n transformer une B'_n en une intersection B_{n-m}^{r-m} de $r-m$ quadriques d'un espace à $n-m$ dimensions ($n \geq l$).

Il suffit en effet, pour transformer par exemple la B'_n en une B_{n+2-r}^2 ou intersection de deux quadriques d'un espace à $n+2-r$ dimensions, d'effectuer la transformation birationnelle d'équations

$$\begin{aligned} y_k &= x_k & (k=1, 2, \dots, p+1), \\ Y_i &= a_i^1 X_1 + \dots + a_i^r X_r + b_i & (i=1, 2, \dots, r-2), \\ a_{r-1}^1 Y_1 + a_{r-1}^2 Y_2 + \dots + a_{r-1}^r Y_r + b_{r-1} &= a_{r-1}^1 X_1 + \dots + a_{r-1}^r X_r + b_{r-1}, \\ a_r^1 Y_1 + a_r^2 Y_2 + \dots + a_r^r Y_r + b_r &= a_r^1 X_1 + \dots + a_r^r X_r + b_r. \end{aligned}$$

L'homologue de B'_n est

$$\begin{aligned} Y_i &= 0 & (i=1, 2, \dots, r-2) \\ a_{r-1}^{r-1} Y_{r-1} + a_{r-1}^r Y_r + b_{r-1} &= 0, & a_r^{r-1} Y_{r-1} + a_r^r Y_r + b_r = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une B_{n+2-r}^2 . La transformation employée peut s'interpréter comme une transformation t_r , celle qui est définie dans E_{n+r} par la B_{n+r}^r

$$\begin{aligned} a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + \dots + a_i^l Z_l + \dots + a_i^r X_r + b_i &= 0 & (i=1, 2, \dots, r-2), \\ a_{r-1}^1 Z_1 + a_{r-1}^2 Z_2 + \dots + a_{r-1}^r Z_r &= 0, \\ a_r^1 Z_1 + a_r^2 Z_2 + \dots + a_r^r Z_r &= 0, \end{aligned}$$

et les deux E_{r-1} P et Q qui lui appartiennent, déjà employés un peu plus haut

$$\begin{aligned} P & (x_k = 0, & X_l &= 0), \\ Q & (x_k = 0, & X_l - Z_l &= 0). \end{aligned}$$

Le théorème général donne en particulier, pour $m=r-1$, le moyen de transformer directement une B'_n en une quadrique Q_{n-r+1} par une transformation de Cremona t_r .

4° On peut par une transformation birationnelle t_r transformer une variété T_p^r en une T_p^r a point r -uple ($p \geq \frac{r(r+1)}{2}$).

Il suffit pour le justifier d'appliquer le résultat de la remarque de la fin du paragraphe II b.

Cela démontre à nouveau la rationalité d'une T_p^r pour $p \geq \frac{r(r+1)}{2}$.

c. Les transformations simplement rationnelles t_r . — 1° Problème. — Transformer r quadriques d'un espace E_p en variétés doubles d'ordre $r+1$, au moyen d'une transformation simplement rationnelle de E_p .

(1) Elle en est un cas particulier car les deux E_{r-1} P et Q de B_{n+r}^r sont situés dans un même E_{2r-1} , $x_k = 0$, qui appartient à B_{n+r}^r .

Il s'agit de remplacer les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ d'un point de E_p par des polynômes homogènes en $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ de façon que les r formes quadratiques $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$ deviennent identiques aux carrés de polynômes homogènes $f_1(u), f_2(u), \dots, f_r(u)$. Associons aux quadriques $\varphi_i = 0$ la B_n^r ($n = p + r$) de l'espace $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, X_1, X_2, \dots, X_r$ qui a pour équations

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) - (X_1)^2 &= 0, \\ \varphi_2(x) - (X_2)^2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \varphi_r(x) - (X_r)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Il est clair que sa représentation rationnelle fournit une solution τ_r par les expressions de $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ tandis que celles de $X_1, X_2, \dots, X_r$ donnent les polynômes $f_1, f_2, \dots, f_r$.

D'après la forme de ces expressions, étudiées au paragraphe I, la transformation τ_r fait correspondre aux hyperplans E_{p-1} de l'espace E_p un réseau de dimension p de variétés T_p^r ayant une variété q_p^r commune, et les r quadriques $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ deviennent chacune une T_p^r de ce réseau, comptée double.

Interprétons τ_r géométriquement. Soit Q l' E_{r-1} de la B_n^r , qui sert à faire sa représentation paramétrique et P l' E_{r-1} de E_n d'équations $x_1 = x_2 = \dots = x_{p+1} = 0$. Au point $m(x_k)$ correspondant 2^r points de la B_n^r , à l'intersection avec l' E_r défini par P et m , puis par projection faite de Q 2^r points m' .

Pour que la représentation rationnelle de la B_n^r soit possible il suffit que $p \geq \frac{r(r+1)}{2} - 1$. Donc :

r quadriques quelconques d'un espace à $\frac{r(r+1)}{2} - 1$ dimensions au moins peuvent être transformées en variétés $V_{p-1}^{r+1} = T_p^r$ doubles par une transformation τ_r d'ordre $r + 1$, simplement rationnelle $(1, 2^r)$ ⁽¹⁾.

Un point quelconque de la quadrique $\varphi_1 = 0$ donne sur la B_n^r 2^r points deux à deux confondus avec chacun des 2^{r-1} points qui sont définis par

$$X_1 = 0, \quad \varphi_2 - (X_2)^2 = 0, \dots, \varphi_r - (X_r)^2 = 0,$$

puis par projection faite de Q , 2^{r-1} points dont chacun représente deux points confondus. La B_p^r $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_r = 0$ est invariante de façon que chacun de ses points représente 2^r points m' confondus.

Remarquons que les transformations birationnelles t_r du paragraphe α sont des transformations simplement rationnelles τ_r particulières qui correspondent au cas où l' E_{r-1} P qui sert dans sa définition appartient à la B_n^r .

2° Points unis d'une transformation τ_r . — La Jacobienne de la transformation τ_r ou lieu de ses points $m'(u)$ coïncidant avec deux points confondus homologues d'un point $m(x)$, est définie par le déterminant Jacobien

$$\frac{D(x)}{D(u)} = \delta.$$

⁽¹⁾ Résultat énoncé dans la Note aux *Comptes rendus* déjà citée (juin 1945).

C'est dans E_p une variété V_{p-1} d'ordre $(p+1)(m-1)$ pour une transformation τ d'ordre m . Les transformées des quadriques $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ sont en général des surfaces d'ordre $2m$; puisqu'elles sont doubles dans la transformation τ , chacune d'elles compte pour l'ordre m dans le degré de la Jacobienne. On doit donc avoir

$$(11) \quad (p+1)(m-1) \geq rm,$$

et de cette inégalité simple résulte certaines conséquences sur l'existence même des transformations τ , équivalente à la représentation unicursale de la B_n^r , propre ou impropre.

Le cas $r=2$ a été traité au chapitre I (§ III). Pour r quelconque (11) s'écrit

$$p+1 \geq \frac{rm}{m-1},$$

ou

$$p \geq r-1 + \frac{r}{m-1},$$

ou

$$n \geq 2r-1 + \frac{r}{m-1},$$

une condition nécessaire est donc, puisqu'il s'agit d'entiers

$$n \geq 2r,$$

alors que la condition suffisante de rationalité, rappelée au début de ce chapitre est

$$n \geq l = \frac{r(r+3)}{2} - 1.$$

Il n'y a égalité entre ces deux limites que pour $r=2$. Le cas $r=3$ donne par exemple les distinctions suivantes provenant des limites précédentes $2r=6$ et $l=8$.

$n < 6$. — L'intersection de trois hyperquadriques est certainement irrationnelle en général, et non susceptible d'une représentation unicursale, même impropre. Cas de l'intersection de trois hyperquadriques de E_4 qui représente la courbe canonique de genre 5; cas de l'intersection V_2^3 de 3 quadriques de E_5 .

$n=6$ ou $n=7$. — Il n'est pas impossible que l'intersection B_6^3 ou B_7^3 de trois hyperquadriques d'un espace à 6 ou à 7 dimensions soit susceptible d'une représentation unicursale. La question de leur rationalité n'est pas résolue.

$n \geq 8$. — La rationalité est assurée.

D'une façon générale, les limites l et $2r$, pour r quelconque, entraînent la classification suivante dans l'échelle des dimensions de l'espace.

Dans l'intervalle $n < 2r$ il n'y a pas en général de représentation unicursale possible, même impropre.

Dans l'intervalle $2r \leq n < \frac{r(r+3)}{2} - 1$ la question n'est pas résolue.

Dans l'intervalle $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$ la rationalité est assurée.

CHAPITRE III.

Générations descriptives des cyclides de l'espace E_n . Applications.

La rationalité constitue un caractère important, commun aux hyperbiquadratiques B_n ($n \geq 4$) et aux hypercyclides C_p et T_p ($p \geq 3$) ⁽¹⁾. Il n'est malgré tout qu'un des aspects de la géométrie sur ces variétés; il classe à part les biquadratiques de l'espace ordinaire et les cycliques planes. L'étude géométrique qui nous occupe maintenant ne fait plus cette distinction systématique. Le point de départ a quelques rapports avec un travail de Segre [*Surfaces du quatrième ordre à conique double* (*Math. Annalen*, t. 24, 1884)] qui considère la projection de l'intersection de deux cônes du second ordre d'un espace à quatre dimensions, mais les conséquences que nous en tirons sont différentes; elles préparent les applications du paragraphe III, qui sont nouvelles, à ma connaissance. Le paragraphe I est consacré aux cyclides du 4^e ordre C_n ; le paragraphe II traite plus spécialement des cyclides cubiques T_n .

I. — GÉNÉRATIONS DESCRIPTIVES D'UNE CYCLIDE C_n .

1. Génération descriptive. — On sait que toute cyclide C_n du 4^e ordre, dans l'espace à n dimensions, peut être considérée comme la projection faite d'un point o extérieur, de l'intersection B_{n+1} , de deux quadriques Q_{n+1} de l'espace à $n+1$ dimensions. En général existent $n+2$ cônes distincts dans le faisceau de ces deux quadriques; soient $S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$ leurs sommets. Portons notre attention sur deux d'entre eux (1 et 2), ayant pour bases Q_n^1 et Q_n^2 ; la droite qui joint leurs sommets a pour trace $i_{12} = i$, et les projections de S_1, S_2 sont s_1, s_2 alignés avec i . En projetant la section par un E_2 variable pivotant autour de $S_1 S_2$, on obtient la génération suivante de C_n , que nous appellerons *descriptive* (quand $n=2$ c'est l'épure d'intersection de 2 cônes du second ordre). *Dans le triangle m, m_1, m_2 , dont les sommets m_1, m_2 décrivent 2 quadriques Q_n^1, Q_n^2 et dont les côtés passent par 3 points fixes alignés, le sommet m décrit une cyclide C_n , et les plans tangents E_{n-1} aux 3 surfaces en ces points concourent suivant un E_{n-2} (fig. 4, pour $n=2$).*

C_n passe par la $B_n(\alpha)$ commune aux 2 quadriques ⁽²⁾, le long de laquelle la construction précédente du plan tangent est en défaut, on y supplée facilement par une section auxiliaire, celle d'un E_{n-1} mené par i .

Quand le point m_1 coïncide avec un point de contact d'une tangente à Q_n^1 issue de s_1 , la construction graphique donne 2 points de C_n sur $s_1 m_1$, pour lequel le plan tangent à C_n est celui de Q_n^1 en m_1 . Donc :

Le cône circonscrit à Q_n^1 de sommet s_1 est doublement circonscrit à C_n .

⁽¹⁾ La représentation rationnelle d'une cyclide C_p se fait dans E_{p+1} par $p+1$ cyclides cubiques T_{p-1} ayant une quintique q_{p-1} commune (LESIEUR, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, 1945).

⁽²⁾ 4 points a, b, c, d pour $n=2$.

Il s'agit d'un cône de Kummer ⁽¹⁾ pour C_n . La courbe de contact est une B_n projection de la section de B_{n+1} par le plan de contour apparent du cône S_1 .

Quand m_2 vient au point de contact d'une tangente à Q_n^2 passant par i , la droite $s_1 m_1$ est tangente à C_n au point m correspondant. m_1 décrit alors la $B_n(\alpha_1)$ découpée sur Q_n^1 par le cône circonscrit à Q_n^2 de sommet i ; le lieu de m est une $B_n(\alpha_1)$ déduite de (α_1) par l'homologie de centre s_1 , dont le plan double est l' E_{n-1} polaire de i par rapport à Q_n^2 , et tel que l'homologue de i soit s_2 . (α_1) est

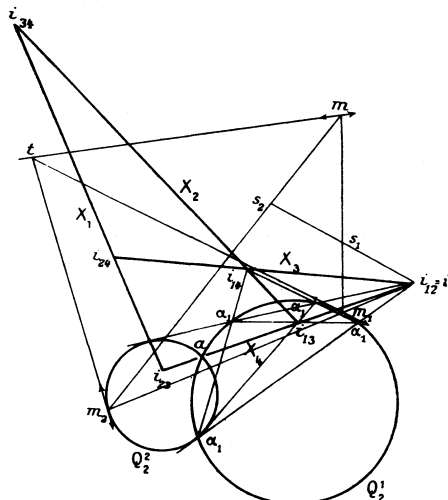


Fig. 4.

située sur le cône du second ordre de sommet s_2 , qui a pour base la Q_{n-1} section de Q_n^2 par ce plan double. Ainsi :

Le cône de sommet s_1 et de base (α_1) est circonscrit à C_n le long de (α_1) , et l'un des cônes du faisceau (α_1) a pour sommet s_2 .

Le cône circonscrit à C_n de sommet s_1 se décompose en définitive suivant un cône du second ordre (double) et un cône du 4^e ordre de directrice $B_n(\alpha_1)$ et dont toute section plane est par suite une C_{n-1} . On en déduit, par récurrence, qu'il existe $4n$ plans tangents E_{n-1} à une cyclide C_n menés par un E_{n-2} quelconque.

2. Les générations descriptives d'un équipage. — Il y a lieu d'adjoindre à la précédente les générations provenant de tous les cônes du faisceau B_{n+1} , pris deux à deux. Il y en a donc $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, dont nous allons construire graphique-

⁽¹⁾ SEGRE, *Mat. Ann.*, 1884, p. 326.

ment les éléments dans E_n à partir de $s_1 s_2 i_{12}$, Q_n^1 , Q_n^2 ⁽¹⁾ (la figure 4 permet de suivre les constructions pour $n = 2$).

Points s_k . — Dans la génération $(1, 2)$ les $B_n(\alpha_1)$ et (α_1) sont propres au cône S_1 . Elles restent les mêmes pour les générations $(1, k)$ $k = 3, \dots, n+2$. On en déduit, s_2 étant sommet d'un cône du faisceau (α_1) , que les points s_k sont les sommets des autres cônes du faisceau ⁽²⁾.

