Bulletin de la S. M. F.

Jacques Deny

Pierre Lelong

Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 89-112

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__89_0>

ÉTUDE DES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES DANS UN CYLINDRE OU DANS UN CÔNE;

PAR MM. JACQUES DENY ET PIERRE LELONG.

INTRODUCTION.

1. Les fonctions harmoniques et sousharmoniques dans une bande ont fait l'objet de divers travaux; citons par exemple un théorème de Walther (1), analogue au théorème des trois cercles de J. Hadamard : Si $u(x, y)$ est harmonique et bornée dans la bande $\alpha < x < \beta$, le maximum de u sur la droite d'abscisse x est une fonction convexe de x. J. Favard (2) en a donné diverses extensions, notamment pour les fonctions harmoniques de trois variables bornées dans une bande ou dans un cylindre.

I. Privaloff (3) a considéré ensuite le cas des fonctions sousharmoniques bornées supérieurement; parmi les nombreux résultats de son travail, signalons l'extension aux fonctions sousharmoniques dans un dièdre du théorème de Walther (4) et du théorème classique de Lindelöf (5).

Dans un mémoire récent, G. Hardy et W. Rogosinski (6) ont montré que si $u(x, y)$ est sousharmonique et bornée supérieurement dans la demi-bande $\alpha < x < \beta, y > y_0$, la fonction $\varphi(x) = \overline{\lim}_{y \to +\infty} u(x, y)$ est une fonction convexe de x, ou bien elle vaut identiquement $-\infty$. Par une transformation évidente, les auteurs en déduisent le théorème de l'indicatrice de Phragmen-Lindelöf pour les fonctions sousharmoniques de type fini.

Le but de ce travail est d'étendre ces derniers résultats aux fonctions sousharmoniques dans un demi-cylindre ou dans un secteur conique de l'espace R^p avec $p > 2$ dimensions, pour lesquelles apparaissent des difficultés nouvelles. Dans une première partie, nous rappelons quelques définitions et propriétés relatives aux

(1) A. WALTHER, [1].

(2) J. FAVARD, [1].

(3) PRIVALOFF, [1].

(4) Si $u(M)$ est sousharmonique et bornée supérieurement dans un dièdre, le maximum de u sur un demi-plan issu de l'arête du dièdre est une fonction convexe de l'angle que fait ce demi-plan avec une face du dièdre.

(5) Si $u(M)$ est sousharmonique dans le dièdre précédent, si l'on a $\overline{\lim}\, u(M) \leqq A$ en tout point-frontière, et si enfin $\frac{u(M)}{(MH)^k}$ est borné supérieurement, MH étant la distance de M à l'arête, alors on a $u(M) \leqq A$, pourvu que k soit inférieur à $\frac{\pi}{\theta}$, θ étant l'ouverture du dièdre.

(6) G. HARDY et W. ROGOSINSKI, [1].

fonctions quasi-sousharmoniques, ces fonctions jouant un rôle essentiel dans les énoncés valables pour $p > 2$. Nous démontrons également quelques lemmes relatifs à la capacité des ensembles cylindriques dans R^p.

Ces lemmes, et un théorème connu de M. Brelot et H. Cartan, permettent d'étendre, dans la seconde partie, le premier théorème de G. Hardy et W. Rogosinski (énoncé plus haut) sous la forme suivante : si $u(M)$ est une fonction sousharmonique bornée supérieurement dans un cylindre, sa limite supérieure, quand on s'éloigne à l'infini le long des parallèles aux génératrices, est une fonction quasi-sousharmonique. La démonstration utilise la famille des fonctions translatées de u parallèlement aux génératrices.

L'extension du théorème de Phragmen-Lindelöf proprement dit (pour une fonction sousharmonique à croissance exponentielle) est faite (théorème 3) par la même méthode; elle conduit à étudier une classe K_ρ de fonctions généralisant les fonctions sousharmoniques, à laquelle appartient sinon « l'indicatrice », du moins sa régularisée supérieure, qui n'en diffère que sur un ensemble de capacité extérieure nulle. Ces résultats sont complétés par divers théorèmes d'uniformité.

Dans la troisième partie nous faisons rapidement l'étude des fonctions sousharmoniques dans un cône, soit au voisinage de l'infini, soit, ce qui revient au même, au voisinage du sommet.

Enfin, les théorèmes d'uniformité rencontrés incidemment sont des propriétés des fonctions sousharmoniques et même sous-médianes pouvant s'étendre à une classe plus générale de fonctions, appelée classe φ_α. Dans un Addendum nous faisons une étude systématique de ces fonctions, qui semblent s'introduire naturellement dans divers problèmes d'analyse.

I. — Fonctions quasi-sousharmoniques.

2. Une fonction $u(M)$ définie dans un domaine D de l'espace euclidien R^p à p dimensions est dite *quasi-sousharmonique* lorsque :

a. Sa régularisée supérieure $\overset{\star}{u}$ (fonction semi-continue supérieurement égale au maximum de u en tout point M de D) est sousharmonique.

b. $u = \overset{\star}{u}$ *quasi-partout* (c'est-à-dire sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle).

Un théorème fondamental, dû à M. Brelot [1], et précisé par H. Cartan [2] s'énonce ainsi :

Si $\{u_n\}$ est une suite de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement sur tout compact de D, $\overline{\lim_n}\, u_n(M) = u(M)$ est quasi-sousharmonique ou vaut identiquement $-\infty$.

---

(1) M. Brelot, [2].

(2) H. Cartan, [2] et [3]. Le second travail cité est le développement des résultats énoncés dans le premier.

H. Cartan montre de plus que la borne supérieure d'une famille *quelconque* de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement sur tout compact de D est quasi-sousharmonique. Le théorème précédent est donc vrai pour des familles plus générales que des suites; nous l'utiliserons sous la forme suivante :

Si $u_t(\mathrm{M})$ $(a < t < b)$ est sousharmonique et bornée supérieurement sur tout compact indépendamment de t, $u(\mathrm{M}) = \overline{\lim\limits_{t \to b}}\, u_t(\mathrm{M})$ est quasi-sousharmonique ou vaut identiquement $-\infty$.

Soit $f(\mathrm{M})$ une fonction continue majorant $u = \overline{\lim\limits_{t \to b}}\, u_t$; on peut énoncer un théorème d'uniformité : *Si* K *est un compact de* D, *on a* $u_t(\mathrm{M}) < f(\mathrm{M}) + \varepsilon$ *pour* $\mathrm{M} \in \mathrm{K}$ *et* $t > t_0(\varepsilon, \mathrm{K})$. Ce théorème, qui étend un résultat déjà énoncé (¹), sera établi dans l'Addendum dans le cas le plus général des fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ (*cf.* propriété 5).

Nous allons maintenant établir quelques lemmes. $\mathrm{M} = \mathrm{M}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ désignera un point de R^p; $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ sa projection sur R^{p-1}.

Lemme 1. — *Pour qu'une fonction* $u(\mathrm{M})$ *indépendante de* x_p *soit quasi-sousharmonique dans* R^p *il faut et il suffit que* $u(m)$ *soit quasi-sousharmonique dans* R^{p-1} *si* $p \geqq 3$, *ou une fonction convexe si* $p = 2$.

1° Si u appartient à la classe $\mathrm{K}^{(2)}$ des fonctions qui possèdent des dérivées continues des deux premiers ordres, le lemme est une conséquence évidente de la relation $\Delta u \geqq 0$.

2° Si $u(\mathrm{M})$ est sousharmonique quelconque, elle est limite décroissante de fonctions sousharmoniques $u_n(\mathrm{M})$ de la classe $\mathrm{K}^{(2)}$, obtenues par médiation sphérique. Mais les $u_n(\mathrm{M})$ sont indépendantes de x_p, donc $u(m)$ est limite décroissante d'une suite de fonctions sousharmoniques (de fonctions convexes si $p = 2$); elle est elle-même sousharmonique (convexe si $p = 2$) dans R^{p-1}. Réciproquement si l'on suppose $u(m)$ sousharmonique dans R^{p-1}, le procédé de médiation fait voir que la fonction $u(\mathrm{M})$ prenant la valeur $u(m)$ quel que soit x_p est sousharmonique dans R^p.

3° Supposons maintenant $u(\mathrm{M})$ quasi-sousharmonique; le cas $p = 2$ n'est pas à envisager à nouveau, car $u(\mathrm{M})$ est alors nécessairement sousharmonique (²). Dans le cas général, la régularisée supérieure $\overset{\star}{u}(\mathrm{M})$ de $u(\mathrm{M})$ étant indépendante de x_p, $\overset{\star}{u}(m)$ est sousharmonique (d'après 2°). Il sera donc établi que $u(m)$ est quasi-sousharmonique si l'on montre que l'ensemble cylindrique E des points M tels que $u(\mathrm{M}) < \overset{\star}{u}(\mathrm{M})$, qui est de capacité extérieure nulle, a sur R^{p-1} une trace e de capacité extérieure nulle.

(¹) P. Lelong, [1], théorème 9.

(²) En effet l'ensemble E des points M où $u(\mathrm{M}) < \overset{\star}{u}(\mathrm{M})$ est constitué par des droites; or un segment de droite étant de capacité positive dans le plan, E est nécessairement vide.

Réciproquement si $u(m)$ est quasi-sousharmonique, $\overset{\star}{u}(m)$ est sousharmonique, donc aussi $\overset{\star}{u}(M)$. On voit donc que, pour achever la démonstration, il suffit d'établir le lemme suivant :

4. Lemme 2. — *Pour qu'un ensemble cylindrique* E *de* R^p *soit de capacité extérieure nulle, dans* R^p, *il faut et il suffit que sa trace e sur* R^{p-1} *soit de capacité extérieure nulle dans* R^{p-1}.

