BULLETIN DE LA S. M. F.

V. LALAN

Les surfaces envisagées dans leurs rapports avec leurs lignes minima

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 63-88
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__63_0>

LES SURFACES ENVISAGÉES DANS LEURS RAPPORTS AVEC LEURS LIGNES MINIMA;

PAR M. V. LALAN.

Les propriétés intrinsèques des lignes minima d'une surface, et les relations de position qu'elles entretiennent entre elles, doivent vraisemblablement mettre en lumière certains aspects profonds de la surface, qui risquent de demeurer inaperçus tant qu'on se borne au domaine réel. L'emploi des coordonnées minima, à lui seul, conduit déjà à certaines simplifications notables, dans l'expression des relations de Codazzi et de Gauss, par exemple; mais pour obtenir des résultats vraiment marquants, il ne faut pas s'arrêter à l'équation superficielle des lignes minima, qui n'a de rapport qu'avec le ds^2 : il faut faire intervenir les invariants de ces lignes, à savoir, l'invariant différentiel, élément du pseudo-arc, et l'invariant fini, pseudo-courbure, ou courbure affine, du quatrième ordre; ces invariants sont intimement liés aux courbures principales de la surface, principalement à la courbure moyenne. Il faut en outre introduire des invariants géodésiques appropriés. La méthode du repère mobile de M. E. Cartan, combinée avec sa théorie des systèmes différentiels en involution, est un instrument de prospection extrêmement précieux, qui se plie avec docilité aux différents problèmes qu'on lui soumet. J'ai essayé ici de l'adapter à l'étude de la surface envisagée dans ses rapports avec les lignes minima qui la constituent. Il m'a semblé opportun d'abandonner le triangle trirectangle, dont M. E. Cartan a tiré un si admirable parti dans le domaine réel (¹), pour adopter un trièdre apparenté au trièdre cyclique, qu'il utilise depuis longtemps dans l'étude des lignes minima (²).

La première partie de ce travail est consacrée à la définition du trièdre en question, que j'ai appelé *le trièdre biisotrope attaché à la surface*, et à l'étude de sa variation infinitésimale. Les composantes de cette variation, qui n'est pas un simple déplacement, s'expriment à l'aide de certaines grandeurs, invariants du troisième ordre de la surface, dont les relations avec les invariants classiques du second ordre sont des plus remarquables. Je précise ensuite les relations du trièdre biisotrope avec le trièdre trirectangle de Darboux, ainsi qu'avec certaines théories classiques, puis j'applique mes formules à des surfaces qui jouent un grand rôle dans ce travail : celles sur lesquelles les lignes d'égale courbure moyenne forment, avec leurs trajectoires orthogonales, un système isotherme.

(¹) *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris, Hermann, 1945.

(²) Voir en particulier le chapitre II de *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

Dans la seconde partie, je montre qu'en général une surface se trouve déterminée, abstraction faite de sa position, dès qu'on connaît l'expression des pseudo-arcs de ses lignes minima, qui sont deux formes différentielles *linéaires*. Au cours de la démonstration, je suis amené à construire un système de Pfaff, de trois équations, qui me paraît très important, en ce qu'il révèle un lien, peut-être insoupçonné, entre les conditions de Codazzi et de Gauss, et qu'il permet d'exprimer ces conditions par des équations différentielles *ordinaires*. Certaines surfaces ne sont pas déterminées univoquement par la donnée de leurs pseudo-arcs ; quand le cas se présente, la surface fait ordinairement partie d'un seul couple, mais certaines surfaces plus particulières font partie de familles à constantes, ou même à fonctions, arbitraires. Je me suis attaché à l'examen de la correspondance ponctuelle, que j'ai appelée *représentation conforme minima*, qui permet de représenter ces surfaces les unes sur les autres avec conservation des pseudo-arcs.

Le repère biisotrope pourrait être utilisé dans beaucoup d'autres problèmes, particulièrement dans ceux qui s'expriment par des systèmes différentiels admettant les lignes minima comme caractéristiques [1].

PREMIÈRE PARTIE.

Trièdre biisotrope attaché à une surface.