Quadriques Q_n^k . — De même que Q_n^2 est inscrite dans le cône de sommet i_{12} du faisceau (α_1) les Q_n^k sont des quadriques passant par (α) inscrites dans les autres cônes du faisceau (α_1) dont les sommets fournissent les i_{1k} . Les Q_{n-1} de contact sont toutes dans le plan polaire X_1 de i_{12} par rapport à Q_n^2 (trace de l'hyperplan $S_2, S_3, \dots, S_{n+2}$).

Points i_{rs} . — Nous venons de déterminer les i_{1k} ; ils forment avec i_{12} un repère conjugué commun au faisceau (α_1) dont les arêtes sont coupées par X_1 aux points i_{rs} manquants.

La configuration de tous ces points i_{rs} est celle d'une section par un E_n , des arêtes du repère $S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$. Elle est à l'intersection de $n+2$ hyperplans X de E_n . Elle jouit des propriétés suivantes (fig. 5, pour $n = 2$) : tous les points

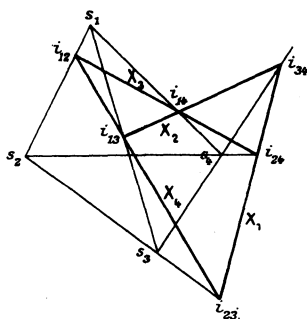


Fig. 5.

n'ayant pas l'indice j sont dans un $E_{n-1} X_j$; plus généralement tous les points n'ayant pas p indices sont dans un E_{n-p} , par exemple ceux qui sont formés par 3 indices sont en ligne droite (comme i_{12}, i_{23}, i_{31}). Enfin X_j est le plan double d'une homologie de pôle s_j dont les s_r ($r \neq j$) ont pour homologues les i_{jr} .

Les points i_{rs} , les quadriques Q_n , et les points s forment les éléments d'un équipage de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ générations descriptives d'une C_n , parfaitement déterminées par une seule d'entre elles. Appelons base de l'équipage l'ensemble

⁽¹⁾ De même un mode de génération anallagmatique d'une cyclique étant donné permet la construction des trois autres.

⁽²⁾ Ils auraient pu tout aussi bien se déterminer à partir de (α_2) .

des points i et des quadriques Q_n , tandis que les points s constituent ses *sommets*. De cette étude résulte :

1° La base de l'équipage est déterminée par la base $i_{12} Q_n^1 Q_n^2$ d'une seule génération. Elle ne dépend pas de ses sommets ⁽¹⁾.

2° Tout i_{jr} admet X_j comme plan polaire par rapport à la quadrique Q_n^r . Ces $n+1$ i_{jr} se trouvent donc, quand on fixe j , sur le lieu des pôles de X_j par rapport aux quadriques du faisceau dont les Q_n font toutes partie, c'est-à-dire sur une courbe rationnelle d'ordre n contenant les $n+1$ sommets du repère conjugué commun aux Q_n et les n sommets du repère conjugué aux sections par X_j (d'où 8 points sur une conique pour $n=2$, 11 points sur une cubique gauche pour $n=3$) ⁽²⁾.

3° Un i_{jr} et un $i_{j'r'}$ d'indices différents sont conjugués par rapport à toutes les quadriques du faisceau des Q_n , Q_n^r est conjuguée par rapport au repère formé par les i_{jr} (j fixe) et les arêtes de ce repère issues d'un sommet déterminé i_{js} sont conjuguées communes aux cônes de sommet i_{js} circonscrits à Q_n^r et Q_n^s , donc à tous les cônes circonscrits de même sommet aux quadriques du faisceau tangentiel qu'elles déterminent.

4° L'existence des Q_n^k ($n > 2$) prouve le théorème suivant : quand l'un des cônes du faisceau d'une $B_n(\alpha_1)$ située sur une quadrique Q_n^1 , est circonscrit à une quadrique Q_n^2 , il existe n quadriques Q_n^k du faisceau $Q_n^1 Q_n^2$ inscrites dans les autres cônes du faisceau (α_1); toutes leurs Q_{n-1} de contact sont dans le même $E_{n-1} X_1$. Pour $n=3$ (ou 2) ce théorème est corrélatif d'un théorème de Chasles sur les quadriques (ou coniques) homofocales.

5° Quand $n=2$ les 6 points i sont aux sommets d'un quadrilatère complet, et les 3 couples de sommets opposés sont formés de points conjugués dans le faisceau des 4 coniques Q . Or dans un quadrilatère, il suffit que deux des couples jouissent de cette propriété pour qu'il en soit de même du 3^e, ce qui entraîne l'existence d'une conique inscrite dans le quadrilatère en même temps que dans le triangle conjugué commun au faisceau Q ⁽³⁾. Nous verrons au paragraphe 8 une interprétation de cette conique et de la courbe rationnelle d'ordre n qui la généralise pour n quelconque.

3. Paramètres d'un équipage de générations. — Dans une cyclique existe un système unique de 4 générations anallagmatiques; au contraire les équipages de générations descriptives d'une C_n sont en nombre infini. Le précédent a été obtenu par la trace sur le plan E_n de la figure des $n+1$ cônes du faisceau B_{n+1} et de leur repère conjugué commun. Il suffit pour avoir les autres de prendre la projection de la section par un plan E_n quelconque. Ainsi : les *équipages de générations descriptives dépendent des $n+1$ paramètres d'un hyperplan E_n de l'espace E_{n+1}* . Ce qui varie quand on passe d'un équipage à l'autre c'est sa base. Les points i décrivent chacun l'une des droites qui joignent les points s_j et

(1) Cette propriété importante est le point de départ du paragraphe III.

(2) Nous verrons au paragraphe III-3, d'autres liens entre les éléments de la base d'un équipage.

(3) DUPONCO, *Géométrie moderne*, p. 60.

les quadriques Q_n^i restent inscrites dans le cône doublement circonscrit de sommet s_j . En se donnant $n+1$ points $i'_{j\mu}$ sur les droites qu'ils décrivent, les autres sont déterminés par l'homologie de centre s_j qui fait correspondre les $i'_{j\mu}$ aux $i_{j\mu}$; cette homologie détermine aussi les $Q_n^{i'}$ à partir des Q_n^i . Les $n+2$ homologies analogues de centres $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$ admettent le même E_{n-1} axial ⁽¹⁾, et deux quelconques d'entre elles ont pour couple commun celui des points i et i' situés sur la droite qui joint leurs centres. Chacune d'elles détermine donc les $n+1$ autres. D'où : *les $n+1$ paramètres d'un équipage de générations descriptives sont ceux d'une homologie de pôle fixe.* Toute quadrique $Q_n^{i'}$ provenant ainsi de Q_n^i est inscrite dans le cône de sommet s_j circonscrit à Q_n^i , et c'est là sa seule particularité. En effet, donnons-nous l'une d'elles : $Q_n^{i'}$; on peut la considérer comme projection de 2 quadriques Q_n du cône de sommet S_1 et de base $Q_n^{i'}$ ⁽²⁾; leurs hyperplans E_n donnent naissance à deux équipages de générations descriptives comprenant $Q_n^{i'}$. On détermine chacun d'eux par les deux homologies qui transforment Q_n^i en $Q_n^{i'}$, quand on prend comme centre le sommet s_j de leur cône circonscrit commun; les E_{n-1} axiaux de chaque homologie sont ceux des Q_{n-1} d'intersection des deux quadriques ⁽³⁾. Donc : *Les quadriques intervenant dans les générations descriptives de C_n sont celles qui sont inscrites dans les cônes de Kummer. A chacune d'elles correspondent $(n+1)(n+2)$ générations réparties dans 2 équipages.*

Les n paramètres des $Q_n^{i'}$ d'une même série sont ceux qui fixent une quadrique inscrite dans un cône. Nous allons voir que les n paramètres d'un équipage sont encore ceux qui fixent une quadrique Q_n passant par une Q_{n-1} donnée. Cette Q_{n-1} est double pour C_n . Nous nous proposons d'abord de la déterminer dans la génération descriptive pour revenir ensuite sur les $Q_n^{i'}$.

4. La Q_{n-1} double pour C_n . — Jusqu'à présent nous n'avons fait intervenir que les cônes du faisceau B_{n+1} . Soit (Q_{n+1}) la quadrique de ce faisceau qui passe par le point de vue O , la trace dans E_n de sa section par l'hyperplan tangent en O est la Q_{n-1} (σ) double pour C_n . Elle se réduit à 2 points pour $n=2$.

Les E_n polaires de O par rapport aux quadriques de faisceau B_{n+1} concourent suivant un E_{n-1} (Δ) situé dans le plan tangent en O à Q_{n+1} , il se projette par conséquent suivant l' E_{n-1} (δ) de (σ). Les deux plans polaires de O par rapport aux cônes S_1 et S_2 se coupent suivant Δ ; le premier est défini par S_1 et l' E_{n-1} polaire de s_1 par rapport à la quadrique de base Q_n^1 ; on connaît donc un E_{n-2} de (δ) par l'intersection (r) des deux E_{n-1} polaires ⁽⁴⁾ de s_1 et s_2 par rapport à Q_n^1 et Q_n^2 respectivement; l'emploi, dans E_n , d'une droite de section auxiliaire donne un autre point de (δ), qui se trouve ainsi déterminé ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ Les quadriques homologues Q_n^i et $Q_n^{i'}$ rencontrent donc cet E_{n-1} suivant la même Q_{n-1} .

⁽²⁾ Là justification analytique est immédiate.

⁽³⁾ Deux quadriques $Q_n : f + P^2 = 0$ et $f + Q^2 = 0$ inscrites dans la même quadrique $f = 0$ ont leur intersection décomposée suivant les sections Q_{n-1} par les deux plans $P \pm Q = 0$.

⁽⁴⁾ S'ils sont confondus ils constituent (δ), lui-même: On en a un exemple au paragraphe 6.

⁽⁵⁾ Cf. droite (δ) des points doubles apparents de l'intersection de 2 cônes du second ordre, pour $n=2$.

Reste à construire (σ) dans (δ) . Les faisceaux de Q_{n-1} découpés par les quadriques Q_{n+1} sur un E_{n-1} quelconque du plan (O, Δ) , se projettent suivant des faisceaux de Q_{n-1} situés dans (δ) et comprenant δ . L'un de ces faisceaux, découpé par (δ) lui-même, est défini par Q_n^1 et Q_n^2 ; un autre, provenant de Δ , est déterminé par les cônes circonscrits à Q_n^1 et Q_n^2 de sommets respectifs S_1 et S_2 . Donc σ est commune aux deux faisceaux découpés sur (δ) par les quadriques Q_n^1 et Q_n^2 , et par leurs cônes circonscrits de sommets respectifs s_1, s_2 ⁽¹⁾.

La quadrique du premier faisceau contenant (σ) n'est autre que la section A_n de (Q_{n+1}) par l' E_n de figure. La section par un E_n quelconque donne une quadrique se projetant suivant une quadrique A'_n , du faisceau de l'équipage correspondant, et qui passe par (σ) . Inversement une A'_n quelconque passant par (σ) est la projection d'une Q_n de (Q_{n+1}) dont l' E_n fournit un équipage. Ainsi :

Les $n+1$ paramètres d'un équipage sont encore ceux d'une quadrique A'_n passant par la Q_{n-1} double σ . A'_n recoupe C_n suivant la B_n commune aux quadriques $Q_n^{1/}$ de l'équipage correspondant ⁽²⁾.

Pour $n=2$ l'énoncé de la construction de σ devient : les deux points doubles sont communs aux deux involutions découpées sur (δ) par les coniques Q_2^1 et Q_2^2 , et par les deux couples de tangentes à ces coniques tracées par s_1, s_2 respectivement.

C'est ainsi que les particularités de la mise en place de l'épure d'une cyclique (anallagmatique) sont les suivantes :

1° Les polaires de $s_1 s_2$ par rapport à Q_2^1 et Q_2^2 se déduisent l'une de l'autre par l'homothétie de centre i qui transforme s_1 en s_2 (c'est la condition pour que la droite δ des points doubles soit à l'infini); 2° les deux coniques ont leurs axes parallèles et les couples de tangentes menées par $s_1 s_2$, qui sont tangentes doubles de la cyclique, ont leurs directions antiparallèles (condition pour que les deux involutions sur la droite de l'infini admettent les points cycliques comme points homologues ⁽³⁾).

5. Cas d'exception. Lien avec les générations anallagmatiques. — Il va sans dire que la façon d'obtenir les générations descriptives de C_n par des hyperplans E_n de E_{n+1} souffre des cas d'exception que nous allons préciser en les rattachant aux générations anallagmatiques d'une C_n ayant l'ombilicale comme Q_{n-1} double σ .

Les plans d'exception sont, avec le cas banal de ceux qui passent par O , les plans particuliers qui contiennent r des sommets $S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$.

Employons le langage des sphères. La perspective, faite de O , des points de la sphère (Q_{n+1}) , est une inversion. La section de (Q_{n+1}) par l' E_n , $(S_2, S_3, \dots, S_{n+2})$

⁽¹⁾ Voir au paragraphe 6 le cas particulier où ces deux faisceaux coïncident.

⁽²⁾ Nous indiquons au paragraphe 5 comment les points i sont liés à cette A'_n .

⁽³⁾ On peut vérifier que les 4 couples de tangentes doubles d'une cyclique C_2 déterminent une même involution sur δ ayant les points doubles de C_2 comme points homologues : les tangentes doubles issues d'un pôle principal s , sont, comme on sait, perpendiculaires aux asymptotes de la déférente correspondante; les directions de leurs bissectrices sont celles des axes de la déférente; elles sont les mêmes pour les 4 couples puisque les 4 déférentes sont homofocales.

se projette suivant la sphère directrice de centre S_1 , tandis que la section du cône (S_1) se projette suivant la polaire réciproque de la déférente par rapport à la sphère directrice ⁽¹⁾. Les sections des autres cônes viennent sur les cônes du second ordre contenant la $B_n(a_1)$. La génération descriptive n'existe plus, mais ce cas particulier met en évidence les éléments suivants de la génération anallagmatique :

« La sphère directrice de centre s_1 est celle qui passe par la $B_n(a_1)$. La quadrique déférente correspondante est la réciproque par rapport à cette sphère, de la quadrique Q_n^{-1} contenant (a_1) et inscrite dans le cône circonscrit de sommet s_1 . »

Avec les notations du paragraphe 3 la sphère directrice est la quadrique A'_n de l'équipage dégénéré, les points s_r représentant les $i'_{1,r}$, et l'homologie entre deux quadriques Q_n^i et Q_n^j donne le moyen suivant de déterminer la déférente, à partir d'une génération descriptive de C_n :

Le plan polaire X_1 de $i_{1,2}$ par rapport à Q_n^2 est l' E_{n-1} axial d'une homologie qui fait correspondre la quadrique Q_n^{-1} à Q_n^1 . Le centre en est s_1 et les homologues des $i'_{1,r}$ sont les s_r .

Inversement, dégageons les relations d'un équipage quelconque avec les éléments d'une génération anallagmatique. Les deux points de C_n obtenus dans la génération descriptive, à partir de m_1 , sur la droite $s_1 m_1$, se correspondent dans l'inversion de pôle s_1 ; par ces deux points passe donc une sphère orthogonale à la sphère directrice et bitangente à C_n . Une quadrique d'un équipage quelconque se trouve alors déterminée comme enveloppe du E_{n-1} radical d'une sphère quelconque A'_1 fixe et d'une famille de sphères bitangentes à C_n ; les points i associés sont les centres radicaux de A'_n et de n sphères directrices prises parmi les $n+2$.