Nous appelons ensemble cylindrique le produit topologique E d'un ensemble e de R^{p-1} par un segment (de longueur finie ou non) de l'axe Ox_p; on peut d'ailleurs se limiter aux ensembles situés à distance finie, car une réunion dénombrable d'ensembles de capacité extérieure nulle est aussi de capacité extérieure nulle. Nous supposerons $p \geqq 3$, car E est vide si $p = 2$.

a. Si e est de capacité extérieure nulle il existe une fonction sousharmonique dans R^{p-1}, soit $u(m)$, valant $-\infty$ sur e, et peut-être hors de e, mais non identique à $-\infty$; la fonction $u(M)$ vaut $-\infty$ sur E et est sousharmonique dans R^p, d'après 3, 2°; donc E est de capacité extérieure nulle ([1]).

b. Supposons réciproquement E de capacité extérieure nulle. Pour montrer que e est de capacité extérieure nulle dans R^{p-1}, il suffira de construire une fonction $u(M)$ sousharmonique dans R^p, *indépendante* de x_p, et valant $-\infty$ en tout point de E, car $u(m)$ sera sousharmonique dans R^{p-1} et vaudra $-\infty$ en tout point de e.

A cet effet envisageons la portion E_1 de E pour laquelle on a

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k^2 \leqq \rho^2, \qquad 0 \leqq x_p \leqq h,$$

et plaçons-nous d'abord dans le cas $p \geqq 4$. D'après une remarque précédente, il suffit de montrer que la projection e_1 de E_1 sur R^{p-1} est de capacité extérieure nulle.

Par hypothèse il existe dans R^p une distribution négative μ_0 dont le potentiel U^{μ_0} vaut $-\infty$ en tout point de E_1, la masse totale m_0 étant finie; désignons par μ la distribution obtenue en superposant μ_0 et les distributions déduites de μ_0 par des translations parallèles à Ox_p et d'amplitudes h, $2h$, ..., kh, ..., $-h$, $-2h$, ..., $-kh$, ... Le potentiel U^μ a un sens, car la masse totale située dans la bande $kh \leqq x_p < (k+1)h$ est m_0, et par conséquent, si l'on néglige les masses

---

([1]) La démonstration utilise un théorème de H. Cartan ([2] et [3]) affirmant l'identité des ensembles de capacité extérieure nulle avec ceux appelés *polaires* par M. Brelot, c'est-à-dire les ensembles en lesquels une fonction sousharmonique peut valoir $-\infty$. Mais la définition d'un ensemble polaire ne suppose pas qu'il constitue l'ensemble *total* des points où une telle fonction vaut $-\infty$. Les ensembles de cette dernière classe sont caractérisés par la propriété d'être un G_δ de capacité extérieure nulle [cf. J. Deny, *Sur les infinis d'un potentiel*); *C. R. Acad. des Sc.*, 24 février 1947)].

pour lesquelles $-h < x_p < h$, on a, pour le potentiel $U^{\mu'}$ de la distribution restante

$$(1) \qquad 0 > U^{\mu'}(O) > 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_0}{(kh)^{p-2}} > -\infty.$$

Appelons λ la distribution obtenue en faisant le produit de composition de μ et de la masse-unité uniformément répartie sur le segment $0 \leq x_p \leq h$ de l'axe Ox_p (¹). Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$U^{\lambda}(M) = \frac{1}{h}\int_0^h U^{\mu}(x_1, x_2, \ldots, x_p + t)\,dt.$$

$U^{\lambda}(M)$ répond aux conditions requises; en effet elle est sousharmonique (il est évident qu'elle ne vaut pas identiquement $-\infty$), elle vaut $-\infty$ sur E_1, et enfin elle est indépendante de x_p, car U^{μ} est par construction une fonction périodique de x_p et de période h.

Dans le cas de R^3, la série (1) est divergente; on adaptera le raisonnement grâce à l'artifice suivant : On construit la distribution μ_0 comme précédemment, mais en la choisissant intérieure au cylindre d'axe Ox_p et de rayon 2ρ, puis on lui associe la distribution *positive* de densité linéaire $-m_0/h$ portée par une droite Δ parallèle à l'axe Ox_p et à distance $a > 2\rho$ de cet axe. La distribution μ est obtenue comme précédemment par translations et composition, mais à partir de la somme de ces deux distributions. Le potentiel U^{μ} a un sens, car on a, en négligeant encore les masses pour lesquelles $-h < x_p < h$:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m_0}{\sqrt{(k+1)^2h^2+4\rho^2}} - \frac{m_0}{\sqrt{a^2+k^2h^2}}\right] > U^{\mu'}(O) > 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m_0}{kh} - \frac{m_0}{\sqrt{a^2+(k+1)^2h^2}}\right],$$

et les deux séries sont convergentes.

On achève de la même façon, en remarquant que U^{μ} est sousharmonique *au voisinage de* E_1.

5. *Remarques.* — 1° On peut énoncer un théorème analogue au lemme 2, mais en faisant intervenir la capacité *intérieure*. La démonstration de la partie correspondant à b est beaucoup plus simple : en effet si e est de capacité intérieure positive, il existe une fonction harmonique $u(m)$ *bornée* dans R^{p-1}, dont l'ensemble des singularités appartient à e (²). L'ensemble des singularités de $u(M)$ est contenu dans E, qui est donc de capacité intérieure positive (³).

Au contraire, pour démontrer la partie correspondante à a, on pourra utiliser le procédé indiqué en b pour construire, en supposant E de capacité intérieure positive, une fonction harmonique bornée, indépendante de x_p, et dont l'ensemble des singularités appartient à E.

(¹) H. CARTAN, [1]. L'opération est légitime, car l'une des deux distributions est à noyau compact.

(²) Par exemple le potentiel capacitaire d'un ensemble fermé de capacité positive contenu dans e. Dans le cas du plan, on se placera à l'intérieur d'un cercle de rayon 1/2.

(³) Cf. par exemple M. BRELOT, [1].

2° On peut énoncer un résultat un peu plus général que le lemme 2 : Soit E un ensemble de R^p qui est le produit topologique d'un ensemble e de R^q par R^{p-q} (ou seulement par un domaine de R^{p-q}); pour que E soit de capacité extérieure nulle dans R^p, il faut et il suffit que e soit de capacité extérieure nulle dans R^q. La démonstration est analogue, et l'application aux fonctions quasi-sousharmoniques de R^p dépendant seulement de $x_1, \ldots, x_q$ est évidente.

6. Soit maintenant S^p la sphère unitaire de R^p. Si M, de coordonnées polaires r, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ est un point de R^p, $m(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1})$ désignera le point de S^p situé sur le rayon-vecteur OM.

On sait que le Laplacien en coordonnées polaires s'écrit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{p-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\delta u,$$

où δ désigne l'opérateur de Beltrami (¹). Si une fonction $u(m)$ vérifie $\delta u = 0$ dans un domaine de S^p, elle sera dite *fonction harmonique sur la sphère* dans ce domaine; $u(m)$ sera dite *sousharmonique sur la sphère* si elle est de la classe $K^{(2)}$ et vérifie $\delta u \geqq 0$, ou si elle est limite décroissante d'une suite de telles fonctions. Une projection stéréographique les transforme d'ailleurs en fonctions de même nature dans R^{p-1}. La transformation inverse, application de R^{p-1} sur S^p, nous permet de définir les ensembles de *capacité extérieure nulle sur la sphère,* et les fonctions *quasi-sousharmoniques sur la sphère.* Nous démontrons alors le

Lemme 3. — *Soit* $u(M) = u(m, r) = u(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1})$ *une fonction quasi-sousharmonique dans le cône* Γ *de* R^p *défini par* $0 < r < \infty$, $m \in D$, *où* D *est un domaine de la sphère unité* S^p. *Si* $u(m, r)$ *est indépendante de* r, *c'est une fonction quasi-sousharmonique sur la sphère dans* D.

Remarquons d'abord que pour qu'un ensemble conique E, formé de segments $R_1 \leqq r \leqq R_2$, $m \in e$, soit de capacité extérieure nulle, il faut et il suffit que sa trace e sur la sphère soit de capacité extérieure nulle sur la sphère. En effet, si A est un point de S^p isolé de e par un petit cercle, faisons correspondre à E l'ensemble cylindrique E' ayant pour base la projection stéréographique e' de e avec A comme centre de projection, et une hauteur finie h. Il existe entre E et E' une homéomorphie évidente, pour laquelle le rapport des distances de deux couples de points homologues est compris entre deux nombres positifs fixes. Or une telle homéomorphie transforme un ensemble de capacité extérieure nulle en un ensemble de même nature (²); d'autre part les ensembles e et e' sont simultanément de capacité extérieure nulle ou positive; la propriété énoncée résulte donc du lemme 2.

On achève la démonstration du lemme 3 en opérant de la même façon que pour le lemme 1.

(¹) Cf. par exemple G. Bouligand, [2], p. 22.
(²) M. Brelot, [4].

II. — Fonctions sousharmoniques dans un demi-cylindre.

7. $M = M(x_1, \ldots, x_p)$ désignant un point de R^p et $m = m(x_1, \ldots, x_{p-1})$ sa projection sur R^{p-1}, on considère un domaine D de R^{p-1} et le cylindre Γ de R^p défini par $m \in D$, $x_p > 0$.

Théorème 1. — *Si* $u(M)$ *est une fonction sousharmonique bornée supérieurement dans* Γ, $\varphi(m) = \overline{\lim\limits_{x_p \to +\infty}}\, u(x_1, \ldots, x_p)$ *est quasi-sousharmonique ou vaut identiquement* $-\infty$ *dans* D.

Soit en effet $u_t(M) = u(x_1, \ldots, x_p + t)$ $(t \geqq 0)$; $u_t(M)$ est sousharmonique dans Γ, et l'on a $\varphi(m) = \overline{\lim\limits_{x \to +\infty}}\, u_t(M)$. D'après le théorème de M. Brelot et H. Cartan rappelé au paragraphe 2, $\varphi(M)$ est quasi-sousharmonique dans Γ, où y vaut identiquement $-\infty$; de plus elle est indépendante de x_p. $\varphi(m)$ est donc, d'après le lemme 1, une fonction quasi-sousharmonique dans D, où y valant identiquement $-\infty$.

Remarques. — *a.* On peut évidemment supposer dans l'énoncé que u est seulement bornée supérieurement sur tout compact K de D décrit par m, cette borne pouvant dépendre de K.

b. Lorsque $p = 2$, $\varphi(m) = \varphi(x)$ est convexe (donc continue), ou vaut identiquement $-\infty$ (*Cf.* lemme 1). C'est le résultat donné par G. Hardy et W. Rogosinski.

c. Si $p > 2$, $\varphi(m)$ n'est pas nécessairement sousharmonique. Soit, par exemple une demi-droite Δ intérieure à Γ et parallèle à l'axe Ox_p. Plaçons sur Δ une distribution dont la densité linéaire est négative, croissante, et tend vers zéro assez vite pour que la masse totale soit finie. Il est aisé de vérifier que le potentiel engendré U, qui est sousharmonique dans Γ et vaut $-\infty$ en tout point de Δ, est tel que $\varphi(m)$ soit nulle en tout point de D, sauf sur la trace m_0 de Δ, pour laquelle on a $\varphi(m_0) = -\infty$. On construirait facilement des exemples analogues en substituant à Δ un ensemble de demi-droites dont la réunion est de capacité extérieure nulle.

d. Si $p = 3$ et si D est l'espace R^2 tout entier, on obtient le théorème suivant : *Si* u *est sousharmonique et bornée supérieurement dans le demi-espace* $x_3 > 0$, $\varphi(m)$ *est quasi-partout* (¹) *égale à une constante* a. Cela résulte de ce qu'une fonction sousharmonique bornée supérieurement dans tout le plan se réduit à une constante (²).

8. Voici maintenant quelques théorèmes d'uniformité :

Soit $f(m)$ *une fonction continue telle que l'on ait* $\varphi(m) \leqq f(m)$. *Pour tout compact* K *de* D *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$u(M) < f(m) + \varepsilon, \qquad \text{pour} \quad x_p > X(K, \varepsilon) \qquad (m \in K).$$

(¹) M. Keldych, [1], *cf.* aussi M. Brelot [6], p. 306.
(²) M. Brelot, [5].

L'énoncé est une conséquence directe du théorème d'uniformité rappelé dans la première partie.

Si $\varphi(m)$ vaut identiquement $-\infty$, la convergence de $u(M)$ vers cette valeur est donc uniforme sur tout compact de D (lorsqu'on fait tendre x_p vers $+\infty$).

Lorsque $p=2$, la fonction $\varphi(m)=\varphi(x)$ est continue (si elle ne vaut pas identiquement $-\infty$). On peut donc prendre $f(x)=\varphi(x)$; l'énoncé ainsi obtenu a été donné par G. Hardy et W. Rogosinski dans le Mémoire cité.

Plus généralement, si $f(m)$ est une fonction continue dans D, et si l'on a $\varphi(m)\leqq f(m)$ sur un compact K de D qui n'est effilé en aucun de ses points-frontière, il existe, pour tout $\varepsilon>0$, un voisinage de K, soit $V(K, \varepsilon)$ et un nombre $X(V, \varepsilon)$ tels que l'on ait $u(M)<f(m)+\varepsilon$ pour $m\in V(K, \varepsilon)$ et $x_p>X(V, \varepsilon)$.

En effet, il résulte de l'hypothèse faite sur K et de la notion de pseudo-limite (²) qu'il existe un voisinage $V_1(K, \varepsilon)$ de K dans lequel la régularisée $\overset{*}{\varphi}$ vérifie

$$\overset{*}{\varphi}(m)<f(m)+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (m\in V_1).$$

D'après le théorème d'uniformité précédent, on peut donc trouver, pour tout voisinage fermé de K intérieur à V_1, soit $\overline{V}(K, \varepsilon)$, un nombre $X(K, \varepsilon)$ tel que l'on ait $u(M)<f(m)+\varepsilon$ pour $m\in\overline{V}(K, \varepsilon)$ et $x_p>X(V, \varepsilon)$.

Signalons encore la propriété suivante : S'il existe dans D un ensemble e de capacité extérieure positive sur lequel on a $\varphi(m)\leqq a$, il existe un domaine d de D tel que l'on ait, pour tout $\varepsilon>0$, $u(M)<a+\varepsilon$ pour $x>X(d, \varepsilon)$, $m\in d$.

En effet, il existe au moins un point m_0 de e en lequel cet ensemble n'est pas effilé; en ce point la pseudo-limite de $\overset{*}{\varphi}$ est au plus égale à a; on a donc $\overset{*}{\varphi}(m_0)\leqq a$ et par conséquent $\overset{*}{\varphi}(m)<a+\frac{\varepsilon}{2}$ dans un voisinage de m_0. On achève comme précédemment.

Remarque. — On peut donner l'interprétation suivante du théorème d'uniformité. Soit d un domaine régulier complètement intérieur à D, et soit $f(m)=H^d_\varphi$ la fonction de Wiener correspondant à d avec donnée frontière φ (¹). La fonction $f(M)$, harmonique dans le cylindre γ correspondant à d est la *meilleure majorante harmonique à l'infini* de u dans γ.

Nous entendons par là que si $h(M)$ est une fonction harmonique bornée *inférieurement* dans γ et telle que l'on ait

$$\psi(m)=\varliminf_{x_p\to+\infty} h(M)\geqq\varlimsup_{x_p\to+\infty} u(M)=\varphi(m)$$

en tout point m de d, on a aussi, pour tout compact K de d,

$$h(M)>f(M)-\varepsilon, \qquad \text{pour} \quad x_p>X(\varepsilon, K), \qquad m\in K.$$

(¹) *Cf.* M. Brelot, [3]. Dans le cas présent où φ est quasi-sousharmonique sur $\bar{d}$, H^d_φ n'est autre que la meilleure majorante harmonique de $\overset{*}{\varphi}$ dans d.

On a, en effet,

$$\overline{\lim_{x_p \to +\infty}} \big(f(\mathrm{M}) - h(\mathrm{M})\big) = f(m) - \underline{\lim_{x_p \to +\infty}} h(\mathrm{M}) = f(m) - \psi(m).$$

Or $f = \mathrm{H}_\varphi^d \leqq \mathrm{H}_\psi^d$ et comme H_ψ^d est la meilleure minorante harmonique de la fonction quasi-surharmonique ψ et est par conséquent majorée dans d par cette dernière fonction, on en conclut

$$\overline{\lim_{x_p \to +\infty}} \big(f(\mathrm{M}) - h(\mathrm{M})\big) \leqq 0 \qquad (m \in d)$$

et le théorème d'uniformité appliqué à la fonction harmonique $f - h$ bornée supérieurement dans le cylindre γ donne le résultat.

9. **Cas d'une fonction harmonique.** — Si $u(\mathrm{M})$ est harmonique et bornée (dans les deux sens) dans Γ, la fonction $\psi(m) = \underline{\lim}_{x_p \to +\infty} u(\mathrm{M})$ est quasi-surharmonique. On a $\psi(m) \leqq \varphi(m)$ partout dans D; donc si l'égalité a lieu sur la frontière $\overset{*}{d}$ d'un domaine d complètement intérieur à D, c'est-à-dire si $u(\mathrm{M})$ admet, lorsque x_p tend vers $+\infty$, une limite pour tout point m de $\overset{*}{d}$, il en est de même partout dans d, et la fonction $\varphi(m)$ est alors harmonique dans d. De plus le théorème d'uniformité montre que cette limite est atteinte uniformément pour tout compact K de d.

Mais la méthode des familles normales donne ici un résultat plus précis. En effet, les fonctions $u_t(\mathrm{M})$ étant harmoniques et bornées dans Γ, il est bien connu qu'elles sont également continues sur tout compact de Γ. Un raisonnement classique montre alors que si la limite existe pour tous les points m d'un ensemble d'*unicité* e de D (c'est-à-dire un ensemble tel que toute fonction harmonique dans D soit identiquement nulle dès qu'elle s'annule sur e), cette limite existe également pour tout point m de D, et c'est une fonction harmonique dans D. De plus elle est atteinte uniformément pour tout compact de D.

Tout ensemble e possédant un point intérieur est évidemment un ensemble d'unicité. Dans le cas d'une bande plane ($p = 2$) les fonctions harmoniques dans le domaine D sont les fonctions linéaires, Tout ensemble constitué par deux points est un ensemble d'unicité.

Cas d'un cylindre indéfini. — Si Γ est infini dans les deux sens ($-\infty < x_p < +\infty$), le théorème de H. Cartan (§ 2) permet d'énoncer : Si u est sousharmonique et bornée supérieurement dans Γ, la fonction $\varphi_1(m) = \max_{-\infty < x_p < +\infty} u(\mathrm{M})$ est quasi-sousharmonique. Pour $p = 2$, $\varphi_1(m) = \varphi_1(x)$ est une fonction convexe, donc continue, de x.

Considérons encore, dans R^p, la région B définie par $\alpha < x_1 < \beta$. Si u est sousharmonique et bornée supérieurement dans B, la borne supérieure de u sur les hyperplans $x_1 = x$ est une fonction convexe de x (1). Il est d'ailleurs facile de

(1) J. Favard, [1]. Ce dernier théorème est énoncé dans le cas où u est harmonique. L'auteur montre également que la fonction φ_1 est sousharmonique dans le cas d'une fonction harmonique bornée dans un cylindre de R^3. Observons que φ_1 est alors continue.

le montrer directement, en raisonnant comme pour la propriété de convexité du maximum de u sur des sphères concentriques.

10. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la plupart des démonstrations, nous nous limiterons maintenant au cas où le domaine D de R^{p-1} est borné, et limité par un nombre fini de variétés à $p-2$ dimensions régulières (c'est-à-dire par exemple douées en tout point d'un hyperplan tangent).

Nous appellerons *constante fondamentale du domaine* D la plus petite valeur propre $\lambda_0 = \lambda_0(D)$ relative à D et à l'équation

$$(2) \qquad \Delta U + \lambda U = 0.$$

On sait [1] qu'il lui correspond une fonction propre $f(m)$ vérifiant l'équation (2), positive dans D, et s'annulant par continuité sur sa frontière $\overset{*}{D}$.

Si D′ est un domaine régulier de R^{p-1} contenant D, on a l'inégalité au sens strict $\lambda_0(D) > \lambda_0(D')$. Enfin, étant donné le domaine régulier D, on peut trouver un domaine régulier D′ contenant la fermeture $\overline{D}$ de D, et tel que $\lambda_0(D')$ soit aussi voisin qu'on veut de $\lambda_0(D)$.

Théorème 2. — *Soit* $u(M)$ *une fonction sousharmonique dans le demi-cylindre* Γ *vérifiant :*

a. $\overline{\lim_{M \to P}}\, u(M) \leqq A < \infty$ *pour tout point-frontière* P *de* Γ;

b. $u(M) \leqq \varepsilon(x_p) e^{\sqrt{\lambda_0} x_p}$, *où* $\varepsilon(x_p)$ *tend vers zéro lorsque* x_p *tend vers* $+\infty$, *et où* λ_0 *est la constante fondamentale du domaine* D.

Dans ces conditions, on a $u(M) \leqq A$ *dans* Γ.

Nous diviserons la démonstration en deux parties :

1° Supposons d'abord qu'il existe une constante positive B telle que

$$u(M) \leqq B e^{k x_p}, \quad \text{avec} \quad 0 < k < \sqrt{\lambda_0},$$

et soit D_1 un domaine régulier contenant la fermeture $\overline{D}$ de D, et dont la constante fondamentale h vérifie $k < h < \sqrt{\lambda_0}$. La fonction propre fondamentale $f(m)$ de D_1 est bornée inférieurement sur $\overline{D}$ par un nombre positif. D'autre part on vérifie aisément que $f(m)e^{h x_p}$ est harmonique dans le demi-cylindre Γ_1 correspondant à D_1 [car $f(m)$ est solution de l'équation (2) dans D_1 avec $\lambda = h^2$]; cette fonction harmonique est donc supérieure à un nombre positif fixe sur $\overline{\Gamma}$.

Si donc on forme la fonction

$$u_1(M) = u(M) - \eta f(m)\, e^{h x_p} \qquad (\eta > 0),$$

---

(1) L'équation (2) est bien connue. Elle s'introduit tout naturellement dans de nombreuses questions, notamment quand on recherche les fonctions harmoniques de la forme

$$u(M) = f(m) g(x_p).$$

On la rencontre donc quand on fait l'étude des fonctions harmoniques dans un cylindre (*cf.* notamment G. Bouligand, [1]).

on obtient une fonction sousharmonique dans Γ tendant uniformément vers $-\infty$ lorsque x_p tend vers $+\infty$. On peut donc trouver un nombre X tel que l'on ait $u_1(M) \leqq A$ dans Γ dès que x_p surpasse X, et l'on conclut aisément, à l'aide du « principe du maximum », qu'on a la même inégalité dans Γ tout entier.

Or ceci ayant lieu quel que soit $\eta > 0$, il en résulte bien l'inégalité $u(M) \leqq A$ dans Γ.

2° Supposons maintenant qu'on ait seulement $u(M) \leqq \varepsilon(x_p) e^{\sqrt{\lambda_0} x_p}$, et formons la fonction

$$u_2(M) = u(M) - \eta f_0(m) e^{\sqrt{\lambda_0} x_p} \qquad (\eta > 0),$$

où $f_0(m)$ est la fonction propre fondamentale de D. Soit d une boule complètement intérieure à D. $f_0(m)$ est bornée inférieurement sur $\overline{d}$ par un nombre positif, donc, lorsque x_p tend vers $+\infty$, $u_2(M)$ tend vers $-\infty$ uniformément lorsque m décrit $\overline{d}$. Mais la constante fondamentale du domaine $D - \overline{d}$ étant inférieure à λ_0, il résulte de la première partie de la démonstration que $u_2(M)$ est bornée supérieurement dans le demi-cylindre correspondant à $D - \overline{d}$ (par le plus grand des deux nombres A et B). Elle est donc bornée supérieurement dans Γ, et l'on a donc $u_2(M) \leqq A$ dans Γ tout entier, d'où, en faisant tendre η vers zéro, $u(M) \leqq A$ dans Γ.

Remarques. — *a*. Le théorème 2 serait inexact si l'on ne supposait pas que $\varepsilon(x_p)$ tende vers zéro lorsque x_p tend vers $+\infty$. Il suffit en effet de considérer par exemple la fonction $u(M) = e^{\sqrt{\lambda_0} x_p} f_0(m)$ qui est harmonique dans le demi-cylindre Γ, nulle sur sa frontière, et évidemment non bornée dans Γ.

b. Lorsque $p = 2$ et que D est l'intervalle $\alpha < x < \beta$, on a $\sqrt{\lambda_0} = \frac{\pi}{\beta - \alpha}$. Le résultat correspondant a été énoncé par G. Hardy et W. Rogosinski (*loc. cit.*) avec la restriction inutile que $u(x, y)$ soit sousharmonique également sur la frontière de la bande. Si $u(x, y)$ est le module d'une fonction analytique de Γ, on obtient un théorème classique de Lindelöf, énoncé habituellement pour un angle, cas auquel on se ramène immédiatement par une transformation conforme très simple.

11. Avant d'étendre aux espaces à plus de deux dimensions le théorème de l'indicatrice de Phragmen-Lindelöf, faisons quelques remarques simples sur le problème de Dirichlet relatif à l'équation (2) dans le cas où λ, positif, est inférieure à la constante fondamentale du domaine régulier d.

On sait que si la donnée frontière $\varphi(m)$ est continue et positive, il existe alors une fonction $f(m)$ unique, vérifiant l'équation (2) dans d, *positive*, continue su la fermeture $\overline{d}$, et égale à $\varphi(m)$ sur la frontière $\overset{*}{d}$.

Lorsque φ est semi-continue supérieurement, considérons une suite décroissante de fonctions continues φ_i admettant φ pour limite.

Les solutions correspondantes f_i tendent en décroissant vers la constante $-\infty$ ou vers une fonction f vérifiant l'équation (2); *cette limite est indépendante de la suite choisie.*

En effet, la suite f_i est décroissante, car $f_i - f_j$ est solution du problème pour la donnée frontière $\varphi_i - \varphi_j$, qui est non négative pour $i < j$. D'autre part un raisonnement classique montre l'indépendance par rapport à la suite choisie [1]; il suffit de s'appuyer sur la propriété bien connue : si $\{\varphi_i\}$ et $\{\varphi'_j\}$ sont deux telles suites, à tout indice i on peut associer un nombre $k(i, \varepsilon)$ tel que $\varphi'_j < \varphi_i + \varepsilon$ lorsque $j > k$.

Montrons enfin que f vérifie l'équation (2) dans d; en effet les fonctions

$$u_i(\mathrm{M}) = e^{\sqrt{\lambda}x_p} f_i(m)$$

sont harmoniques dans le cylindre γ correspondant à d, et décroissantes. Elles convergent donc uniformément sur tout compact de d vers $-\infty$ ou vers une fonction harmonique dans γ qui sera de la forme $e^{\sqrt{\lambda}x_p} f(m)$, et il en résulte que f vérifie l'équation (2). De plus la convergence de la suite $\{f_i\}$ est uniforme sur tout compact de d.

Nous appellerons cette fonction f solution du problème de Dirichlet pour l'équation (2) avec donnée frontière φ, Nous la supposerons définie dans $\bar{d}$ en la prenant égale à φ sur la frontière. Elle sera alors semi-continue supérieurement sur $\bar{d}$ [ce qui montre que la plus grande limite de f en tout point frontière m_0 est au plus égale à $\varphi(m_0)$].

12. Nous aurons encore besoin d'étudier les fonctions jouant vis-à-vis de l'équation (2) le même rôle que les fonctions sousharmoniques vis-à-vis de l'équation de Laplace. Nous considérerons donc la classe (K_ρ) des fonctions satisfaisant à l'une des définitions suivantes dont nous montrerons l'équivalence :

A. *$u(m)$ est dite de la classe (K_ρ) dans* D, *domaine de* R^{p-1}, *si*

$$u(\mathrm{M}) = u(m)\, e^{\rho x_p}$$

et sousharmonique dans le cylindre Γ *de* R^p *ayant pour base* D.

Si u est dérivable, on a donc, d'après A, $\Delta u + \rho^2 u \geqq 0$. Dans le cas général, u est seulement semi-continue supérieurement. On peut substituer à la définition usuelle du laplacien, celle des opérateurs de L. Schwartz [2]; d'où l'équivalence de la définition A avec la suivante :

B. *u est de la classe (K_ρ) dans* D *si :*

a. elle est semi-continue supérieurement.

b. la distribution $\Delta u + \rho^2 u$ est une mesure positive; on entend par là que pour toute fonction f infiniment dérivable et nulle hors d'un compact K de D on a

$$\int_{\mathrm{K}} u(\Delta f + \rho^2 f)\, d\tau \geqq 0 \quad [3].$$

---

[1] C'est le raisonnement utilisé pour montrer l'existence de la meilleure majorante harmonique d'une fonction sousharmonique.

[2] L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction*, etc. (*Ann. Univ. Grenoble*, 21, 1945, p. 57-74).