Expliquons, pour $n=2$, cette génération tangentielle des quatre coniques Q_2 d'un équipage construit avec un cercle quelconque A' ; le plan de l'équipage qui lui correspond est coupé par un plan tangent au cône S_1 suivant une droite qui a pour projection une tangente à Q_2^1 ; cette droite coupe la sphère (Q_3) en deux points dont les perspectives appartiennent à la fois au cercle A' et au cercle bitangent. Ainsi : *L'enveloppe de l'axe radical d'un cercle fixe quelconque A' et d'un cercle variable dans les quatre familles de cercles bitangents à une cyclique est formée par les quatre coniques d'un équipage.*

Le point $i_{1,2}$ coïncide avec le centre radical du cercle A' et des deux cercles directeurs de centres s_3 et s_4 . *Le quadrilatère complet associé à l'équipage a donc pour sommets les centres radicaux du cercle A' et de deux cercles directeurs pris parmi les quatre.*

Le raisonnement s'étend pour n quelconque, il conduit à l'énoncé donné plus haut.

Mentionnons encore que $n+1$ générations d'un équipage s'évanouissent quand l'hyperplan qui lui donne naissance contient un sommet S_1 , la sphère A'_n étant

⁽¹⁾ Voir pour $n=2$, DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques* et pour $n=3$, SEGRE, déjà cité, p. 343.

alors orthogonale à la sphère directrice de centre S_1 . Parmi les sphères de cette catégorie se trouvent les sphères bitangentes à la cyclide C_n , qui proviennent des hyperplans tangents aux cônes S .

Plus généralement, quand l'hyperplan contient p sommets S , c'est-à-dire quand la sphère A'_n est orthogonale à p sphères directrices il ne reste que $\frac{1}{2}(n - p + 1)$ ($n - p + 2$) générations descriptives dans l'équipage. Quand $p = n + 1$, il n'en reste aucune, et nous retrouvons le cas de la génération anallagmatique.

6. Équipages particuliers (e). — Certains équipages méritent une attention spéciale, tels ceux qui proviennent d'un hyperplan passant par l' $E_{n-1}(\Delta)$ défini au paragraphe 4. Le pôle par rapport à (Q_{n+1}) de cet hyperplan variable autour de (Δ) décrit une droite qui contient O , sa trace ω est le pôle de (δ) par rapport à la quadrique A''_n qui détermine l'équipage. *Celui-ci provient donc d'une quadrique A''_n inscrite le long de σ dans un cône fixe de sommet ω .* De plus :

Les quadriques d'une même série des équipages déterminés par les A''_n sont inscrites dans le cône s_i de cette série le long de sa section par le plan (δ) de (σ) .

Indiquons une propriété intéressante de la B_n de base du faisceau des quadriques d'un équipage de cette nature. Cette B_n est la projection de la B_n de section par un hyperplan π qui contient Δ . π se présente comme plan polaire de O par rapport à une quadrique du faisceau B_{n+1} , et cette quadrique est coupée par (π) suivant une Q_n dont la perspective est tangente à C_n en chacun de ses points de rencontre avec A''_n . Ainsi :

La B_n de base du faisceau des quadriques d'un équipage déterminé par une quadrique A''_n est la B_n de contact d'une quadrique inscrite dans C_n ⁽¹⁾.

Lorsque σ est l'ombilicale, on en déduit (pour $n = 3$) : *une sphère de centre ω coupe une cyclide suivant une biquadratique par laquelle passent : 1° une quadrique inscrite dans la cyclide ⁽²⁾; 2° 4 quadriques dont chacune admet comme cône asymptote l'un des cônes doublement circonscrits à la cyclide.*

Il nous faut revenir, dans le cas de ces équipages particuliers, sur la construction de σ , pour laquelle la méthode du paragraphe 4 est en défaut. Prenons pour $E_{n-1}(\delta)$ l'hyperplan de l'infini; Q_n^1 et Q_n^2 sont alors deux quadriques de centres respectifs s_1 et s_2 . L'homothétie de centre i_{12} qui amène s_2 en s_1 transforme Q_n^2 en une quadrique Q_n^2 de centre s_1 qui coupe Q_n^1 suivant une B_n située sur un cône du second ordre de sommet s_1 . *La trace de ce cône sur (δ) détermine σ .* On énoncera sans peine la forme projective de cette construction.

Par exemple, la génération descriptive d'une cyclique plane peut s'effectuer dans les conditions particulières de ce paragraphe, plus simplement qu'au paragraphe 4 : il suffit de prendre deux coniques d'axes parallèles, de centres s_1, s_2 ,

⁽¹⁾ Cf. pour $n = 3$ SEGRE, déjà cité, p. 337.

⁽²⁾ Pour $n = 2$ il s'agit d'une conique quadritangente à une cyclique. Cf. DARBOUX, déjà cité. Le point ω est le centre commun des déférentes.

i_{12} étant alors déterminé sur la droite $s_1 s_2$ par les constructions effectuées sur la figure 6, où les points C_1, C_2 sont homothétiques dans l'homothétie de centre i_{12} qui a s_1 et s_2 pour points homologues.

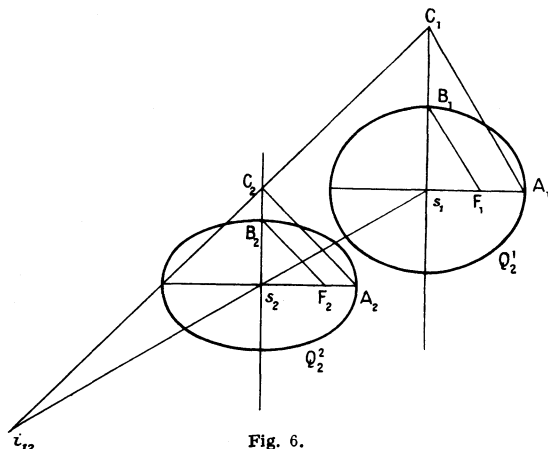


Fig. 6.

7. La courbe normale r_n de C_n . — Le cas particulier des équipages (e) du paragraphe précédent est celui où les plans polaires des points s_j par rapport aux quadriques Q_n^j correspondantes sont confondus avec le plan (δ) . Dans le cas général, comme il a été vu au paragraphe 4, ces plans concourent suivant un $E_{n-2}(r)$ de (δ) . Quand $n = 2$, r est un point quelconque de la droite des points doubles, pour $n = 3$, r est une droite quelconque du plan de la conique double, enfin pour n quelconque l' $E_{n-2}(r)$ varie également d'une façon arbitraire dans (δ) : les équipages associés à un (r) donné proviennent en effet des ∞^2 sections planes qui contiennent un E_{n-2} de (Δ) .

Soit m un point de (δ) , projection de M situé dans (Δ) . M étant conjugué de O dans le faisceau B_{n+1} , ses plans polaires par rapport aux $(n+2)$ cônes S concourent suivant un $E_{n-1}(M)$ passant par O , (M) engendre, lorsque M décrit (Δ) , le cône de sommet O du complexe polaire relatif au faisceau B_{n+1} , et sa trace constitue la congruence des $E_{n-1}(m)$ s'appuyant en $n-1$ points sur la courbe rationnelle r_n , d'ordre n , lieu des pôles de (δ) par rapport aux quadriques du faisceau d'un équipage (e).

Le lieu des pôles de (δ) par rapport aux quadriques du faisceau d'un équipage (e) quelconque est une courbe normale fixe (r_n).

Elle coïncide avec la courbe rationnelle relative à (δ) et au faisceau de deux quelconques des cônes s doublement circonscrits. Elle passe par les pôles $s_1 s_2 \dots s_{n+2}$ et ω de (δ) dans les quadriques $Q_n^1, Q_n^2, \dots, Q_n^{n+2}$ et A_n'' d'un équipage (e), par les n sommets du repère conjugué commun dans (δ) , par les $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ sommets, autres que $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$, des repères conjugués aux

faisceaux qu'on peut former avec les cônes de Kummer. C'est ainsi qu'on obtient pour $n = 2$, 13 points sur une conique, et pour $n = 3$, 23 points particuliers situés sur une cubique gauche ⁽¹⁾.

8. Invariants projectifs d'un équipage. — Les invariants projectifs de la B_{n+1} sont les rapports anharmoniques mutuels des paramètres des cônes du faisceau qu'elle détermine (cf. Chap. I, § 2), ou encore ceux de leurs sections par un E_n quelconque, puis de leurs projections, c'est-à-dire des quadriques d'un équipage. Donc :

Les rapports anharmoniques mutuels des quadriques d'un équipage sont invariants.

Ces invariants apparaissent aussi sur la configuration des points i . En effet la courbe du complexe polaire relative au plan π d'un équipage est osculatrice aux $(n + 2)$ hyperplans X ainsi qu'à ceux du repère conjugué commun dans π . D'où, par projection faite de O :

Les $n + 2$ plans X_j d'un équipage, ainsi que les $n + 1$ plans du repère conjugué commun aux quadriques de l'équipage sont osculateurs à une même courbe rationnelle d'ordre n , sur laquelle les paramètres des plans X_j ont pour rapports anharmoniques mutuels ceux des quadriques de l'équipage.

Pour $n = 2$ nous retrouvons la conique déjà rencontrée à la fin du paragraphe 1; le rapport anharmonique des 4 droites X sur cette conique égale celui des quatre coniques du faisceau de l'équipage; il représente le module de la quartique C_2 .

Le paramètre de la quadrique A'_n qui fait partie du faisceau de l'équipage et passe par σ , se trouve lié d'une façon projective aux précédents, puisqu'il représente celui de la quadrique (Q_{n+1}) . Quand A'_n est une A''_n les paramètres sont ceux des points $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$ et ω sur la courbe r_n , ou encore ceux de l'ensemble des déférentes et de l'ombilicale pris dans leur faisceau tangentiel. Enfin, se rappelant l'origine des sphères bitangentes à une cyclide, les invariants projectifs d'un équipage apparaissent aussi comme ceux des $n + 2$ sphères bitangentes passant par un point m quelconque sur C_n .

9. Propriétés diverses. — Revenons sur les 4 points obtenus par une sécante im_1m_2 dans l'opération courante de la génération descriptive, soient m, m' et n, n' (fig. 7). Ce sont deux couples de points homologues pour l'inversion généralisée qui a pour centre s_1 , tandis que m, n et $m'n'$ se correspondent dans celle qui a pour centre s_2 . Nous dirons que ces 4 points forment un quadrangle de points inverses. Le conjugué harmonique de s_1 par rapport à m, m' décrit la projection de la section du cône S_1 par le plan $S_2S_3 \dots S_{n+2}$, c'est-à-dire la quadrique Q'_n déjà rencontrée au paragraphe 5 à propos de la déférente. Les

⁽¹⁾ Cf. DARBOUX, *Sur une classe remarquable*, p. 169 et SEGRE, déjà cité, paragraphe 2.

droites mn' et $m'n$ se coupent au point u qui est la projection d'un point conjugué de S_1 et de S_2 dans le faisceau B_{n+1} ; donc :

Les droites qui joignent en croix les points d'un quadrangle, de points inverses, relatif à s_1, s_2 , se coupent dans l' $E_{n-2}s_3s_4 \dots s_{n+2}$.

s_1u et s_2u rencontrent im_1m_2 aux points u_1 et u_2 situés respectivement sur X_2 et sur X_1 ; mn' et $m'n$ coupent im_1m_2 aux points v_1, v_2 , conjugués par rapport à u_1, u_2 , et homologues dans l'involution déterminée par Q_2^1 et Q_2^2 sur la droite u_1u_2 .

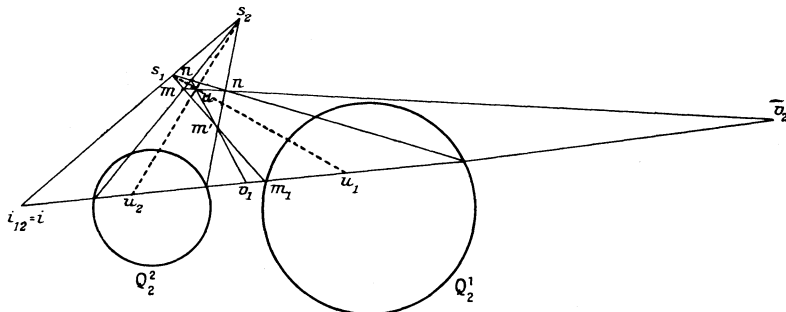


Fig. 7.

Notons encore, pour un équipage donné, une relation importante ⁽¹⁾ entre sa B_n de base (α) et la $B_n(\alpha_1)$. Une Q_{n+1} quelconque du faisceau B_{n+1} a pour contour apparent sur le plan de l'équipage, le point de vue étant S_1 , une quadrique B passant par (α_1) , tandis que sa section est une quadrique A du faisceau (α) , inscrite à la précédente le long d'une Q_{n-1} dont l' E_{n-1} est X_1 . D'où :

Les deux $B_n(\alpha)$ et (α_1) provenant d'un même équipage sont les B_n de base de deux faisceaux de quadriques qui se correspondent homographiquement par quadriques inscrites le long d'une Q_{n-1} située dans X_1 . Aux quadriques particulières Q_n^i du 1^{er} faisceau correspondent les cônes du 2^e faisceau, tandis que Q_n^i se correspond à lui-même dans les deux faisceaux.

II. — GÉNÉRATIONS DESCRIPTIVES D'UNE CYCLIDE CUBIQUE T_n .

Dans la génération descriptive d'une cyclide C_n , les cas particuliers sont si nombreux qu'une étude complète est impossible. SEGRE [cité p. 351 à 444] ne distingue pas moins de 72 espèces de cyclides, et il s'agit de l'espace à 3 dimensions seulement. Nous allons donc nous borner, dans ce chapitre, à signaler les particularités de la génération descriptive d'une cyclide cubique T_n .

⁽¹⁾ Elle est reprise plus loin (Chap. IV, § 7).

1° Toute cyclide cubique T_n peut s'obtenir dans E_n par projection d'une B_{n+1} de E_{n+1} , faite d'un de ses points O . Les droites S_1O et S_2O recoupent B_{n+1} en O_1 et O_2 , dont les perspectives s_1 et s_2 appartiennent aux quadriques Q_n^1 et Q_n^2 . Inversement, s'il en est ainsi, O se trouve sur B_{n+1} . Donc :

Dans la génération descriptive d'une cyclide cubique T_n les points s_1, s_2 sont situés sur Q_n^1, Q_n^2 respectivement, et cette particularité est caractéristique (fig. 8).

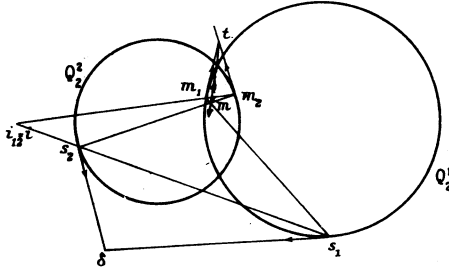


Fig. 8.