[3] On peut également remplacer la condition B par la suivante : les moyennes sphériques itérées $u_t(m)$ vérifient l'inégalité $\Delta u_t + \rho^2 u_t \geqq 0$.

Soit maintenant d un domaine régulier avec $\overline{d} \subset D$, assez petit pour que la constante fondamentale $\lambda_0(d)$ soit supérieure à ρ^2. Posons $u(M) = u(m) e^{\rho x_p}$ et construisons la solution $v(m)$ du problème de Dirichlet relatif à l'équation (2) et à d avec donnée frontière u (cf. § 11). $V(M) = v(m) e^{\rho x_p}$ est harmonique dans le cylindre Γ de base d. Il résulte alors du théorème (2) qu'on a $U(M) \leqq V(M)$ dans Γ; d'où $u(m) \leqq v(m)$ dans d.

Prenons en particulier pour d la boule $S(m, r)$ et désignons par $\mu^r(w)$ la moyenne superficielle de la fonction w sur la sphère $\overset{*}{S}(m, r)$; v étant solution de $\Delta v + \rho^2 v = 0$, il est bien connu qu'on a [1] pour $\rho \geqq 3$

$$\mu^r(v) = v(M) f_{p-1}(r)$$

avec

$$f_{p-1}(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) J_{\frac{p-3}{2}}(\rho r)}{\left(\rho \frac{r}{2}\right)^{\frac{p-3}{2}}} = \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\rho \frac{r}{2}\right)^{2k}}{k!\, \Gamma\left(k + \frac{p-1}{2}\right)}$$

On est donc conduit aux définitions suivantes :

C. *u est de la classe (K_ρ) si u est semi-continue supérieurement et si l'on a, pour tout domaine régulier d, avec $\lambda(d) < \rho^2$, l'inégalité $u \leqq v$, v désignant la solution du problème de Dirichlet relatif à d et à l'équation*

$$\Delta v + \rho^2 v = 0,$$

avec donnée frontière u.

D. *Dans le cas $p \geqq 3$, u est de la classe (K_ρ) si u est semi-continue supérieurement et si l'on a, en tout point m de* D :

$$\mu^r(u) \geqq u f_{p-1}(r)$$

pour r suffisamment petit.

On a vu l'équivalence des définitions A et B, et l'on a constaté que la définition A entraîne la propriété C, qui à son tour entraîne D pour $p \geqq 3$. Il reste à montrer que B est une conséquence de D.

Or, si u est dérivable, cela résulte immédiatement du développement

$$\mu^r(u) = u + \frac{r^2}{2(p-1)} \Delta u + \dots .$$

Dans le cas général, on peut justifier un calcul analogue par l'usage des distributions de L. Schwartz. On peut également *régulariser* u à l'aide de moyennes sphériques itérées.

Remarquons enfin que dans le cas $p = 2$ l'équivalence des définitions B et C est facile à établir par un calcul direct.

---

[1] Hilbert et Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, vol. 2, p. 261.

13. Théorème 3. — (*Généralisation de l'indicatrice de Phragmen-Lindelöf*). *Soit $u(M)$ une fonction sousharmonique dans le demi-cylindre Γ vérifiant $u(M) \leqq A e^{\rho x_p}$, où A est une constante positive et ρ un nombre réel quelconque, et soit $\varphi(m) = \overline{\lim}_{x_p \succ \infty} u(M)\, e^{-\rho x_p}$. La fonction $\overset{*}{\varphi}(m)$ régularisée supérieure de $\varphi(m)$ est de la classe (K_ρ) dans D, et l'ensemble des points $E[\varphi(m) < \overset{*}{\varphi}(m)]$ est de capacité extérieure nulle.*

On a en effet :

$$\varphi(m)\, e^{\rho x_p} = e^{\rho x_p} \overline{\lim}_{t \succ +\infty} u(x_1, x_2, \dots, x_p + t)\, e^{-\rho(x_p + t)}$$
$$= \overline{\lim}_{t \succ +\infty} u_t(M)$$

avec $u_t(M) = u(x_1, x_2, \dots x_p + t)\, e^{-\rho t}$; les fonctions $u_t(M)$ sont sousharmoniques et bornées supérieurement pour les points M de Γ, vérifiant $X' \leqq x_p \leqq X''$; il en résulte que $\varphi(m)\, e^{\rho x_p}$ est une fonction quasi-sousharmonique et par conséquent $\overset{*}{\varphi}(m)$ est de la classe (K_ρ) dans D.

Enfin l'ensemble $E[\varphi(m) < \overset{*}{\varphi}(m)]$ est la projection de l'ensemble cylindrique $E[\varphi(m)\, e^{\rho x_p} < \overset{*}{\varphi}(m)\, e^{\rho x_p}]$, qui est de capacité extérieure nulle; la seconde partie de l'enoncé résulte alors du lemme 2.

Remarques. — *a.* On peut énoncer un théorème d'uniformité :

Les hypothèses du théorème **3** *étant vérifiées et $f(m)$ étant une fonction continue au moins égale à $\varphi(m)$, on a, pour tout compact K de D :*

$$u(M) < [f(m) + \varepsilon]\, e^{\rho x_p} \quad \text{pour} \quad x_p > X(\varepsilon, K),\ m \in K.$$

En effet, soit P le point (m, ξ_p), avec $X' \leqq \xi_p \leqq X''$; $e^{\rho \xi_p}$ étant borné, le théorème d'uniformité énoncé au chapitre I (§ 2) donne : $u_t(P) < \overset{*}{\varphi}(m)\, e^{\rho \xi_p} + \varepsilon\, e^{\rho \xi_p}$ pour $t > T(\varepsilon, K)$, $m \in K$; pour obtenir le résultat, il suffit alors de multiplier les deux termes de l'inégalité précédente par $e^{\rho t}$ et de choisir pour M le point $(m, x_p = \xi_p + t)$.

b. Soit d un domaine régulier, avec $\overline{d} \subset D$ et $\lambda_0(d) > \rho^2$; soit f la solution du problème de Dirichlet relatif à d et à l'équation $\Delta f + \rho^2 f = 0$, avec donnée frontière $\overset{*}{\varphi}$; on peut dire que $F(M) = f(m)\, e^{\rho x_p}$ est la *meilleure majorante harmonique à l'infini* de la fonction $u(M)$ dans le demi-cylindre Γ de base d: si $H(M)$ est harmonique dans Γ, bornée inférieurement ou même seulement telle que $H(M)\, e^{-\rho x_p}$ soit bornée inférieurement et telle enfin que l'on ait :

$$\psi(m) = \underline{\lim}_{x_p \succ +\infty} H(M)\, e^{-\rho x_p} \geqq \overline{\lim}_{x_p \succ +\infty} u(M)\, e^{-\rho x_p} = \varphi(m)$$

en tout point m de d, alors on a nécessairement, pour tout compact K de d :

$$H(M) > F(M) - \varepsilon\, e^{\rho x_p} \qquad \text{pour} \quad x_p > X(\varepsilon, K),\ m \in K.$$

Nous omettons le détail de la démonstration, toute semblable à celle donnée pour la remarque analogue du § 8, remarque à laquelle celle-ci se réduit pour $\rho = 0$.

Il suffit de montrer que $f(m) - \psi(m)$ est non positive dans d, puits d'appliquer le théorème d'uniformité de la remarque précédente à la fonction $F(m) - H(m)$.

c. Dans le cas $p = 2$, le théorème 3 prend la forme suivante :

Si $\alpha < x_1 < x < x_2 < \beta$, avec $x_2 - x_1 < \pi/\rho$, on a $\varphi(x) \leqq f(x) = A \cos \rho x + B \sin \rho x$,

où A et B sont déterminés par les équations $f(x_1) = \varphi(x_1)$, $f(x_2) = \varphi(x_2)$.

Par la transformation $w = e^{-iz}$ on obtient la forme classique du théorème de Phragmen-Lindelöf, étendu aux fonctions sousharmoniques de deux variables par G. Hardy et W. Rogosinski. Il est bien connu qu'une telle fonction φ est continue.

III. — Fonctions sousharmoniques dans un cône. Étude a l'infini et au voisinage du sommet.

14. Nous ferons maintenant une étude rapide des fonctions sousharmoniques dans un cône; ce cas présentant de grandes analogies avec celui du cylindre, nous insisterons seulement sur les légères modifications qu'il faut apporter. Observons cependant qu'on ne peut passer directement de l'un à l'autre cas, car il n'existe pas, dans $R^p (p \geqq 3)$ de transformation jouant le rôle de $w = e^{-iz}$ dans le cas de R^2.

Un point M de R^p étant rapporté à ses coordonnées polaires r, $\varphi_1 \ldots \varphi_{p-1}$, ou plus brièvement à r et à la trace m du rayon vecteur OM sur la sphère unité S^p, nous désignerons par Γ_e le secteur conique défini par $r > r_0$ et $m \in D$, où D est un domaine de S^p, et par Γ_i le secteur défini par $r < r_0$, $m \in D$. L'étude d'une fonction sousharmonique $u(M)$ à l'infini dans Γ_e, ou au voisinage du sommet dans Γ_i est en réalité la même, car on passe de l'une à l'autre par une transformation de Kelvin ([1]).

Théorème 1 *bis*. — *Si $u(M)$ est sousharmonique et bornée supérieurement dans Γ_e (respectivement dans Γ_i), $\varphi(m) = \overline{\lim}_{r \to \infty} u(M)$ [respectivement $\varphi(m) = \overline{\lim}_{r \to 0} u(M)$] est quasi-sousharmonique ou identique à $-\infty$ sur le domaine sphérique* D.

On procédera comme pour le théorème 1; on appliquera le théorème de M. Brelot et H. Cartan, puis le lemme 3, à la famille de fonctions $u_t(M) = u(tr, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1})$ lorsqu'on fait tendre t vers $+\infty$ (respectivement vers zéro).

Remarques. — *a*. On obtient, comme au paragraphe 8, des théorèmes d'uniformité qu'on peut encore interpréter par la notion de meilleure majorante harmonique à l'infini (respectivement au voisinage du sommet).

b. Si $p = 2$, $\varphi(m) = \varphi(\theta)$ est sur le cercle unité une fonction convexe de θ (ou vaut $-\infty$).

([1]) *Cf.* notamment M. Brelot, [6].

c. Si Γ_i constitue un voisinage de O, $\varphi(m)$ est quasi-sousharmonique sur S^p tout entière; elle est donc constante quasi-partout sur S^3 lorsque $p=3$ (*cf.* § 7, remarque *d*). Mais ici la conclusion subsiste quel que soit *p*. En effet $u(M)$ est alors sousharmonique même en O [1]; elle admet donc en ce point une pseudo-limite $u(O)$. Si $\varphi(m)$ était inférieure à $u(O)$ sur un ensemble de capacité extérieure positive sur S^p, le théorème d'uniformité entraînerait [2] l'existence d'un petit secteur conique, de sommet O, sur lequel on aurait $u(M) < u(O) - \varepsilon$, ce qui est contraire à la notion de pseudo-limite.

d. Si *u* est harmonique et bornée dans Γ_i, et admet une limite $\varphi(m)$, lorsque *m* décrit la frontière d'un petit domaine sphérique intérieur à D, *u* admet une limite en O le long de tout rayon vecteur intérieur à Γ_i et *cette limite est une fonction harmonique de la direction* O*m*. Cette remarque généralise une propriété bien connue de l'intégrale de Poisson dans le cas du cercle [l'existence des limites $f(\theta_0+0)$ et $f(\theta_0-0)$ pour la donnée frontière en un point θ_0 entraîne que l'intégrale de Poisson admet une limite le long de tout rayon vecteur aboutissant en ce point, et cette limite est une fonction linéaire de la direction de ce rayon vecteur].

15. Nous nous bornerons par la suite au cas où le domaine sphérique D est régulier. Nous appellerons constante fondamentale de D la plus petite valeur propre relative à D et à l'équation

$$\delta f + \lambda_0 f = 0, \tag{3}$$

où δ est l'opérateur de Beltrami.

THÉORÈME 2 *bis*. — *Soit* $u(M)$ *sousharmonique dans* Γ_e (*resp.* Γ_i) *et vérifiant :*

a. $\overline{\lim}_{M \to P}\, u(M) \leq A$ *en tout point frontière* P *du secteur conique* (*sommet exclu*);

b. $u(M) \leq \varepsilon(r) r^\rho$, *où* ρ *est la racine positive* (*resp. négative*) *de l'équation* $\rho(\rho+p-2)=\lambda_0$, λ_0 *étant la constante fondamentale du domaine* D.

Alors $u(M) \leq A$ *dans* Γ_e (*resp.* Γ_i).

La démonstration suit pas à pas celle du théorème 2; il suffit de s'assurer que l'équation (3) sur S^p jouit des propriétés utilisées de l'équation (2) dans R^{p-1} [3].

---

(1) M. Brelot, [1].

(2) D'après une remarque analogue à un théorème énoncé au paragraphe 12.

(3) Cette équation se rencontre dans de nombreux problèmes classiques. On peut faire soit une étude directe, soit une projection stéréographique de S^p sur R^{p-1} à partir d'un point n'appartenant pas à D. En appelant $x_i (i=1, 2, \ldots, p-1)$ les coordonnées de la projection m_1 de m, il vient facilement

$$\Delta f(m_1) + R^2(m_1) f(m_1) = 0, \qquad \text{avec } R(m_1) = \left[1 + \overline{Om_1}^2\right]^{-1}.$$

L'équation intégrale correspondante n'est plus à noyau symétrique, mais à noyau de Schmidt. Son étude est bien connue (cf. par exemple Goursat, *Traité d'analyse*, 3).

D'autre part un calcul élémentaire montre que si $f(m)$ vérifie l'équation (3) avec $\lambda = \rho(\rho + p - 2)$, la fonction $v(M) = f(m) r^\rho$ est harmonique dans le secteur conique. On achève comme au paragraphe 14.

Observons qu'on déduit aisément du théorème 2 *bis*, la remarque suivante : Si u, sousharmonique dans Γ_i, vérifie la condition a, et si $u(M)\, r^{p-2}$ est bornée au voisinage du sommet, u est bornée dans Γ_i, quel que soit le domaine D. Mais cet énoncé est valable dans le cas d'un point frontière régulier d'un domaine quelconque (1).

Par analogie avec le paragraphe 12, nous dirons qu'une fonction $u(m)$, définie dans un domaine D de la sphère unité S^p est de la classe $(\mathcal{K}_\rho)$ si la fonction $U(M) = r^\rho u(m)$ est sousharmonique dans le cône de sommet O et de base D. On montrerait facilement que ces fonctions jouent vis-à-vis de l'équation $\delta u + \rho(\rho + p - 2) u = 0$, le même rôle que les fonctions sousharmoniques sur la sphère vis-à-vis de l'équation $\delta u = 0$; en particulier, si d est un domaine sphérique régulier dont la fermeture est intérieure à D et dont la constante fondamentale $\lambda_0(d)$ surpasse $\rho(\rho + p - 2)$, et si $v(m)$ est la solution du problème de Dirichlet, relatif au domaine sphérique d et à l'équation $\delta v + \rho(\rho + p - 2) v = 0$, on a $u(m) \leq v(m)$.

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 3 *bis*. — *Soit* $u(M)$ *sousharmonique dans* Γ_ρ *(respectivement* Γ_i*) vérifiant* $u(M) \leq A r^\rho$, *où* A *est une constante positive et* ρ *un nombre réel quelconque. Posons*

$$\varphi(m) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{u(M)}{r^\rho}, \qquad \left[resp.\ \varphi(m) = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{u(M)}{r^\rho} \right].$$

Alors $\varphi(m)$ *ne diffère que sur un ensemble de capacité extérieure nulle (sur la sphère) de sa régularisée supérieure* $\overset{\star}{\varphi}(m)$, *et cette dernière fonction est de la classe* $(\mathcal{K}_\rho)$.

Remarques. — *a*. On peut encore énoncer le théorème d'uniformité suivant : si $f(m)$ est une fonction continue majorant $\varphi(m)$, on a, pour tout compact K de D, $u(M) \leq [f(m) + \varepsilon] r^\rho$ pour $r > R(\varepsilon, K)$ [respectivement $r < R(\varepsilon, K)$].

b. On a vu que φ était quasi-sousharmonique pour $\rho = 0$. Il en est donc de même pour $\rho = 2 - p$. Cela résulte de ce que, en vertu de la transformation de Kelvin, $u(M) r^{p-2}$ est une fonction sousharmonique du point M' transformé de M dans l'inversion de centre O et de module 1.

IV. — Addendum. — Étude d'une classe de fonctions généralisant les fonctions sousharmoniques et sousmédianes.

16. On appelle fonctions sousmédianes dans un domaine D de R^p les fonctions sommables u qui sont en tout point M inférieures ou égales à leurs moyennes sur les boules de centre M contenues dans D. On trouvera une étude complète de ces

(1) M. Brelot, [8].

fonctions, qui généralisent les fonctions sousharmoniques, dans un travail récent de M. Brelot (1). Nous allons étendre un certain nombre de leurs propriétés à une classe plus générale de fonctions. Donnons d'abord quelques définitions.

Les fonctions $u(M)$ envisagées seront définies dans un domaine D de R^p, et sommables sur tout compact de D. $u^{(r)}(M)$ désignera la moyenne de u sur la boule $S(M, r)$ de centre M et de rayon r; c'est une fonction continue de M définie dans le domaine D_r constitué par les points de D situés à une distance supérieure à r de sa frontière $\overset{\star}{D}$.

$u^{(r,\rho)}$ désigne la fonction obtenue à partir de $u^{(r)}$ par une nouvelle médiation sur les boules de rayon ρ; elle est définie sur $D_{r+\rho}$, et l'on a

$$u^{(r,\rho)} = u^{(\rho,r)}.$$

$\overset{\star}{u}$ désigne la régularisée supérieure de u, c'est-à-dire la fonction égale en tout point M au maximum de u en ce point; elle est semi-continue supérieurement.

Soit $\alpha(r)$ une fonction non décroissante, définie pour $r > 0$ (ou tout au moins pour $0 < r < r_0$), et tendant vers zéro avec r. On introduit les deux classes suivantes :

Classe $\mathcal{C}_\alpha$: $\mathcal{C}_\alpha$ est la classe des fonctions $u(M)$ définies dans D telles que :

(*a*) $u(M)$ est sommable sur tout compact de D,

(*b*) $$u(M) \leq u^{(r)}(M) + \alpha(r).$$

Classe $\mathcal{C}_\alpha^\star$: $\mathcal{C}_\alpha^\star$ est la classe des fonctions $u(M)$ définies par la condition (*b*) et par la condition

(*a*)* $u(M)$ est semi-continue supérieurement dans D.

Exemples. — 1° Pour $\alpha(r) \equiv 0$, on obtient les fonctions sousmédianes et sousharmoniques. Celles-ci appartiennent d'ailleurs respectivement à toutes les classes $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\alpha^\star$.

Mais il est bien évident que la classe $\mathcal{C}_\alpha$, par exemple, peut contenir en général d'autres fonctions, et même des fonctions surharmoniques (2).

2° Soit $\beta(r)$ une fonction définie comme $\alpha(r)$, c'est-à-dire non décroissante, définie pour $t > 0$, et tendant vers zéro avec t. Soit $h(x)$ une fonction positive, définie pour $0 < x < \infty$, et telle que

$$|\log h(x+\xi) - \log h(x)| \leq \beta(|\xi|).$$

Soit enfin $\{f_i(M)\}$ une famille de fonctions sousmédianes dans le cylindre $\Gamma(m \in d,\ x_p > 0)$, *positives* et telles que

$$\frac{f_i(M)}{h(x_p)} \leq A < \infty..$$

(1) M. Brelot, [7].