Ajoutons :

Les deux E_{n-1} tangents à Q_n^1 et Q_n^2 en s_1 et s_2 se coupent suivant un $E_{n-2}(\delta)$ appartenant à T_n .

(δ) est en effet la trace de l' $E_{n-1}(\Delta)$ tangent à B_{n+1} en O . Il s'obtient dans la génération descriptive par la position is_1s_2 de la sécante im_1m_2 ; en prenant pour s_1m_1 une droite de Q_n^1 , c'est-à-dire une génératrice du cône de section par l' E_{n-1} tangent en s_1 , on voit que la droite s_1m_1 appartient à T_n . D'où :

T_n , qui touche Q_n^1 et Q_n^2 en s_1 et s_2 , possède aussi les cônes de section de ces quadriques par leurs plans tangents en ces points.

Cette génération fait partie d'un équipage dont les sommets sont les $n+2$ points de contact des E_{n-1} tangents à T_n menés par son $E_{n-2}(\delta)$; ceux-ci recoupent T_n suivant des cônes Q_{n-1} : les quadriques de base de l'équipage en contiennent une chacune et leur B_n commune (α) est sur T_n . Telle est la structure d'un équipage.

A chaque quadrique Q_n^i contenant le cône Q_{n-1}^i correspond un seul équipage, car Q_n^i est la projection d'une section plane du cône S_1 (et non de 2 comme au paragraphe I, 3). En faisant varier Q_n^i on obtient les ∞^{n+1} équipages de générations descriptives de T_n .]

2° On peut établir les distinctions suivantes :

Quand $n > 4$, les $n+2$ cônes Q_{n-1} rencontrent (δ) suivant des Q_{n-2} d'un faisceau dont la base est la B_{n-2} des points doubles de T_n (cf. Chap. I, § 1).

Pour $n = 3$, δ est une droite de T_3 , surface cubique générale de l'espace. Le plan δs_1 la recoupe suivant deux droites qui se croisent en s_1 , et les 5 couples

de droites de T_3 , obtenues de cette manière, déterminent sur δ une même involution.

Pour $n = 2$, δ est un point ordinaire d'une cubique plane, les 4 points s_1, s_2, s_3, s_4 se trouvent aux points de contact des tangentes à la cubique menée par δ . La configuration des coniques d'un équipage est celle de 4 coniques tangentes à la cubique T_2 en s_1, s_2, s_3, s_4 et se recoupant en 4 points (α) de T_2 . Ces 4 points (α) n'ont aucune particularité sur la cubique, leur donnée détermine δ . Remarquons aussi que les points de contact des tangentes à la cubique menées par s_1 sont les 4 points α_1 .

3° Parmi les quadriques Q'_n fournissant des équipages, la projection de la section du cône S_1 par l'hyperplan $S_2, S_3, \dots, S_{n+2}$ fait exception. Elle passe par la $B_n(\alpha_1)$ et contient le cône Q'_{n-1} précédemment défini. Elle constitue (§ 1, 9) le lieu des conjugués harmoniques de s_1 par rapport aux 2 points de T_n situés sur une sécante passant par s_1 .

Soit maintenant une quadrique quelconque k passant par (α_1) . Elle est la projection de la section K par l'hyperplan $S_2 S_3 \dots S_{n+2}$ d'une certaine quadrique Q_{n+1} du faisceau B_{n+1} ; les génératrices de Q_{n+1} menées par O rencontrent K , ainsi que T_n ; leurs traces décrivent donc une Q_{n-1} commune à k et T_n ; son plan E_{n-1} passe par (δ) puisque c'est la trace du plan tangent en O à Q_{n+1} ; c'est aussi le plan polaire de s_1 par rapport à k , puisque K est la quadrique de contact du cône circonscrit à Q_{n+1} de sommet S_1 . On en déduit pour la T_n , la génération de Mac-Laurin :

Le lieu des points de contact des tangentes menées par s_1 aux quadriques k du faisceau ponctuel qui a pour base la $B_n(\alpha_1)$ est une cyclide cubique T_n ; les plans polaires de s_1 par rapport aux quadriques k concourent suivant l' $E_{n-2}(\delta)$ de T_n , et les sommets du repère conjugué commun sont $n + 1$ points de la T_n où le plan tangent passe par (δ) .

Les points de T_n situés sur une sécante passant par s_1 sont les deux points de contact des quadriques du faisceau tangentes à cette droite : ils sont conjugués par rapport à toutes les quadriques k .

4° Les inversions généralisées qui conservent une T_n ont pour pôles l'un des $n + 2$ points $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$ et pour sphère directrice l'une quelconque des quadriques k du faisceau associé ($n \geq 4$). Quand $n = 3$ il y a 5 pôles possibles attachés à l'une des 27 droites (δ) d'une surface cubique, soit en tout 135 pôles d'inversions : chaque droite en contient 10 mais il passe deux droites par chacun d'eux. Quand $n = 2$ tout point de la cubique peut être pris pour pôle. Il en résulte en particulier :

Si 3 points d'une cubique sont alignés, 2 quelconques d'entre eux sont conjugués communs par rapport aux coniques passant par les points de contact des tangentes à la cubique issues du 3^e point.

5° Remarquons en terminant que les rapports anharmoniques mutuels des quadriques d'un équipage sont ceux des plans tangents à T_n menés par (δ)

(c'est-à-dire des plans tangents en O aux cônes du faisceau B_{n+1} , donc de ces cônes eux-mêmes). En particulier pour $n = 2$ le rapport anharmonique d'un équipage est celui des 4 tangentes à la cubique menées par l'un quelconque de ses points : il représente son module.

III. — APPLICATIONS.

1. Introduction. — Raisonnons d'abord, pour plus de clarté, en géométrie plane.

La structure de la base d'un équipage, étudiée au paragraphe I, 2 et constituée par 4 coniques Q d'un faisceau et 6 points i aux sommets d'un quadrilatère complet, nous a montré qu'il existe entre ces éléments géométriques des relations indépendantes du choix des points s_1, s_2, s_3, s_4 (fig. 4). Elle invite donc à traiter le problème suivant :

Déterminer le quadrilatère à partir des 4 coniques. — Rappelons à cet effet leurs liens; d'après la construction même de l'équipage, la droite X_1 qui joint i_{23}, i_{24}, i_{34} coupe Q^2, Q^3, Q^4 en des points tels que les tangentes se rencontrent aux 4 points α_1 sur Q^1 . De même la droite X_3 coupe Q^1, Q^2 en des points tels que les tangentes se coupent sur Q^3 , tandis que X^4 coupe Q^1 et Q^2 en des points où les tangentes se croisent sur Q^3 . Nous sommes ainsi amenés à traiter le problème auxiliaire :

Étudier l'intersection des tangentes à Q^1 et Q^2 en leurs points de rencontre avec une droite X .

Soit maintenant n quelconque. La base de l'équipage est formée de $n + 2$ quadriques Q_n d'un même faisceau et d'un ensemble de points i à l'intersection de $n + 2$ hyperplans X (§ I, 2). D'après la détermination même de l'équipage, l'un des plans tels que X_1 est coupé par les $n + 1$ quadriques associées suivant des Q_{n-1} telles que les hypercônes circonscrits se rencontrent sur la quadrique Q_n^1 suivant la $B_n(\alpha_1)$. De même, les n plans $X_2, X_3, \dots, X_{n+2}$, qui passent par i_{12} , coupent les quadriques Q_n^1, Q_n^2 suivant des Q_{n-1} telles que les hypercônes circonscrits se rencontrent sur les quadriques $Q_n^3, \dots, Q_n^{n+2}$ respectivement suivant les $B_n(\alpha_3), \dots, (\alpha_{n+2})$.

Nous allons donc préciser le problème préliminaire :

PROBLÈME 1. — Étudier la B_n commune aux hypercônes circonscrits à deux quadriques Q_n^1, Q_n^2 le long des quadriques de section par un hyperplan X .

Nous appliquerons ensuite le résultat à la solution du problème suivant :

PROBLÈME 2. — Déterminer les points i de la base d'un équipage à partir des $n + 2$ quadriques du faisceau de cet équipage.

2. Solution du problème préliminaire. — Procédons analytiquement, indépendamment du nombre des dimensions. Les équations des 2 quadriques, rapportées

à un repère conjugué commun, sont

$$f = \sum a_k (x_k)^2 = 0, \quad g = \sum b_k (x_k)^2 = 0$$

et celle du plan X

$$X = \sum u_k x_k = 0.$$

Les cônes circonscrits le long des sections de f et g par X ont pour équations

$$(X)^2 - f \sum \frac{(u_k)^2}{a_k} = 0, \quad (X)^2 - g \sum \frac{(u_k)^2}{b_k} = 0.$$

Leur B_n commune est donc située sur la quadrique Γ d'équation

$$(1) \quad f \sum \frac{(u_k)^2}{a_k} - g \times \sum \frac{(u_k)^2}{b_k} = 0;$$

Γ fait partie du faisceau f, g , C'est un premier résultat. Précisons, en introduisant les points transformés de X dans les réciprociétés qui échangent f et g . Leurs coordonnées, données par $(x_k)^2 = \frac{(u_k)^2}{a_k b_k}$, vérifient (1). On en déduit :

THÉOREME 1. — *Les hypercônes circonscrits à 2 quadriques Q_n^1, Q_n^2 le long des quadriques de section par un hyperplan quelconque X se coupent suivant une hyperbiquadratique B_n appartenant à une quadrique Γ du faisceau ponctuel défini par Q_n^1 et Q_n^2 . Γ est transformée de la quadrique Γ' du faisceau tangentiel Q_n^1, Q_n^2 , tangente à X, dans l'une quelconque des 2ⁿ réciprociétés qui échangent Q_n^1 et Q_n^2 .*

L'énoncé prend, pour $n = 2$, la forme suivante :

THÉOREME 2. — *Les tangentes aux 4 points communs à une droite X quelconque et 2 coniques Q^1, Q^2 se coupent en 4 points d'une conique Γ du faisceau ponctuel Q^1, Q^2 ; Γ est transformée de la conique Γ' du faisceau tangentiel Q^1, Q^2 , tangente à X, dans l'une quelconque des 4 réciprociétés qui échangent, Q^2 .*

La 1^{re} partie de ce résultat de géométrie plane se trouve dans CHASLES (*Sections coniques*, p. 300), qui signale même une corrélation entre Γ et une conique Γ' . J'ai donc seulement précisé cette corrélation, par une méthode s'appliquant aux hyperespaces, en vue de la résolution générale du problème 2. Notons un cas particulier du théorème général, pour $n = 3$:

Les cônes circonscrits à 2 quadriques le long des sections par un plan tangent à une conique du faisceau tangentiel qu'elles déterminent, se rencontrent suivant une biquadratique située sur le cône corrélatif faisant partie de leur faisceau ponctuel (1).

Exemple. — Sections de 2 quadriques homofocales par un plan isotrope.

(1) On énoncera sans peine les résultats corrélatifs du théorème général et de ses cas particuliers.

Il est également possible de donner une solution géométrique du théorème 1 valable quel que soit le nombre des dimensions de l'espace.

Considérons Q_n^1 et Q_n^2 dans E_n comme les contours apparents vus d'un même point O de deux quadriques Q_{n+1}^1 et Q_{n+1}^2 de E_{n+1} . Le cône de sommet O dans le faisceau qu'elles déterminent a pour trace dans E_n une quadrique Γ du faisceau ponctuel Q_n^1, Q_n^2 . Un hyperplan tangent commun à Q_{n+1}^1 et Q_{n+1}^2 , de trace X dans E_n , coupe chacune des quadriques suivant un cône dont la projection faite de O coïncide avec chacun des cônes circonscrits à Q_n^1 et Q_n^2 le long de leurs sections par X; l'intersection de ces deux cônes appartient donc à la projection de la B_{n+1} commune aux deux quadriques Q_{n+1} , c'est-à-dire à Γ .

Échangeons Q_{n+1}^1 et Q_{n+1}^2 par une réciprocity. Le cône du faisceau ponctuel, de sommet O et de base Γ , a pour homologue une quadrique Γ' située dans E_n , tangente à X, réciproque de Γ dans une réciprocity qui échange Q_n^1 et Q_n^2 .

La figure précédente, dans E_{n+1} , pouvant être construite à partir des éléments arbitraires Q_n^1, Q_n^2 et X de E_n , le théorème 1 est démontré.

3. Détermination de la base d'un équipage à partir de $n + 2$ quadriques Q_n d'un faisceau ponctuel. — $n = 2$ (fig. 4). — Nous nous donnons 4 coniques Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 , d'un faisceau. L'étude faite au paragraphe 1 et le résultat obtenu au paragraphe 2 (th. 2) montrent que la conique Q^3 est corrélative de la conique Q^4 tangente à X_3 et faisant partie du faisceau tangentiel Q^1, Q^2 . Q^3 est donc connu. De plus (§ 1-2) X_3 est un rayon double de l'involution des tangentes issues de i_{12} aux coniques du faisceau tangentiel Q^1, Q^2 . Q^3 passe donc par i_{12} . On voit de même que Q^4 passe par i_{12} . La détermination du point i_{12} est ainsi résolue par la propriété suivante :

Le point i_{12} est l'un des 4 points d'intersection des transformées de Q^3 et Q^4 dans une réciprocity qui échange Q^1, Q^2 .

i_{12} étant ainsi choisi, X_3 et X_4 sont les tangentes en ce point à Q^3 et Q^4 , X_1 et X_2 les polaires de i_{12} par rapport à Q^2 et Q^1 . Le quadrilatère X_1, X_2, X_3, X_4 est donc déterminé. Les 4 points i_{12} obtenus étant deux à deux symétriques ⁽¹⁾ par rapport aux côtés du triangle conjugué commun il en est de même des 4 quadrilatères qu'ils déterminent. Ainsi :

La base d'un équipage de générations descriptives est entièrement déterminée par 4 coniques d'un faisceau, aux symétries près par rapport aux côtés du triangle conjugué commun, qui donnent en tout 4 solutions.

REMARQUE. — Les 4 coniques déterminent le quadrilatère. Inversement donnons-nous les 4 droites X. On peut prendre Q^1 arbitrairement conjuguée au triangle $i_{12}i_{13}i_{14}$ et Q^2 conjuguée au triangle $i_{12}i_{23}i_{24}$; alors la construction du quadrilatère à partir de la génération descriptive $i_{12}Q_1Q_2$ donne précisément les

⁽¹⁾ Il s'agit de la symétrie généralisée définie en géométrie projective par le changement de signe d'une coordonnée dans ce repère.

4 droites X. La base de l'équipage n'est donc pas déterminée par ces droites; elle dépend de 4 paramètres ⁽¹⁾.

n quelconque. — La méthode employée pour $n=2$ s'étend facilement à l'espace et aux hyperespaces. Soient $n+2$ quadriques $Q_n^1, \dots, Q_n^{n+2}$ d'un faisceau. L'étude faite au paragraphe 1 et le résultat obtenu au paragraphe 2 (th. 1) montrent que la quadrique Q_n^3 est corrélatrice de la quadrique Q_n^3 , tangente à X_3 , du faisceau tangentiel Q_n^1, Q_n^2 , dans une réciprocity qui échange Q_n^1 et Q_n^2 ; Q_n^3 est donc connu. De plus X_3 est une des faces du repère conjugué aux cônes de sommet i_{12} circonscrits aux quadriques du faisceau tangentiel Q_n^1, Q_n^2 (Chap. III, § I-2), Q_n^3 passe donc par i_{12} ; il en est de même pour $Q_n^4, \dots, Q_n^{n+2}$. La détermination du point i_{12} est ainsi résolue par la propriété suivante :

Le point i_{12} est l'un des 2^n points d'intersection des transformées de $Q_n^3, \dots, Q_n^{n+2}$ dans une réciprocity qui échange Q_n^1 et Q_n^2 .

i_{12} étant ainsi choisi, $X_3, X_4, \dots, X_{n+2}$ sont les plans tangents en ce point à Q_n^3, Q_n^4, Q_n^{n+2} , X_1 et X_2 les plans polaires de i_{12} par rapport à Q_n^2 et Q_n^1 . Les 2^n points i_{12} obtenus sont deux à deux symétriques par rapport aux faces du repère conjugué commun aux quadriques du faisceau donné. Ainsi :

La base d'un équipage de générations descriptives est entièrement déterminée dans E_n par $n+2$ quadriques Q_n d'un faisceau ponctuel, aux symétries près par rapport aux faces du repère conjugué commun qui donnent en tout 2^n solutions.

Soit 8 dans l'espace à 3 dimensions.

REMARQUE. — Les $n+2$ plans X ne suffisent pas à eux seuls pour déterminer la base d'un équipage. Q_n^1 pouvant être arbitrairement choisie conjuguée par rapport au repère formé par $X_2, X_3, \dots, X_{n+2}$ et Q_n^2 conjuguée par rapport au repère formé par $X_1, X_3, \dots, X_{n+2}$, celle-ci dépend de $2n$ paramètres.

4. **Conséquences.** — Les cubiques planes admettant pour base d'un équipage les 4 coniques Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 sont celles qui touchent ces 4 coniques, et qui passent par leurs 4 points communs, les points de contact étant s_1, s_2, s_3, s_4 (§ I-1^{re}). L'existence de 4 quadrilatères fixes associés aux 4 coniques pour former la base d'un équipage, justifie donc le théorème suivant :

THÉOREME 3. — *Il y a 4 familles ∞^1 de cubiques tangentes à 4 coniques d'un faisceau et passant par leurs points de base. Les droites qui joignent les points de contact sur 2 coniques forment pour chaque famille 6 faisceaux linéaires fixes.*

Les 4 familles se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport aux côtés du triangle conjugué commun ⁽²⁾.

⁽¹⁾ La question est de même nature qualitative que la suivante : un faisceau de coniques détermine son triangle conjugué commun, mais inversement, celui-ci étant fixé, le faisceau n'est pas déterminé.

⁽²⁾ Voir au paragraphe 5 l'enveloppe de chaque famille.

Pour une cyclique (quartique à 2 points doubles) le problème traité donne directement :

L'existence de 4 familles ∞^3 de cycliques passant par les points de base de 4 coniques données d'un faisceau, et dont les 4 couples de tangentes doubles soient respectivement tangents à ces 4 coniques. Les droites joignant les pôles principaux ⁽¹⁾ passent par les sommets d'un quadrilatère complet attaché à chaque famille.

C'est aussi, envisagé sous un autre aspect, le problème de la détermination du quadrangle des 4 points α_1 sur Q_1 , quand on se donne Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 ⁽²⁾, donc encore celui de la détermination du quadrilatère corrélatif concernant 4 coniques homofocales. Or c'est sa construction qui permet de déterminer les éléments d'une cyclique (anallagmatique) admettant 4 déférentes homofocales données ⁽³⁾. On en déduit :

L'existence et la détermination de 4 cycliques admettant 4 déférentes (homofocales) données. On passe de l'une d'elles aux autres par symétries par rapport aux axes des déférentes.

En suivant la même voie pour l'espace, on trouve :

THÉORÈME 3'. — *Il y a 8 familles ∞^2 de surfaces cubiques tangentes à 5 quadriques données d'un faisceau et passant par leur biquadrique commune ⁽⁴⁾. Les 10 droites qui joignent les points de contact sur deux d'entre elles passent, pour chaque famille, par 10 points fixes.*

Ces familles se déduisent l'une de l'autre par symétrie généralisée par rapport aux faces du tétraèdre conjugué commun ⁽⁵⁾.

L'existence de 8 systèmes de 5 plans pouvant être associés à 5 quadriques données d'un faisceau pour constituer la base d'un équipage entraîne encore :

L'existence de 8 familles ∞^1 de cyclides passant par la biquadratique commune à 5 quadriques et dont les cônes de Kummer sont respectivement circonscrits à ces 5 quadriques. Les 10 droites joignant les pôles principaux passent pour chaque famille par 10 points fixes à l'intersection de 5 plans pris 3 à 3.

C'est encore le problème de la détermination de la biquadratique (α_1) qui se trouve résolu, les données étant Q^1, Q^2, Q^3, Q^4, Q^5 . C'est aussi celui de la recherche de la développable corrélatrice concernant 5 quadriques homofocales. Énonçons-le :

Trouver une développable circonscrite à Q^1 et dont les coniques doubles appar-

⁽¹⁾ Points tels que s, s_2 .

⁽²⁾ Quand on se donne seulement Q^1 et le faisceau ponctuel, sans préciser Q^2, Q^3, Q^4 , il existe une infinité de tels quadrangles α_1 , comme cela résulte d'un lemme exposé par LEBESGUE dans son traité sur les coniques (Chapitre IV sur les *Polygones de Poncelet*).

⁽³⁾ DARBOUX, *Sur une classe remarquable*, p. 36.

⁽⁴⁾ La surface cubique recoupe alors la quadrique tangente suivant les deux génératrices du point de contact.

⁽⁵⁾ Voir au Chapitre IV l'enveloppe de chaque famille.

tiennent à $Q_3^2, \dots, Q_3^5$, homofocales à Q_3^1 . Or c'est cette recherche qui permet la détermination des éléments d'une cyclide (anallagmatique) admettant 5 déférentes homofocales données.

Il y a donc 8 cyclides admettant 5 déférentes homofocales données. Elles se déduisent les unes des autres par symétrie par rapport aux plans principaux des déférentes.

Les résultats se présentent maintenant d'eux-mêmes pour n quelconque. Il est inutile de répéter : ils concernent 2^n familles de cyclides cubiques T_n , ou de cyclides du 4^e ordre C_n , ou 2^n cyclides (anallagmatiques) dont les $n + 2$ déférentes sont données.

5. Courbe E de la base d'un équipage. — *Cas du plan.* — Dans la génération descriptive de la quartique C_2 , le point t de la tangente mt en m se construit avec les éléments i_{12} , Q_1^1 , Q_2^2 de la base d'un équipage comme intersection de 2 tangentes à Q_1^1 et Q_2^2 en 2 points m_1, m_2 alignés avec i (fig. 4).

Son lieu est une courbe E liée à la base de l'équipage, qui se présente comme une section plane de la développable engendrée par les tangentes à une biquadratique. Donc :

Le point t commun aux tangentes à Q_1^1 et Q_2^2 en deux points variables m_1, m_2 alignés avec le point fixe i , décrit une courbe E du 8^e ordre, admettant les 4 points α pour points de rebroussement.

Nous appellerons descriptive une telle génération de E. D'où : *Il existe 6 générations descriptives d'une courbe E.*

La courbe E passe par les 4 points α , où elle est tangente à la conique Q_2^1 .

La courbe E est ainsi quadritangente à chacune des coniques $Q_1^1, Q_2^2, Q_3^3, Q_4^4$.

Elle admet, en plus des quatre points de rebroussement, seize points doubles répartis quatre par quatre sur les côtés du quadrilatère de l'équipage. Ils proviennent des courbes doubles de la développable, situées dans les faces du tétraèdre conjugué commun à la biquadratique. Ceux qui appartiennent à X_1 s'obtiennent par intersection de X_1 avec la transformée quadratique de Q_1^1 dans le faisceau qui a les quatre points α pour base. E a le genre 1, comme la C_2 , lieu de m , avec laquelle elle est en correspondance birationnelle. Enfin l'existence de quatre bases d'équipages possibles associés à quatre coniques d'un faisceau entraîne la détermination de quatre courbes E quadritangentes à chacune d'elles, qui admettent leurs points communs comme rebroussements.

A chaque base d'équipage on peut faire correspondre une famille ∞^4 de cubiques, passant par les quatre points α communs à ces quatre coniques et tangentes à chacune d'elles. Les points de contact avec Q_1^1 et Q_2^2 sont s_1, s_2 alignés avec i ; le point δ d'intersection des tangentes en s_1 et s_2 appartient à la cubique et à E, et il y a contact des deux courbes en ce point. Par conséquent *chacune des quatre familles de cubiques T tangentes aux quatre coniques $Q_1^1, Q_2^2, Q_3^3, Q_4^4$ et passant par leurs quatre points communs enveloppe en outre une courbe E.*

Si du point de contact avec E on mène les quatre tangentes à la cubique T, les points de contact s_1, s_2, s_3, s_4 sont les points où T touche $Q_2^1, Q_2^2, Q_2^3, Q_2^4$.

Notons encore que les tangentes d'inflexion d'une cubique T sont des tangentes à E, qu'elles admettent donc pour enveloppe (4).

CHAPITRE IV.

La développôide définie par une hyperbiquadratique (2).

I. — TANGENTES PRINCIPALES D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE.

Il faut, en vue d'étendre à l'espace et aux hyperespaces les résultats qui concernent la courbe E, préciser la définition et les propriétés d'un lieu de tangentes particulières à une B_n , qui généralise, pour notre but, le lieu des tangentes à une biquadratique ordinaire,

Nous désignons par V_p une variété à p dimensions dans E_n , par $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ l'étendue du n — vecteur de l'espace linéaire E_n , défini par les vecteurs $A_1, A_2, \dots, A_n$.

1. Tangentes principales d'une V_{n-2} de E_n . — Nous allons montrer l'existence en chaque point M de la V_{n-2} , de $n-2$ tangentes, appelées principales, qui engendrent une V_{n-1} dont l'hyperplan tangent, le même tout le long de l'une d'elles, généralise ainsi le plan osculateur à une courbe gauche. L'hyper-surface V_{n-1} est donc, suivant l'expression de L. Gauthier (Thèse, Paris, 1944, p. 10) une variété $n-2$ développôide.

Soit $M(u_i)$, où $i = 1, 2, \dots, n-2$, le point qui décrit la V_{n-2} dans E_n . Nous supposons l'existence du E_{n-2} tangent défini par les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u_i}$; le point P qui décrit l'une de ses droites D est tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + t \sum_i \left(x_i \frac{\partial M}{\partial u_i} \right)$ (t variant seul).

Lorsque les $2n-4$ vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u_i}$ et $\sum_i \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} x_i \right)$, dont nous supposons l'existence, sont dans un même E_{n-1} , celui-ci est tangent à la variété V_{n-1} , lieu de la droite D, tout le long de D. Il faut donc, et il suffit pour cela, que les x_i soient déterminés en chaque point par les $n-3$ relations suivantes, où $j = 2, 3, \dots, n-2$

$$(1) \quad \left[\frac{\partial M}{\partial u_1}, \frac{\partial M}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}, \sum_i \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_i} x_i \right), \sum_k \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_j \partial u_k} x_k \right) \right] = 0.$$

(1) La tangente à E au point courant t est la trace du plan osculateur au point M correspondant de la biquadratique, c'est-à-dire celle du plan tangent à la quadrique du faisceau qui contient la tangente en M. Or t détermine sa conique A de section, du faisceau (α), d'où la conique B du faisceau (α) (§ I, 9), et la 2^e tangente menée de t à cette conique donne la construction de la tangente à E en t .

(2) Certains résultats de ce Chapitre figurent dans une Note aux Comptes rendus (Lesieur, mai 1945, t. 220, pp. 724-726).

Donnons une interprétation géométrique du système (1) qui en fournit aussi la solution. Faisons passer par la V_{n-2} une V_{n-1} quelconque; nous pouvons la définir par $M(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, \lambda)$ où $\lambda = 0$ caractérise la V_{n-2} . Le cône des tangentes de la section de V_{n-1} par l' E_{n-2} tangent à la V_{n-2} en M, a pour équation dans le repère $\frac{\partial M}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}$

$$(2) \quad \left[\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \frac{\partial M}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}, \sum_{jk} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_j \partial u_k} x_j x_k \right) \right] = 0.$$

Il varie, M étant fixé, dans un faisceau linéaire. Le paramètre est celui de l'hyperplan tangent en M à la V_{n-1} , constitué par E_{n-2} et $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$. Le plan polaire du point $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ a pour équation

$$(3) \quad \sum_j x_j \left[\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \frac{\partial M}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}, \sum_k \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_j \partial u_k} x_k \right) \right] = 0.$$

Pour une solution $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ de (1) et le cône particulier défini par $\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \sum \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_i} x_i \right)$, ce plan polaire s'évanouit. Le point considéré est alors point double du cône correspondant qui admet une droite double, arête par conséquent, du repère conjugué commun de sommet M aux cônes du faisceau (2). La réciproque est vraie. Donc

THÉORÈME 4. — *Les tangentes principales sont les $(n-2)$ arêtes du repère conjugué commun au faisceau des cônes des tangentes pour les sections par E_{n-2} des variétés V_{n-1} passant par la V_{n-2} .*

Il est aisé de montrer que

THÉORÈME 4'. — *L'hyperplan osculateur correspondant à la tangente principale MP est la limite de l'hyperplan défini par l' E_{n-2} tangent en M et le point N de la V_{n-2} quand MN tend vers MP.*

2. Tangentes principales d'une B_n . — Dans le cas particulier d'une hyper-biquadratique, les tangentes principales en M sont les arêtes du repère conjugué commun aux cônes de section des quadriques du faisceau B_n , par l' E_{n-2} tangent en M à la B_n .

Dans l'espace à quatre dimensions la B_4 est une V_2 ; son E_2 tangent en M coupe les quadriques du faisceau suivant deux génératrices qui restent conjuguées par rapport aux deux tangentes principales $D_1 D_2$. *Celles-ci sont les droites de contact avec E_2 de deux quadriques particulières du faisceau dont les hyperplans tangents en M constituent les deux hyperplans osculateurs à la B_4 en M.*

Plus généralement, pour une V_2 quelconque située dans E_4 , les deux tangentes principales en M sont les rayons doubles de l'involution signalée par Kommerel qui les appelle *asymptoten richtungen* ⁽¹⁾. Dans la projection de la V_2 faite

⁽¹⁾ KOMMEREL, *Flächen in ebenen Raum von vier dimensionen* (Math. Annalen, 1905). Voir aussi FORSYTH, *Geometry of four dimensions*, Cambridge 1930, vol. II, p. 246, où il est question de cette

d'un point quelconque suivant une surface de l'espace ordinaire, ces droites ne se projettent pas suivant des tangentes asymptotiques, comme nous allons le voir sur l'exemple de la B_n , où elles donnent par contre des directions principales. Ce dernier nom paraît donc mieux justifié.