(2) Il est très facile de voir que toute fonction surharmonique appartenant à la classe $\mathcal{C}_\alpha$ est continue dans D.

Alors

$$g_i(\mathrm{M}) = \frac{f_i(\mathrm{M})}{h(x_p)}$$

est de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ *dans* Γ, *avec* $\alpha(r) = \mathrm{A}\beta(r)$.

En effet on a

$$e^{-\beta(|\xi|)} \leq \frac{h(x_p + \xi)}{h(x_p)} \leq e^{\beta(|\xi|)}.$$

En désignant par $\xi_1, \ldots, \xi_p$, les coordonnées d'un point P voisin de l'origine, il vient, d'après $g_i(\mathrm{M} + \mathrm{P}) = \dfrac{f_i(\mathrm{M} + \mathrm{P})}{h(x_p + \xi_p)}$

$$\frac{e^{-\beta(|\xi_p|)}}{h(x_p)} f_i(\mathrm{M} + \mathrm{P}) \leq g_i(\mathrm{M} + \mathrm{P}).$$

En prenant les valeurs moyennes, on obtient

$$\frac{e^{-\beta(r)}}{h(x_p)} f_i^{(r)}(\mathrm{M}) \leq g_i^{(r)}(\mathrm{M}).$$

Comme f_i est sousmédiane, $f_i(\mathrm{M}) \leq f_i^{(r)}(\mathrm{M})$, d'où

$$e^{-\beta(r)} g_i(\mathrm{M}) \leq g_i^{(r)}(\mathrm{M}),$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} g_i(\mathrm{M}) &\leq g_i^{(r)}(\mathrm{M}) + [1 - e^{-\beta(r)}]\, g_i(\mathrm{M}) \\ &\leq g_i^{(r)}(\mathrm{M}) + \beta(r)\mathrm{A}, \end{aligned}$$

d'où le résultat; il fait comprendre le parti qu'on peut tirer de la notion de classe $\mathcal{C}_\alpha$ pour l'étude de certaines familles de fonctions sousmédianes non bornées supérieurement.

17. *Remarques.* — Des définitions on déduit immédiatement :

1° Une fonction u de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ est bornée supérieurement sur tout compact de D.

Soit en effet un compact K contenu dans D, et r un nombre tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}_r$; $u^{(r)}$ est continue dans D_r, donc bornée supérieurement sur K, et la relation (b) donne le résultat.

2° *Si* u *est de la classe* $\mathcal{C}_\alpha$ *dans* D, $u^{(\rho)}$ *est de la classe* $\mathcal{C}_\alpha^{\star}$ *dans* D.

En effet $u^{(\rho)}$ est continue, et la relation (b) donne, par médiation sur la boule $\mathrm{S}(\mathrm{M}, \rho)$:

$$u^{(\rho)}(\mathrm{M}) \leq u^{(r,\rho)}(\mathrm{M}) + \alpha(r) = u^{(\rho,r)}(\mathrm{M}) + \alpha(r).$$

Nous allons établir d'autres propriétés des fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$.

Propriété 1. — *L'ensemble* $\mathrm{E}\left[u(\mathrm{M}) < \overset{\star}{u}(\mathrm{M})\right]$ *des points* M *où une fonction* u *de la classe* $\mathcal{C}_\alpha$ *est inférieure à sa régularisée supérieure est de mesure nulle, et* $\overset{\star}{u}$ *est partout la limite des moyennes* $u^{(r)}$ *lorsque* r *tend vers zéro.*

En effet de la relation (b) et de la continuité en M de $u^{(r)}$ on déduit

$$\overset{\star}{u}(M) \leq u^{(r)}(M) + \alpha(r).$$

D'autre part il résulte de la définition même de u qu'on a, pour r assez petit,

$$u^{(r)}(M) \leq \overset{\star}{u}(M) + \varepsilon;$$

d'où, lorsque r tend vers zéro

$$\overset{\star}{u}(M) = \lim_{r=0} u^{(r)}(M).$$

Et comme d'autre part

$$\lim_{r=0} u^{(r)}(M) = u(M),$$

presque partout, le résultat est complètement établi.

Propriété 2. — *Si u est de la classe $\mathcal{C}_\alpha$, sa régularisée supérieure $\overset{\star}{u}$ est de la classe $\mathcal{C}_\alpha^\star$.*

Démontrons d'abord le lemme suivant : *Si $\{u_n\}$ est une suite convergente de fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ bornées uniformément en module dans D par une fonction localement sommable, la limite u est de la classe $\mathcal{C}_\alpha$.*

En effet les hypothèses permettent d'écrire

$$\lim_n u_n^{(r)} = u^{(r)}$$

(théorème de Lebesgue). On a donc

$$u = \lim_n u_n \leq \lim_n u_n^{(r)} + \alpha(r) = u^{(r)} + \alpha(r);$$

u est donc de la classe $\mathcal{C}_\alpha$.

La propriété 2 en résulte, car on a

$$\overset{\star}{u} = \lim_n u^{(\rho_n)}$$

pour une suite de nombres ρ_n tendant vers zéro (propriété 1); or les $u^{(\rho_n)}$ sont de la classe $\mathcal{C}_\alpha$; tout revient donc à montrer qu'ils sont bornés en module par une fonction localement sommable. Or on a, pour $\rho_n < r_0 + \varepsilon$, dans D_{r_0}

$$|u^{(\rho_n)}| \leq \max_{M \in \bar{D}_\varepsilon} |u(M)| + \alpha(r) < \infty \quad \text{(remarque 1°)}.$$

Conséquence. — La classe $\mathcal{C}_\alpha^\star$, qui est évidemment une sous-classe de la classe $\mathcal{C}_\alpha$, est constituée par les régularisées supérieures des fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$, dont elles diffèrent d'ailleurs seulement sur un ensemble de mesure nulle.

18. Le lemme utilisé pour la démonstration de la propriété 2 est un théorème sur les suites de fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$; nous allons étudier plus spécialement certaines familles de fonctions de cette classe.

Propriété 3. — *Si $\{u_n\}$ est une suite non croissante de fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ (respectivement $\mathcal{C}^\star_\alpha$) dont la limite u est localement sommable, u est de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ (respectivement $\mathcal{C}^\star_\alpha$). De plus $\overset{\star}{u}_n$ a pour limite $\overset{\star}{u}$.*

La première partie résulte du lemme précédent. Si de plus les u_n sont de la classe $\mathcal{C}^\star_\alpha$, u est semi-continue supérieurement, donc de la classe $\mathcal{C}^\star_\alpha$.

Montrons la seconde partie. Les $\overset{\star}{u}_n$ ont pour limite une fonction v de la classe $\mathcal{C}^\star_\alpha$ (d'après la première partie) et l'on a $\overset{\star}{u} \leq v$. Mais comme on a presque partout $u_n = \overset{\star}{u}_n$ (propriété 1), il en résulte $u = v$ presque partout. On en déduit $\overset{\star}{u} \equiv v$.

Propriété 4. — *L'enveloppe supérieure φ d'une famille $\mathcal{F}$ quelconque de fonctions u de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ uniformément bornées supérieurement sur tout compact de* D, *est une fonction de la classe $\mathcal{C}_\alpha$. La régularisée supérieure $\overset{\star}{\varphi}$ est la limite, lorsque r tend vers zéro, de l'enveloppe supérieure ψ_r des moyennes $u^{(r)}$.*

La démonstration de cette propriété, d'une utilisation commode pour les bornes supérieures et limites supérieures de fonctions sousharmoniques (¹) suit d'assez près celle donnée par M. Brelot pour les familles quelconques de fonctions sous-médianes (²).

Remarquons d'abord que l'enveloppe supérieure d'un nombre fini quelconque de fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ appartient à cette classe, car on a les relations évidentes

$$\varphi(\mathrm{M}) = \max_{u \in \mathcal{F}} u(\mathrm{M}) \leq \max_{u \in \mathcal{F}} u^{(r)}(\mathrm{M}) + \alpha(r) \leq \varphi^{(r)}(\mathrm{M}) + \alpha(r).$$

Il en sera de même pour une famille quelconque $\mathcal{F}$ pourvu que φ soit mesurable, de sorte que la première partie du théorème est complètement établie dans le cas d'une famille dénombrable.

On peut donc, sans modifier l'enveloppe supérieure φ, remplacer les fonctions u par leur enveloppe supérieure avec une fonction fixe de la famille. Observons également qu'on peut, par adjonction de nouvelles fonctions, supposer que $\mathcal{F}$ contient l'enveloppe supérieure d'un nombre fini quelconque de fonctions de la famille (³). Les u étant alors comprises entre deux fonctions fixes localement sommables, les fonctions $u^{(r)}(\mathrm{M})$ seront également continues sur $\overline{\mathrm{D}}_{r_0}$ (pour toute valeur particulière de r inférieure à r_0); leur enveloppe supérieure ψ_r est donc continue sur $\overline{\mathrm{D}}_{r_0}$.

Ceci étant, montrons d'abord que $\overset{\star}{\varphi} = \lim_{r=0} \psi_r$. On a évidemment

$$\varphi(\mathrm{M}) \leq \psi_r(\mathrm{M}) + \alpha(r),$$

d'où, ψ_r étant continue,

$$\overset{\star}{\varphi}(\mathrm{M}) \leq \psi_r(\mathrm{M}) + \alpha(r) \qquad \text{et} \qquad \overset{\star}{\varphi}(\mathrm{M}) \leq \varliminf_{r=0} \psi_r(\mathrm{M}).$$

(¹) Cf. P. Lelong, [1].
(²) M. Brelot, [7], p. 89.
(³) Une telle famille est un ensemble ordonné filtrant croissant de fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$; cette remarque permet à M. Brelot de simplifier quelque peu sa démonstration.