3. Projection des tangentes principales d'une B_n . — La projection d'une B_n , faite d'un point O , est une cyclide C_{n-1} . Utilisons pour la détermination des tangentes principales la propriété du théorème 4, en coupant les quadriques du faisceau B_n par l' E_{n-2} tangent en M . Celle qui passe par O , ou *sphère*, est coupée suivant un cône isotrope, qui se projette suivant un cône isotrope de sommet m ; celle qui est tangente à MO en M est coupée suivant un cône qui se projette suivant le cône des tangentes asymptotiques en m , à la cyclide; il est en effet formé par des droites qui la coupent en trois points confondus en m . Les tangentes principales se projettent donc suivant les arêtes du repère conjugué commun au cône isotrope et au cône asymptotique en m , c'est-à-dire suivant les axes de ce dernier, suivant les tangentes principales.

Les tangentes principales d'une hyperbiquadratique B_n se projettent sur un E_{n-1} suivant les directions principales d'une cyclide ⁽¹⁾.

Remarque. — Cette propriété subsiste pour la cyclide cubique T_{n-1} obtenue en projetant la B_n d'un de ses points O , sauf pour les tangentes principales de O , qui donnent chacune un point; soit P l'un d'eux. Le plan tangent en P à la cyclide est la trace de l'hyperplan osculateur en O à la B_n , le long de OP : c'est en effet la limite de la trace de l'hyperplan défini par l' E_{n-2} tangent et ON quand ON tend vers OP , donc d'après 4' (§ 1), de l'hyperplan osculateur lui-même.

4. Ordre de F . — Soit F la variété algébrique lieu des tangentes principales d'une B_n . Indiquons une méthode permettant d'obtenir son équation, et par suite son ordre. Un point P de F est situé sur une tangente principale MP . Les hyperplans polaires de P par rapport aux Q_n du faisceau B_n concourent suivant un $E_{n-2}\pi$; celui-ci contient évidemment les $n-3$ tangentes principales associées à MP dans l' E_{n-2} tangent en M . Par suite, la section de B_n par π est une B_{n-2} admettant un point double en M , puisque les tangentes y sont réparties dans un E_{n-3} formé par les $n-3$ droites précédentes.

Il suffit donc d'écrire que dans le faisceau B_{n-2} deux cônes sont confondus, c'est-à-dire que l'équation aux paramètres λ de ces cônes admet une racine double. La condition obtenue donne l'équation de F .

Prenons les équations de la B_n sous la forme

$$(4) \quad \begin{cases} (X_n)^2 = a^{ij} X_i X_j \\ (X_{n+1})^2 = b^{ij} X_i X_j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

involution, définie à l'aide d'éléments géodésiques de la V_2 . Il y a lieu de remarquer que la définition et la propriété des tangentes principales données au paragraphe 1 ont un caractère projectif dans E_n .

(1) Voir au paragraphe 7 la projection faite d'un sommet S_1 d'un cône du faisceau B_n .

L'E_{n-2}π commun aux E_n polaires du point M(x_i) est défini par

$$(5) \quad \begin{cases} X_n = \frac{(q^{ij} x_i)}{x_n} X_j = p^j X_j, \\ X_{n+1} = \frac{(b^{ij} x_i)}{x_{n+1}} X_j = q^j X_j, \end{cases}$$

avec

$$(6) \quad p^j = \frac{(a^{ij} X_i)}{x_n}, \quad q^j = \frac{(b^{ij} x_i)}{x_{n+1}}.$$

La section B_{n-2}, définie par (4) et (5) de B_n par π, a pour projection dans l'espace X₁, X₂, ..., X_{n-1} ou X_i

$$(7) \quad \begin{cases} (p^j X_j)^2 = a^{ij} X_i X_j, \\ (q^j X_j)^2 = b^{ij} X_i X_j, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} (p^i p^j - a^{ij}) X_i X_j = 0, \\ (q^i q^j - b^{ij}) X_i X_j = 0. \end{cases}$$

L'équation aux λ des cônes du faisceau (7) se présente sous la forme d'un déterminant d'ordre n-1

$$(8) \quad |p^i p^j - a^{ij} - \lambda(q^i q^j - b^{ij})| = 0,$$

ou, en développant

$$(9) \quad A_0 \lambda^{n-1} + A_1 \lambda^{n-2} + \dots + A_{n-2} \lambda + A_{n-1} = 0.$$

A₀ est un polynome du 2° degré en q seul, A_{n-1} un polynome du 2° degré en p seul, tandis que les autres coefficients A₁, A₂, ..., A_{n-2} sont à la fois du 2° degré en p et en q. Pour avoir une racine double en λ il faut annuler le discriminant de (9) soit

$$(10) \quad R(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = 0,$$

de degré 2n-4 par rapport aux A, et de poids (n-1)(n-2). Il se compose de monomes

$$(11) \quad A_0^{\alpha_0}, A_1^{\alpha_1}, \dots, A_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} &= 2n-4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} &= (n-1)(n-2). \end{aligned}$$

Le degré du terme (11) est

$$\begin{aligned} \text{en } p \quad 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) &= 2(2n-4-\alpha_0), \\ \text{en } q \quad 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2}) &= 2(2n-4-\alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

La valeur maximum du degré, aussi bien pour p que pour q, est donc 2(2n-4) = 4(n-2), atteinte effectivement, par exemple dans le terme en

$$A_1^{n-2}, A_{n-2}^{n-2}.$$

qui est bien de degré 2n-4 par rapport aux A, et de poids (n-1)(n-2).

En remplaçant dans (10) les p^j et q^j par leurs expressions (6), puis en chassant les dénominateurs qui sont $(x_n)^{4(n-2)}$ et $(x_{n-1})^{4(n-2)}$, on obtient F sous la forme d'une variété d'ordre $8(n-2)$, d'où :

L'ordre de la surface F_n lieu des tangentes principales d'une B_n est en général $8(n-2)$.

Ce résultat est confirmé au paragraphe 7.

Exemples : $n = 3$. — La méthode précédente permet en particulier d'obtenir l'équation de la développable du 8^e ordre engendrée par les tangentes à une biquadratique. Il n'est même pas nécessaire dans la pratique de partir de quadriques mises sous la forme (4). C'est ainsi qu'on trouve à partir de la biquadratique commune à une sphère et un parabolôide

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 &= 0, \\ XY - Z &= 0, \end{aligned}$$

la surface F sous la forme

$$4[xyz^2 + z(x^2 + y^2) - xy]^2 + [(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + 4(z^2 - x^2y^2)][(1 + z^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 - 8xyz] = 0.$$

$n = 4$. — Les tangentes principales d'une B_4 décrivent une variété du 16^e ordre à trois dimensions, une V_3^{16} . Nous allons préciser sa section dite principale, par un hyperplan du repère conjugué commun.

5. Sections principales de F. — Les deux tangentes principales au point M d'une B_4 coupent l'hyperplan $S_2S_3S_4S_5$ aux points A et B, qui sont aussi les traces des deux tangentes principales au point M' aligné avec S_1 et M. Les points A et B décrivent donc une surface double V_2 pour la section principale de F par l' E_3 polaire de S_1 .

Quand M et M' sont confondus ils coïncident avec un point M de la biquadratique (A_1) , intersection de B_4 par E_3 ; la tangente MP à (A_1) en M est une tangente principale pour B_4 : en effet, l' E_2 tangent en M est déterminé par MP et S_1M qui sont conjuguées par rapport à toutes les quadratiques du faisceau. Ainsi

La section de F par E_3 est décomposée suivant le lieu des tangentes à la biquadratique (A_1) , et la variété V_2 double. Comme F est du 16^e ordre, V_2 est d'ordre 4.

Indiquons une génération de V_2^4 dans E_3 . S_1M a pour trace m_1 et la droite AB est commune aux plans polaires de m_1 dans le faisceau défini par (A_1) ; d'autre part AB touche V_4^2 en A et B d'après la définition des tangentes principales.

V_2^4 constitue donc la surface focale de la congruence des droites d'un complexe polaire associées aux points m_1 d'une quadrique Q_2^1 du faisceau (A_1) qui définit ce complexe.

On obtient de même pour n quelconque :

Une section principale de F_n par l' E_{n-1} polaire de S_1 se trouve décomposée suivant la variété F_{n-1} , d'ordre $8(n-3)$ de la $B_{n-1}(A_1)$ correspondante, et une variété double V_{n-2}^1 . Celle-ci est touchée en $n-2$ points par l' E_{n-3} conjugué commun du point m_1 par rapport aux quadriques du faisceau (A_1) , m_1 étant un point quelconque d'une quadrique Q_n^1 de ce faisceau.

6. Surface E de la base d'un équipage. — Dans la génération descriptive de la surface C_3 , la droite (t) du plan tangent mt en m se construit avec les éléments i_{12} , Q_3^1 , Q_3^2 de la base d'un équipage, comme intersection des plans tangents à Q_3^1 et Q_3^2 en deux points m_1m_2 alignés avec i_{12} ; (t) se présente comme trabe du plan E_2 tangent en M à la B_1 , et les traces des deux tangentes principales sont les deux points t_1t_2 de (t) conjugués communs par rapport aux quadriques Q_3^1 et Q_3^2 . Leur lieu, surface E liée à la base de l'équipage, apparaît donc comme une section hyperplane de la variété F relative à la B_1 . D'après la définition des tangentes principales (t) est tangente à E aux points t_1, t_2 . Donc :

La surface focale de la congruence des droites (t) d'intersection des plans tangents à deux quadriques Q_3^1, Q_3^2 en deux points m_1m_2 alignés avec un point fixe i , est une surface E du 16^e ordre ⁽¹⁾.

Nous appellerons descriptive une telle génération de E. D'où :

Il y a dix générations descriptives de la surface E.

La surface E touche la quadrique Q_3^1 tout le long de la biquadratique (α_1) . Elle est donc circonscrite aux quadriques $Q_3^1Q_3^2Q_3^3Q_3^4Q_3^5$ les biquadratiques de contact étant $(\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)(\alpha_4)(\alpha_5)$.

Les V_2^1 doubles situées dans les plans principaux de F sont coupées par l'hyperplan de l'équipage suivant des courbes doubles du 4^e ordre. On en déduit que la section de la surface E par un plan de son équipage, tel X_1 , est formée d'une courbe double du 4^e ordre et d'une courbe E du 8^e ordre. L'interprétation de la V_2^1 donnée au paragraphe 5 montre aussi que cette courbe double est à l'intersection de X_1 avec la surface transformée de Q_3^1 dans le complexe polaire défini par le faisceau de l'équipage.

Enfin l'existence de huit bases d'équipages associées à cinq quadriques d'un faisceau (Chap. III, § III-3), entraîne la détermination de huit surfaces E correspondantes.

Chacune de ces bases permet la construction d'une famille de ∞^2 surfaces cubiques passant par la biquadratique (a) commune aux cinq quadriques $Q_3^1, \dots, Q_3^5$ et tangentes à ces quadriques; les points de contact avec Q_3^1 et Q_3^2 sont s_1 et s_2 , variables mais alignés avec i_{12} ; la droite (δ) d'intersection des plans tangents à Q_3^1 et Q_3^2 en s_1 et s_2 appartient à la surface cubique; elle touche E en A et B et il y a contact, en ces points de la surface cubique avec E (remarque du § 3).

⁽¹⁾ Nous verrons au paragraphe 7 qu'elle admet la biquadratique (a) commune à Q_3^1 et Q_3^2 comme courbe multiple d'ordre 4 et au paragraphe 11, qu'elle admet une courbe double d'ordre douze.

On peut donc compléter comme suit le théorème 3' du chapitre III, paragraphe III-4 :

Chacune des 8 familles de surfaces cubiques T passant par une biquadratique (α) et tangentes à 5 quadriques $Q_1^1, \dots, Q_5^5$ du faisceau (α) , enveloppe en outre une surface E . Les deux points de contact de T avec E sont situés sur une droite (δ) de T , et les 5 plans tangents à T menés par (δ) ont pour points de contact les 5 points $s_1, \dots, s_5$ où T touche $Q_1^1, \dots, Q_5^5$.

On étendra sans mal, pour $n > 4$, les résultats de ce paragraphe.

7. Intersection de F_n avec une quadrique Q_n du faisceau B_n . — Par un point P de cette intersection passe une génératrice principale MP , qui coupe, quand M et P sont distincts, la quadrique Q en 3 points : 2 en M et 1 en P ; elle lui appartient donc, et *l'intersection de la quadrique Q_n avec la variété F_n est formée, en dehors de la B_n , par des génératrices communes à Q_n et à F_n .*

Son étude, pour laquelle nous allons utiliser une projection de centre S_1 , va nous donner quelques précisions supplémentaires sur F , et nous conduire à de nouvelles applications.

Nous n'insistons pas sur le cas connu $n = 3$, où les génératrices communes à F et Q se projettent de S_1 suivant les tangentes communes à Q_1^1 et au contour apparent B de Q , qui passe par les 4 points (α_1) (Chap. III, § I-9). Il y a donc dans l'intersection, en dehors de la biquadratique double, 4 génératrices d'un système et 4 de l'autre.

Le rapport anharmonique commun de ces deux groupes est celui des 4 tangentes, pris sur B , égal à celui des 4 points α_1 pris sur Q_1^1 , c'est-à-dire à celui des 4 cônes du faisceau, à l'invariant d'un équipage.

a. Plaçons-nous maintenant dans l'espace à 4 dimensions. Une génératrice MP , principale pour la B_1 , et appartenant à une quadrique Q du faisceau B_1 , est une droite de contact avec Q du plan tangent à la B_1 en M . Ce plan se projette donc de S_1 suivant un plan tangent commun à Q_1^1 et au contour apparent de Q , qui est une quadrique B passant par (α_1) (Chap. III, § I-9). La perspective de MP joint les points de contact; *c'est une génératrice de la développable circonscrite à Q_1^1 et B* . L'intersection résiduelle de F et Q se projette donc de S_1 suivant une surface d'ordre 8. C'est alors elle-même une surface d'ordre 16. L'intersection totale ayant l'ordre 32, la B_1 doit y compter pour l'ordre 16. Cette propriété reste vraie quelle que soit la quadrique Q du faisceau. Il en résulte :

L'hyperbiquadratique B_1 est multiple d'ordre 4 pour le lieu F de ses tangentes principales.

Ce résultat peut être obtenu directement; il confirme alors l'ordre trouvé précédemment pour F . Coupons l'hypersurface F par une droite D passant au voisinage d'un point M de la B_1 . Projetons sur un E_3 à partir d'un point O de D : on est ramené à trouver les directions principales d'une cyclide qui passent par la trace ω de B ; comme ω est infiniment voisin de la cyclide il y a 4 directions prin-

cipales, parmi celles qu'on cherche, dont les points de contact sont infiniment voisins de ω . Il en résulte 4 points sur D infiniment voisins de M. L'hyperbiquadratique est bien multiple d'ordre 4 sur F. Il passe en M 4 nappes de l'hyper-surface F qui viennent se raccorder deux à deux tangentiellement aux 2 hyperplans osculateurs en M.

CONSEQUENCE. — *La biquadratique (α) est multiple d'ordre 4 pour la surface E.*

b. Une autre conséquence concerne la variété V_2^* du paragraphe 5, double pour une section principale de F, l'intersection résiduelle étant formée par le lieu des tangentes à la biquadratique (A_1). La section principale de Q est une quadrique du faisceau (A_1). (A_1) doit figurer pour l'ordre 16 dans l'intersection de cette quadrique avec la section principale de F, intersection qui comprend :

(A_1) (double, comptant donc pour l'ordre 8);

8 tangentes à (A_1);

et la courbe d'intersection avec la V_4^* (double, ordre 16). (A_1) doit donc figurer pour l'ordre 8 dans cette dernière partie de l'intersection, c'est-à-dire qu'elle est située sur la V_2^* .

La V_2^ faisant partie d'une section principale de F passe simplement par la biquadratique (A_1).*

C'est ce qu'on peut vérifier directement sur l'exemple de la B_4 .

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 + 1, \\ t^2 &= 2x^2 + y^2 + 3, \end{aligned}$$

où la surface V_2^* située dans $t = 0$ a pour équation

$$15y^2z^2 + 28x^2z^2 + x^2y^2 - 7x^2 - 12y^2 + 63z^2 = 0.$$

Elle passe bien par la biquadratique (A_1)

$$\begin{aligned} f &= z^2 + x^2 + 2 = 0, \\ g &= y^2 + 2x^2 + 3 = 0, \end{aligned}$$

car son équation s'écrit encore

$$15fg + 2(9 - x^2)f - 14(x^2 + 3)g = 0.$$

c. Revenons maintenant sur les points M de la B_4 où une tangente principale est génératrice de la quadrique Q du faisceau B_4 .

Leur lieu L se projette à partir de S_4 , comme on a vu (α), suivant la biquadratique (p_1) de contact avec Q_3^* , de la développable circonscrite à Q_3^* et B. (p_1) est conjuguée au tétraèdre i_1, i_2, i_3, i_4 , car elle se déduit de (α_1) par le produit de 2 réciprocités : l'une échange B et Q_3^* , l'autre conserve Q_3^* , toutes deux laissent le tétraèdre invariant. On définit de même les biquadratiques p_2, p_3 .

p_1, p_2 par projections de S_2, S_3, S_1, S_4 . Deux quelconques, p_1 et p_2 par exemple, sont sur un même cône C du second ordre, de sommet i_{12} . On en déduit :

Le lieu L est une courbe du 8° ordre, intersection de la B_4 et d'un hypercône à droite double S_1S_2 , de base C . Par cette courbe L , passent 10 autres hypercônes du second ordre à droite double ⁽¹⁾.

d. Précisons ce cône C ; soit im_1m_2 l'une de ses génératrices, m_1m_2 étant les projections de M faites de S_1S_2 respectivement. Celles de la tangente principale MP sont m_1A et m_2A , en désignant par A la trace de MP ; A se trouve donc sur la trace de la quadrique Q . (Il appartient aussi, d'ailleurs, à la surface E .) Le plan X tangent au cône C le long de im_1m_2 coupe Q_1^1 et Q_3^2 suivant 2 coniques bitangentes à (p_1) et (p_2) , et les génératrices de m_1 et m_2 pour les cônes circonscrits à Q_1^1 et Q_3^2 le long de ces coniques sont précisément m_1A et m_2A (propriété de l'enveloppe d'un plan tangent à une surface : la droite caractéristique est conjuguée de la tangente à la courbe décrite par le point de contact). Dès lors, la biquadratique commune à ces deux cônes passe par A ; elle est donc tout entière sur la quadrique Γ du faisceau (α) , et le plan X est tangent à la réciproque Γ' de Γ dans une réciprocity qui échange Q_1^1 et Q_3^2 (Th. 1, Chap. III). Par conséquent :

Le cône C de sommet i_{12} est circonscrit à la quadrique Γ' transformée de la trace Γ de Q dans l'une quelconque des réciprocitys qui échangent Q_1^1 et Q_3^2 .

Les cônes C sont donc, lorsque Q varie, circonscrits aux quadriques du faisceau tangentiel défini par Q_1^1 et Q_3^2 .

Ils restent tangents aux 4 plans tangents communs à Q_1^1 et Q_3^2 passant par i_{12} ⁽²⁾.

En remarquant que (p_1) se trouve à l'intersection de Q_1^1 avec la réciproque de B par rapport à Q_1^1 , l'énoncé suivant se trouve justifié :

Quand des quadriques B varient dans un faisceau ponctuel, leurs réciproques par rapport à une quadrique fixe Q_1^1 du faisceau coupent cette quadrique suivant des biquadratiques (p_1) , telles que les cônes du second ordre de même sommet fixe i_{12} qui les contiennent varient dans un faisceau tangentiel ⁽³⁾.

Détachons encore la conséquence suivante :

Un cône circonscrit à une quadrique Γ' du faisceau tangentiel défini par deux quadriques Q_1^1 et Q_3^2 , les coupe suivant 2 biquadratiques p_1, p_2 telles que les développables circonscrites correspondantes ont une courbe commune du 16° ordre, située sur une quadrique Γ du faisceau ponctuel défini par Q_1^1 et Q_3^2 .

⁽¹⁾ Pour $n = 3$. L se réduit aux 8 points de contact des génératrices, situés dans 6 couples de plans.

⁽²⁾ Ces plans sont à l'origine de la génération descriptive des 16 droites de la B_4 .

⁽³⁾ La vérification analytique est facile.

Γ et Γ' sont réciproques dans l'une quelconque des réciprociétés qui échanagent Q_3^1 et Q_3^2 .

Cette propriété généralise le théorème I (Chap. III, § III-2) qu'on obtient quand le cône circonscrit à Γ' se réduit à un plan tangent Γ' .

II. — LIGNES PRINCIPALES D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE.

1. La courbe L , que nous venons de rencontrer (§ I-7, c) fait partie comme nous allons voir, du système de courbes associées sur B_4 , c'est-à-dire du réseau des courbes intégrales du champ des tangentes principales, courbes que nous appellerons *lignes principales*.

En effet, la tangente principale MP (§ I-7, a) a pour conjuguée la tangente en M à L , dans l' E_2 tangent en M à la B_4 , car il en est ainsi en m_1 pour la projection faite de S_1 où L donne la biquadratique p_1 . C'est dire que la tangente à L en M est principale, donc que L fait partie des lignes principales. Quand M décrit L , MP qui est tangente à la courbe associée qui passe en M , engendre une développable appartenant à la développopde F_4 ⁽¹⁾.

On en déduit le théorème suivant :

Le faisceau ponctuel des hyperquadriques passant par une B_4 découpe une famille de développables sur la 2-développopde F_4 .

La section particulière par un cône du faisceau B_4 est elle-même un cône, par exemple le cône de sommet S_1 et de base (A_1) ou (α_1) .

La section par une quadrique quelconque Q du faisceau est une développable dont la projection faite de S_1 coïncide avec la développable circonscrite à B et Q_3^1 (§ I-7, a). L'ordre de son arête égale la classe de la développable, lieu des tangentes à une biquadratique, c'est-à-dire 12 ⁽²⁾; l'arête de la développable de l'espace à 4 dimensions est donc du 24° ordre, elle constitue la section par Q de la deuxième arête de la 2-développopde F_4 ⁽³⁾. On en déduit.

La 2-développopde F_4 admet pour deuxième arête une variété V_2^{12} à deux dimensions, du 12° ordre.

Nous l'appellerons arête secondaire; elle est double sur F_4 ⁽⁴⁾, l'arête principale B_4 étant quadruple.

Revenons sur les lignes principales de B_4 pour en donner une détermination géométrique globale, par la propriété suivante :

Les lignes principales s'obtiennent comme trace sur la B_n du faisceau linéaire tangentiel de quadriques, défini par deux quadriques fixes, mais quelconques, passant par B_4 .

⁽¹⁾ Une 2-développopde de E_4 est un lieu de développables, c'est-à-dire de tangentes à 1 courbe de E_4 , obtenues de cette façon (GAUTHIER, *Thèse* Chap. I).

⁽²⁾ On l'obtient en calculant le nombre des points d'inflexion d'une cyclique, donné par la troisième formule de Plücker.

⁽³⁾ Une h -développopde admet h arêtes (GAUTHIER, *Thèse*).

⁽⁴⁾ Sa section par un E_3 est donc une courbe du 12° ordre double pour la surface E (§ I, 6).

Soient Q_1^1 et Q_2^2 ces deux quadriques fixes; par un point M de B_4 passent deux autres quadriques du faisceau tangentiel qu'elles déterminent, et les tangentes en M aux deux lignes d'intersection avec B_4 sont conjuguées par rapport à Q_1^1 et Q_2^2 ; ces tangentes sont donc principales et le théorème en résulte.

Une ligne principale de B_4 est donc une courbe d'ordre 8 intersection de trois quadriques. Elle se projette sur un E_3 suivant une ligne de courbure d'une cyclide, courbe algébrique d'ordre 8, intersection de la cyclide avec une cyclide homofocale ⁽¹⁾.

On en déduit aussi l'indépendance du résultat vis-à-vis du choix des quadriques de départ dans le faisceau linéaire ponctuel de base B_4 . Nous allons vérifier analytiquement cette conséquence, puis retrouver sur les équations paramétriques de la développée F_4 le premier théorème établi dans ce paragraphe.

2. Prenons les équations de la B_4 sous la forme

$$a^i(x_i)^2 = 0, \quad b^i(x_i)^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Une quadrique variable dans le faisceau linéaire tangentiel défini par ces deux quadriques a pour équation ponctuelle

$$c^i(x_i)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad c^i = \frac{1}{\frac{1}{a^i} + \frac{\lambda}{b^i}} = \frac{a^i b^i}{b^i + \lambda a^i}.$$

Remplaçons maintenant la quadrique base $b^i(x_i)^2 = 0$ par la nouvelle quadrique

$$b'^i(x_i)^2 = (b^i + \lambda a^i)(x_i)^2.$$

L'équation ponctuelle du nouveau faisceau linéaire tangentiel peut s'écrire

$$c'^i(x_i)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad c'^i = \frac{a^i b^i + \lambda (a^i)^2}{b^i + \lambda a^i}.$$

Comme

$$\lambda c'^i = (\lambda - l)c^i + \lambda a^i,$$

le système des lignes principales

$$a^i(x_i)^2 = 0, \quad b^i(x_i)^2 = 0, \quad c^i(x_i)^2 = 0$$

est également représenté par

$$a^i(x_i)^2 = 0, \quad b'^i(x_i)^2 = 0, \quad c'^i(x_i)^2 = 0.$$

Il reste inchangé quand une quadrique, et par suite les deux, varient dans le faisceau ponctuel de base B_4 .

En particulier prenons pour définir la B_4 les deux cônes S_1 et S_2 . On aura

$$a^1 = 0, \quad b^2 = 0,$$

d'où

$$c^1 = c^2 = 0.$$

⁽¹⁾ DARBOUT, *Principes de géométrie analytique*.

Les projections $c^j(x_j)^2 = 0$ ($j \neq 1$ et 2) des lignes principales, faites de la droite $S_1 S_2$, sont des coniques variant dans un faisceau linéaire tangentiel déterminé par $a^j(x_j)^2 = 0$ et $b^j(x_j)^2 = 0$.

Cela revient à dire que :

Les lignes principales se projettent de S_1 suivant les biquadratiques (p_1) découpées sur Q_1^1 par les cônes de sommet i_{12} circonscrits aux quadriques du faisceau tangentiel défini par Q_2^1 et Q_3^2 .

Résultat déjà obtenu au paragraphe I-7, d, à propos de la projection p_1 de la courbe L.

En langage métrique, les projections des lignes principales à partir de S_1 se font suivant les lignes de courbure de la quadrique Q_3^1 .

Nous allons mettre à profit ces résultats pour trouver des équations paramétriques commodes de la B_1 rapportée à ses lignes principales, d'où nous déduirons celles de la développée F_1 , et celles de sa deuxième arête.

Les lignes principales, d'après leur détermination géométrique, sont à l'intersection B_1 de deux quadriques avec la famille des quadriques « homofocales ». Les équations des deux quadriques étant

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \frac{t^2}{D} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{A+l} + \frac{y^2}{B+l} + \frac{z^2}{C+l} + \frac{t^2}{D+l} - 1 = 0,$$

celles des quadriques homofocales sont

$$(12) \quad \frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} + \frac{t^2}{D+\lambda} - 1 = 0.$$

Par un point $M(x, y, z, t)$ de B_1 passent 4 quadriques de ce faisceau tangentiel, de paramètres o, l, u et v , racines de l'équation (12) en λ .

On en tire les équations paramétriques de B_1 , les paramètres étant u et v (*)

$$(13) \quad B_1 \begin{cases} x^2 = \alpha(A+u)(A+v), \\ y^2 = \beta(B+u)(B+v), \\ z^2 = \gamma(C+u)(C+v), \\ t^2 = \delta(D+u)(D+v), \end{cases}$$

avec

$$\alpha = \frac{A(A+l)}{(A-B)(A-C)(A-D)},$$

les valeurs de β, γ, δ s'obtiennent par permutation circulaire sur les lettres A, B, C, D.

Dans les équations (13) de la B_1 (qui ne sont pas unicursales), les lignes u variable, ou v variable, sont les lignes principales. Une tangente principale MP

(*) Méthode utilisée par Darboux pour la détermination des lignes de courbure d'une cyclide (*Principes de géométrie analytique*).

porte donc le vecteur M'_u de composantes

$$x'_u = \frac{x}{2(A+u)}, \quad y'_u = \frac{y}{2(B+u)}, \quad z'_u = \frac{z}{2(C+u)}, \quad t'_u = \frac{t}{2(D+u)}.$$

En écrivant

$$\vec{OP} = \vec{OM} + wM'_u.$$

On obtient les équations de la développoïde en fonction des paramètres u, v, w sous la forme

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{wx}{2(A+u)}, & Y &= y + \frac{wy}{2(B+u)}, \\ Z &= z + \frac{wz}{2(C+u)}, & T &= t + \frac{wt}{2(D+u)}. \end{aligned}$$

Soit

$$(14) \quad F_4 \left\{ \begin{aligned} X^2 &= \alpha(A+u)(A+v) \left[1 + \frac{w}{2(A+u)} \right]^2, \\ Y^2 &= \beta(B+u)(B+v) \left[1 + \frac{w}{2(B+u)} \right]^2, \\ Z^2 &= \gamma(C+u)(C+v) \left[1 + \frac{w}{2(C+u)} \right]^2, \\ T^2 &= \delta(D+u)(D+v) \left[1 + \frac{w}{2(D+u)} \right]^2. \end{aligned} \right.$$

Quand on fixe u , la surface obtenue est le lieu des tangentes à la courbe u variable lorsque le point M décrit une courbe v variable. Elle doit donc constituer une développable de la développoïde. Effectivement, il est facile de constater que la droite MP admet alors pour enveloppe la courbe lieu du point M_1 de coordonnées

$$X_1 = x \frac{A+v}{A+u}, \quad y_1 = y \frac{B+v}{B+u}, \quad z_1 = z \frac{C+v}{C+u}, \quad t_1 = t \frac{D+v}{D+u},$$

où u est constant ⁽¹⁾. Les équations de la deuxième arête B_1 pour la développable F_4 sont donc (u et v variable)

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 &= \alpha \frac{(A+v)^2}{A+u} \\ y_1^2 &= \beta \frac{(B+v)^2}{B+u} \\ z_1^2 &= \gamma \frac{(C+v)^2}{C+u} \\ t_1^2 &= \delta \frac{(D+v)^2}{D+u} \end{aligned} \right\} \text{ arête secondaire } B_1.$$

Enfin il reste à vérifier qu'une développable de F_4 [u fixe dans (14)] appartient à une quadrique Q du faisceau ponctuel B_4 ,

$$\sum \frac{X^2}{A} - 1 + \mu \left(\sum \frac{X^2}{A+u} - 1 \right) = 0.$$

(1) Ce fait provient de la relation entre les vecteurs M'_u, M'_v, M''_{uv}

$$M'_v - M'_u + 2(v-u)M''_{uv} = 0$$

En remplaçant X, Y, Z, T par leurs valeurs (14), on obtient après simplification pour équation aux paramètres v, w des points communs

$$\sum \left[\frac{\Lambda + v}{(\Lambda - B)(\Lambda - C)(\Lambda - D)} \times \frac{\Lambda + l + \mu \Lambda}{\Lambda + u} \right] = 0.$$

En choisissant

$$\mu + 1 = \frac{l}{u} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mu = \frac{l}{u} - 1,}$$

$\frac{l}{u}$ est un facteur dans chaque terme de la somme Σ .