D'autre part les u vérifiant tous $u(\mathrm{M}) \leqq \overset{*}{\varphi}(\mathrm{M})$, on a

$$\psi_r(\mathrm{M}) \leqq \overset{*}{\varphi}^{(r)}(\mathrm{M}) \leqq \overset{*}{\varphi}(\mathrm{M}) + \varepsilon$$

pour r assez petit (en vertu de la semi-continuité). Donc $\overline{\lim}_{r=0} \psi_r(\mathrm{M}) \leqq \overset{*}{\varphi}(\mathrm{M})$, ce qui entraîne bien $\overset{*}{\varphi}(\mathrm{M}) \equiv \lim_{r=0} \psi_r(\mathrm{M})$.

Pour achever la démonstration, il reste à s'assurer que $\varphi(\mathrm{M})$ est localement sommable. Comme φ est comprise entre toute fonction u de la famille et $\overset{*}{\varphi}$, il suffit pour cela de montrer que pour toute boule fermée $\overline{\mathrm{S}}(\mathrm{M}_0, r)$ contenue dans D, il existe une fonction u_0 de $\mathcal{F}$ telle que $\overset{*}{\varphi}^{(r)}(\mathrm{M}_0) - u_0^{(r)}(\mathrm{M}_0)$ soit arbitrairement petit, ce qui montrera de plus que $\overset{*}{\varphi}^{(r)} = \psi_r$.

Or soit $\overline{\mathrm{D}}_{r_0}$ contenant $\overline{\mathrm{S}}(\mathrm{M}_0, r)$. On peut recouvrir $\overline{\mathrm{D}}_{r_0}$ par un nombre fini de boules telles que pour chacune d'elles il existe une fonction u de $\mathcal{F}$ vérifiant $0 \leqq \psi_\rho - u^{(\rho)} \leqq \varepsilon$ (pour une valeur $\rho < r_0$), car les $u^{(\rho)}$ sont également continus. L'enveloppe supérieure u_0 de ces fonctions u appartient à $\mathcal{F}$ et vérifie $0 \leqq \psi_\rho - u_0^{(\rho)} \leqq \varepsilon$ sur $\overline{\mathrm{D}}_{r_0}$. On a donc, par médiation sur $\overline{\mathrm{S}}(\mathrm{M}_0, r)$,

$$0 \leqq \psi_\rho^{(r)}(\mathrm{M}_0) - u^{(\rho, r)}(\mathrm{M}_0) \leqq \varepsilon.$$

Mais on a, quelle que soit la fonction u de $\mathcal{F}$,

$$| u^{(\rho,r)}(\mathrm{M}_0) - u^{(r)}(\mathrm{M}_0) | = | u^{(r,\rho)}(\mathrm{M}_0) - u^{(r)}(\mathrm{M}_0) | \leqq \varepsilon$$

dès que ρ est assez petit [indépendamment de la fonction u, en vertu de l'égale continuité des $u^{(r)}$]. D'où

$$0 \leqq \psi_\rho^{(r)}(\mathrm{M}_0) - u_0^{(r)}(\mathrm{M}_0) \leqq 2\varepsilon.$$

Comme d'autre part $\lim_{\rho=0} \psi_\rho^{(r)} = \overset{*}{\varphi}^{(r)}$, car les ψ_ρ tendent vers $\overset{*}{\varphi}$ et sont bornées en module par une fonction sommable, on voit que si ρ est suffisamment petit, on peut construire une fonction u_0 telle que

$$0 \leqq \overset{*}{\varphi}^{(r)}(\mathrm{M}_0) - u_0^{(r)}(\mathrm{M}_0) \leqq 3\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Si $u_t(\mathrm{M})$ est une fonction de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ bornée supérieurement sur tout compact de* D, *indépendamment de $t(a < t < b)$, $= \overline{\lim}_{t \to a} u_t$ est de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ pourvu qu'elle soit sommable.*

En effet $\varphi = \lim_{n} \left[\max_{t \geqq t_n} u_t\right]$ et le théorème résulte des propriétés 3 et 4.

19. Propriété 5. — *Soit $u_t(\mathrm{M})$ une fonction de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ bornée supérieurement sur tout compact de* D, *indépendamment de $t(a < t < b)$, et*

soit $f(\mathrm{M})$ *une fonction continue telle que* $\overline{\lim\limits_{t \to 0}}\, u_t(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{M}) \leqq f(\mathrm{M})$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout compact* K *de* D, *on a*

$$u_t(\mathrm{M}) \leqq f(\mathrm{M}) + \varepsilon \quad \textit{pour} \quad \mathrm{M} \in \mathrm{K} \quad \textit{et} \quad t > t_0(\varepsilon, \mathrm{K}).$$

Soit en effet $\{ t_n \}$ une suite de nombres tendant en croissant vers b; posons

$$\psi_n = \max_{t \geqq t_n} u_t;$$

ψ_n est de la classe $\mathcal{C}_\alpha$ (propriété 4), et l'on a

$$\varphi = \lim_n \psi_n.$$

Si donc K est un compact de D, les ensembles

$$e_n = \underset{\mathrm{M} \in \mathrm{K}}{\mathrm{E}} \left[\overset{*}{\psi}_n(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}) \geqq \varepsilon > 0 \right]$$

sont fermés (en vertu de la semi-continuité) et décroissants. Or leur intersection est vide, car on a $f \geqq \overset{*}{\varphi} = \lim \overset{*}{\psi}_n$ (Propriété 3). Ils sont donc vides à partir d'une certaine valeur de n, soit n_0, ce qui entraîne que pour $t > t_{n_0} = t_0(\mathrm{K}, \varepsilon)$, on a

$$u_t(\mathrm{M}) \leqq \overset{*}{\psi}_n(\mathrm{M}) < f(\mathrm{M}) + \varepsilon \qquad (\mathrm{M} \in \mathrm{K}).$$

Remarques. — 1° Si φ vaut identiquement $-\infty$, la convergence de u_t vers $-\infty$ est donc uniforme sur tout compact de D;

2° La plus petite fonction $f(\mathrm{M})$ satisfaisant à l'énoncé est $\overset{*}{\varphi}(\mathrm{M})$ lorsque celle-ci est continue;

3° Il est clair qu'on peut énoncer la propriété 5 en remplaçant $u_t(\mathrm{M})$ par une suite $\{ u_n(\mathrm{M}) \}$ de fonctions de la classe $\mathcal{C}_\alpha$.

4° Les propriétés qui précèdent permettent d'énoncer pour la classe φ_α des théorèmes analogues à ceux énoncés pour les fonctions sousharmoniques. En particulier si l'on se reporte aux notations et aux hypothèses du théorème 3, on verra que si l'on pose

$$\varphi(m) = \overline{\lim_{x_p \to \infty}}\, u(\mathrm{M}) e^{-\rho x_p},$$

$\psi(\mathrm{M}) = \varphi(m) e^{\rho x_p}$ est une fonction de classe φ_α dans R^p et $\varphi(m)$ ne diffère de sa régularisée $\overset{*}{\varphi}$ que sur un ensemble de mesure nulle dans R^{p-1}.

Remarquons enfin que les fonctions de la classe K_ρ appartiennent à une même classe φ_α, comme il résulte de leur propriété D (§ 12).

REFÉRENCES BILIOGRAPHIQUES.

G. Bouligand. — [1] *Sur les fonctions de Green et de Neumann du cylindre* (*Bull. Soc. Math. de France*, 42, 1914, p. 168-264).

[2] *Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet* (*Mémorial des Sciences math.*, Fasc. 11, 1926).

M. Brelot. — [1] *Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point* (*Actualités scientifiques et industrielles*, 139, 1934).

[2] *C. R. Acad. Sc.*, 207, 1938, p. 836.

[3] *Familles de Perron et problème de Dirichlet* (*Acta de Szeged*, 9, 1939, p. 133-153).

[4] *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel* (*Journ. de Math.*, 19, 1940, p. 319-337).

[5] *Sur les ensembles effilés* (*Bull. Soc. Math.*, 68, 1944, p. 12-37).

[6] *Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonction sousharmoniques* (*Annales E. N. S.*, 61, 1944, p. 301-332).

[7] *Fonctions sousharmoniques, presque sousharmoniques ou sousmédianes* (*Annales Univ. Grenoble*, 21, 1945, p. 75-90).

[8] *Fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point frontière irrégulier* (*Annales Univ. Grenoble*, 22, 1946, p. 205-219).

H. Cartan. — [1] *Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bull. Soc. Math. de France*, 69, 1941, p. 71-96).

[2] *Capacité extérieure et suites convergentes de potentiels* (*C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 944-946); *Sur les suites de potentiels de masses ponctuelles* (*Id.*, p. 994-996).

[3] *Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels* (*Bull. Soc. Math. de France*, 73, 1945. p. 74-106).

J. Favard. — [1] *Sur les fonctions harmoniques presque périodiques* (*Journ. de Math.*, 9e série, 6, 1927, p. 229-336).

G. Hardy and W. Rogosinski. — [1] *Theorems concerning functions subharmonic in a strip* (*Proc. of the Royal Soc.*, série A. 185, 1946, p. 1-14).

M. Keldych. — [1] *Sur le théorème de Liouville pour les fonctions sousharmoniques* (*Rec. math. de Moscou*, nouvelle série. 2, 1937, p. 369-376, en russe; résumé français p. 377).

P. Lelong. — [1] *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes* (*Annales E. N. S.*, 58, p. 89-177).

J. Privaloff. — [1] *Sur la théorie générale des fonctions harmoniques et subharmoniques* (*Rec. Math.*, *Moscou*, *N. S.*, 1, 1936, p. 103-120).

A. Walther. — [1] *Zeitschrift für die angewandte Math. und Mech.*, 1, 1921, p. 336-338.