L'équation se réduit à

$$\sum \frac{\Lambda + v}{(\Lambda - B)(\Lambda - C)(\Lambda - D)} = 0.$$

Elle est identiquement vérifiée quel que soit v . Nous retrouvons le premier théorème du paragraphe II.

3. Il est inutile d'entrer dans le détail des démonstrations nécessaires à la généralisation, pour n quelconque, des résultats précédents qui concernent l'espace à quatre dimensions. Il suffit la plupart du temps de transposer les raisonnements.

L'arête B_n présente pour l'hypersurface $n - 2$ — développante F_n , lieu de ses tangentes principales, un ordre de multiplicité $2(n - 2)$.

Le système des courbes associées sur B_n , ou lignes principales, s'obtient comme trace sur B_n de l'intersection de $n - 3$ quadriques variables dans le faisceau tangentiel défini par deux quadriques fixes, mais quelconques, passant par B_n .

Une quadrique quelconque du faisceau ponctuel défini par B_n coupe la $n - 2$ — développante F_n suivant une variété réglée $V_{n-2}^{8(n-2)}$ qui est $n - 3$ — développante. Elle se projette à partir du sommet S_1 d'un cône du second ordre contenant B_n , suivant une développante, réciproque d'une $n - 3$ — développante F_{n-1} .

Outre l'arête B_n apparaissent, pour $n > 3$, $n - 3$ arêtes secondaires de la $n - 2$ — développante F_n , constituées par une même variété algébrique V_{n-2} , double pour F_n , dont l'ordre égale la classe d'une développante F_{n-1} , soit $12(n - 3)$.

La $n - 2$ — développante F_n est en effet de classe $12(n - 2)$.

Éclairons cependant quelques difficultés. Elles commencent quand on considère l'intersection avec F_n d'une quadrique Q du faisceau B_n . Cette intersection se projette de S_1 sur un E_{n-1} suivant le lieu des droites qui joignent les points de contact des hyperplans tangents communs aux deux quadriques Q_{n-1}^1 et B . Pour $n = 4$ ou $n - 1 = 3$, c'était simplement la développable circonscrite à deux quadriques. Pour $n - 1 > 3$, c'est une variété V_{n-2} réglée, corrélative de l'hyperbiquadratique B_{n-1} commune à deux hyperquadriques de E_{n-1} ; les hyperplans osculateurs à B_{n-1} , c'est-à-dire tangents à la développante F_{n-1}^u cor-

respondante, ont pour homologues les points de contact des droites de V_{n-2} avec une variété V_{n-3} qui constitue son arête. Comme il y a $n-3$ plans osculateurs qui contiennent un E_{n-3} déterminé tangent à B_{n-1} , il existe $n-3$ points de contact d'une droite de V_{n-2} avec son arête. V_{n-2} , qui admet $n-3$ arêtes, est donc $n-3$ -développôide. Pour calculer l'ordre de l'arête il faut la couper par un hyperplan quelconque, ce qui revient dans la figure primitive à chercher le nombre des hyperplans tangents à F_{n-1} passant par un point donné. Appelons ce nombre classe de la développôide F_{n-1} . Cherchons d'une manière générale la classe de la développôide F_n de E_n .

L'hyperplan P

$$u^i x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

est osculateur à la B_n

$$a^i (x_i)^2 = 0,$$

$$b^i (x_i)^2 = 0,$$

lorsque l'équation aux paramètres λ des quadriques du faisceau B_n tangentes à P admet une racine triple. Cette équation est

$$(15) \quad \sum \frac{(u^i)^2}{a^i + \lambda b^i} = 0,$$

obtenue à partir de l'équation tangentielle d'une quadrique $(a^i + \lambda b^i)(x_i)^2 = 0$ du faisceau ponctuel B_n . L'équation (15), d'ordre n , a pour coefficients des formes quadratiques en u^i . L'ordre du système obtenu en écrivant les conditions d'une racine triple ⁽¹⁾, c'est-à-dire la classe de la développôide F_n , est donc

$$12(n-2).$$

III. — APERÇU SUR LES CONGRUENCES D'ESPACES LINÉAIRES.

1. L'étude de la développôide F_i a trouvé son application dans la recherche de la surface focale E de la congruence des droites liées à la base d'un équipage de l'espace ordinaire (§ I-6). Elle a même été suggérée par cette application. Le pas franchi pour passer du plan à l'espace permet aussi d'accéder aux hyperespaces.

Considérons la famille d'espaces linéaires E_{n-2} obtenus par intersection des hyperplans tangents à deux quadriques Q_n^1 et Q_n^2 de l'espace E_n en deux points m_1, m_2 alignés avec un point fixe i_{12} . Elle généralise la congruence des droites (ι) de l'espace ordinaire; cette « congruence » d' E_{n-2} admet comme variété focale une section hyperplane E d'une développôide F_{n+1} , c'est-à-dire qu'un E_{n-2} quelconque de la famille, touche E en $n-1$ points qui sont les traces des $n-1$ tangentes principales au point M correspondant de la B_{n+1} associée. Donc :

Dans E_n , la variété focale des E_{n-2} d'intersection de deux hyperplans tangents à deux hyperquadriques Q_n^1 et Q_n^2 en deux points variables m_1 et m_2 alignés avec un point fixe i , est une hypersurface E, à $n-1$ dimensions, d'ordre $8(n-1)$, touchée en $n-1$ points par chaque E_{n-2} de la famille.

⁽¹⁾ SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 422.

Je n'insiste pas sur les développements relatifs à la surface E du paragraphe I-6, applicables ici. Je relève plutôt un deuxième exemple de variété focale d'une famille d' E_{n-2} dans E_n , rencontré à la fin du paragraphe I-5. Il s'agit de la « congruence » des E_{n-2} associés à un point m dans deux réciprociétés, lorsque m décrit une quadrique Q'_n particulière, variable dans un faisceau, congruence dont la variété focale est une V_{n-1}^* .

Dans ces deux exemples se présente une congruence algébrique d' E_{n-2} de l'espace E_n , qui dépendent de $n-1$ paramètres, et restent tangents à une variété algébrique V_{n-1} que chacun d'eux touche en $n-1$ points. C'est là un fait général :

Une famille ou congruence d' E_{n-2} à $n-1$ paramètres dans l'espace E_n admet pour variété focale propre une variété à $n-1$ dimensions touchée en $n-1$ points par chacun d'eux.

Définissons E_{n-2} par un point M et $n-2$ vecteurs $A_i (i=1, 2, \dots, n-2)$. Point et vecteurs sont fonctions des $n-1$ paramètres u_k . Dans E_{n-2} un point P quelconque a pour coordonnées x_i dans le repère A_i . O étant l'origine dans E_n , on a

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \sum (x_i \vec{A}_i).$$

Peut-on déterminer les $x_i (u_k)$ pour que le lieu de P soit une variété V_{n-1} tangente à E_{n-2} ? Il faut et il suffit pour cela que les $n-2$ vecteurs A_i et les $n-1$ vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u_k} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_k})$ soient dans un même E_{n-1} . Les x_i doivent donc vérifier les $n-2$ conditions

$$\left[A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}, \frac{\partial M}{\partial u_1} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_1}), \frac{\partial M}{\partial u_2} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_2}), \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-1}} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_{n-1}}) \right] = 0.$$

Dans l'espace E_{n-2} le point P(x_i) est ainsi à l'intersection de $n-2$ quadriques ayant en commun la matrice à n lignes et $n-1$ colonnes

$$\left| A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, \frac{\partial M}{\partial u_1} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_1}) \right| = 0,$$

qui représente un E_{n-1} . Changeons de repère dans E_{n-2} de façon que cet E_{n-1} soit défini par les coordonnées $X_1, X_2, \dots, X_{n-3}$. Les équations des quadriques deviennent alors

$$a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 + \dots + a_1^{n-3} X_{n-3} + b_1 = 0,$$

et leurs points communs, en dehors de E_{n-4} , vérifient

$$| a_1^1 \ a_1^2 \ \dots \ a_1^{n-3} \ b_1 | = 0,$$

équation de degré $n-1$, homogène par rapport aux deux coordonnées dont dépendent les a_i et b_i . Elle admet donc $n-1$ racines, et les quadriques $n-1$ points communs, qui sont $n-1$ points de contact de l'espace E_{n-2} avec sa variété focale.

2. Il est intéressant de se demander ce qu'il advient d'un E_p à q paramètres dans l'espace à n dimensions.

p est bien entendu inférieur à n .

Si $p + q < n$ E_p décrit une variété à $p + q$ dimensions.

Supposons $p + q \geq n$ et cherchons, si elle existe, la variété focale de la famille E_p . Nous procédons comme plus haut; les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_p$ de P dans le repère $A_i (i = 1, 2, \dots, p)$ doivent vérifier les conditions pour que les $p + q$ vecteurs

$$A_i, \frac{\partial M}{\partial u_k} + \sum \left(x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_k} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

appartiennent à un même E_{n-1} . Ces conditions sont en nombre $p + q - n + 1$.

Lorsque $q \leq n - 1$ elles déterminent donc dans E_p une variété à $n - 1 - q$ dimensions, que nous allons préciser. Son équation peut s'exprimer schématiquement par la matrice

$$\left\| A_i, \frac{\partial M}{\partial u_k} + \sum \left(x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_k} \right) \right\| = 0$$

formée de $p + q$ colonnes dont les éléments sont les n coordonnées des $p + q$ vecteurs. Les p premières colonnes ont des éléments constants, tandis que les q dernières sont linéaires par rapport aux inconnues x_i . On peut la remplacer par une autre dont tous les éléments sont linéaires et qui est formée par $n - p$ lignes et q colonnes. Donc :

Pour $n - p \leq q \leq n - 1$ une famille ou congruence d' E_p à q paramètres dans l'espace à n dimensions, admet pour variété focale propre une variété à $n - 1$ dimensions touchée par chaque E_p suivant une variété algébrique à $n - 1 - q$ dimensions d'ordre C_q^{n-p-1} ⁽¹⁾.

Exemple ($p = 2, q = 3, n = 5$). — Un E_2 à 3 paramètres dans l'espace à 5 dimensions reste en contact avec une variété fixe à 4 dimensions tout le long d'une cubique plane.

Enfin pour $q > n - 1$ la famille E_p n'admet plus de variété focale, elle sort de la famille des « congruences » pour rentrer dans celle des « complexes ». Lorsque q atteint la valeur $(p + 1)(n - p)$, on arrive à l' E_p le plus général de l'espace E_n .

3. Certaines congruences dans E_n peuvent être obtenues, comme celles du début, à partir de développoides définies dans un espace à $n + 1$ dimensions. Présentons à cette occasion la théorie générale des *tangentes principales d'une variété* V_p à p dimensions ($p \leq n - 2$). Nous reprenons l'exposé du paragraphe 1 pour le cas $p = n - 2$, cette fois pour p quelconque; les notations sont les mêmes, i valant $1, 2, \dots, p$. Il faut distinguer deux cas :

(1) C_q^{n-p-1} représente le nombre des combinaisons de q objets pris $n - p - 1$ à $n - p - 1$ ou $(n - p - 1)$.

a. $\boxed{2p < n.}$ Le lieu des E_p tangents en un point variable M d'une V_p située dans E_n est une variété V_{2p} . Les $2p$ vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial u_i} \text{ et } \sum_i \left(x_i \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} \right)$$

définissent un E_{2p} qui reste tangent à V_{2p} tout le long de la génératrice (x_i) . La variété V_{2p} est donc $2p-1$ -développable; c' est en ce sens que toute tangente à V_p peut être considérée comme principale.

Pour $2p < n$ toute tangente à V_p est principale.

Exemple. — V_p est l'intersection V_2^8 de trois hyperquadriques de l'espace à 5 dimensions.

b. $\boxed{2p \geq n.}$ Pour déterminer des tangentes situées dans E_p dont le lieu soit une variété $V_{n-1} n-2$ -développable, il faut écrire que les $2p$ vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial u_i} \text{ et } \sum_i \left(x_i \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} \right)$$

appartiennent à un même E_{n-1} . Cette condition s'exprime par l'annulation d'une matrice

$$\left\| \frac{\partial M}{\partial u_i}, \sum_i \left(x_i \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} \right) \right\| = 0,$$

formée de $2p$ colonnes dont les éléments sont les n coordonnées de chaque vecteur. Les p dernières colonnes sont linéaires par rapport aux inconnues x_i , les p premières n'en dépendent pas. On peut donc remplacer cette matrice par une autre formée par $n-p$ lignes et p colonnes dont tous les éléments sont linéaires. Les tangentes correspondantes décrivent alors dans E_p un cône de sommet M , de dimension $n-p-1$, d'ordre C_p^{n-p-1} . Donc :

La $n-2$ -développable V_{n-1} lieu des tangentes principales d'une V_p dans E_n , est un lieu de cônes algébriques dont les sommets décrivent V_p . Chaque cône a pour dimension $n-p-1$ et pour ordre C_p^{n-p-1} .

On établira, comme pour le cas $p = n-2$ du paragraphe I-1 :

Le cône générique de sommet M est défini dans E_p comme lieu des droites doubles d'un réseau linéaire de dimension $n-p-1$ de cônes du second ordre de sommet M , formés par les cônes des tangentes pour les sections par E_p des variétés de E_n qui contiennent V_p .

Dans une section hyperplane par un E_{n-1} , la congruence formée par les traces des E_p tangentes à V_p admet pour variété focale la trace de la développable V_{n-1} .

Nous arrêterons là ces considérations sur les congruences d'espaces linéaires, dont le développement, qui ne semble pas sans intérêt, sortirait de notre sujet.