1. **Définition du trièdre B.** — Nous appellerons repère biisotrope un trièdre $\mathbf{MI_1I_2I_3}$ dans lequel les vecteurs $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{I_2}$ sont isotropes, tandis que $\mathbf{I_3}$ est unitaire et normal aux deux premiers. Un trièdre de cette espèce est déformable; il dépend de 7 paramètres : 3 pour la position de l'origine **M**, 2 pour la direction de $\mathbf{I_3}$, 2 enfin pour déterminer l'extension des vecteurs isotropes $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{I_2}$. Nous poserons

$$\mathrm{I_1 . I_2} = \mathcal{F}, \tag{1}$$

$\mathcal{F}$ est fonction des deux derniers paramètres mentionnés. Il reste encore à préciser la disposition intrinsèque du trièdre. En élevant au carré le produit mixte $(\mathbf{I_1} \wedge \mathbf{I_2}).\mathbf{I_3}$ ou $(\mathbf{I_1}, \mathbf{I_2}, \mathbf{I_3})$, on obtient

$$(\mathrm{I_1, I_2, I_3})^2 = \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{F} & 0 \\ \mathcal{F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\mathcal{F}^2. \tag{2}$$

Nous conviendrons de prendre

$$(\mathrm{I_1, I_2, I_3}) = -i\mathcal{F}, \tag{3}$$

ce qui a pour conséquence

$$\mathrm{I_1} \wedge \mathrm{I_2} = -i\mathcal{F}\mathrm{I_3}, \qquad \mathrm{I_2} \wedge \mathrm{I_3} = -i\mathrm{I_2}, \qquad \mathrm{I_3} \wedge \mathrm{I_1} = -i\mathrm{I_1}. \tag{4}$$

---

[1] Le contenu de ce mémoire a fait l'objet de deux Notes insérées aux *Comptes rendus*, 222, p. 632-633 et 223, p. 569-571.

La variation infinitésimale d'un tel trièdre vérifie les formules

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} dM &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3,\\ dI_1 &= \omega_{11} I_1 \qquad\qquad + \omega_{13} I_3,\\ dI_2 &= \qquad\quad \omega_{22} I_2 + \omega_{23} I_3,\\ dI_3 &= \omega_{31} I_1 + \omega_{32} I_2.\end{aligned}\right.$$

Nous avons fait $\omega_{12} = 0$ à cause de $I_1^2 = 0$, d'où $I_1 . dI_1 = 0$; $\omega_{21} = 0$, à cause de $I_2^2 = 0$, d'où $I_2 . dI_2 = 0$; $\omega_{33} = 0$, à cause $I_3^2 = 1$, d'où $I_3 . dI_3 = 0$. Entre les 9 formes qui apparaissent dans (5), il existe deux relations linéaires qu'on obtient en différentiant $I_1 . I_3 = 0$ et $I_2 . I_3 = 0$, à savoir

$$(6)\qquad \mathcal{F}\omega_{32} + \omega_{13} = 0, \qquad \mathcal{F}\omega_{31} + \omega_{23} = 0.$$

On a enfin, du fait de (1),

$$(7)\qquad \frac{d\mathcal{F}}{\mathcal{F}} = \omega_{11} + \omega_{22}.$$

A une surface quelconque, au point M, nous attachons un trièdre biisotrope : I_3 sera normal à la surface et, par conséquent, I_1 et I_2 tangents aux lignes minima de la surface. Ce trièdre est d'ordre un. Il dépend des deux paramètres principaux qui fixent M sur la surface, et en outre de deux paramètres secondaires, les paramètres d'extension de I_1 et I_2. Pour un trièdre qui varie en restant d'ordre un, on a identiquement, dans les formules (5),

$$\omega_3 = 0, \qquad \text{d'où} \quad d\omega_3 = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad [\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] = 0.$$

Les formes ω_{13} et ω_{23} s'expriment donc linéairement en fonction des formes principales ω_1, ω_2

$$(8)\qquad \omega_{13} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_{23} = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2.$$

La forme asymptotique $\Phi = - dM . dI_3$ s'écrit, compte tenu de (6) et (7),

$$(9)\qquad \Phi = -\omega_1\omega_{32}\mathcal{F} - \omega_2\omega_{31}\mathcal{F} = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = \alpha\omega_1^2 + 2\beta\omega_1\omega_2 + \gamma\omega_2^2.$$

Les coefficients d'ordre un, α, β, γ, dépendent des deux paramètres secondaires; il en est de même de $\mathcal{F}$. La différentiation de (8) donne

$$\begin{aligned}[\omega_{11}\omega_{13}] &= [d\alpha\omega_1] + [d\beta\omega_2] + \alpha[\omega_1\omega_{11}] + \beta[\omega_2\omega_{22}],\\ [\omega_{22}\omega_{23}] &= [d\beta\omega_1] + [d\gamma\omega_2] + \beta[\omega_1\omega_{11}] + \gamma[\omega_2\omega_{22}].\end{aligned}$$

Si l'on désigne par $\delta\alpha$ la variation de α quand on ne fait varier que les paramètres secondaires, et par e_{ij} ce que devient ω_{ij} quand on y annule les différentielles des paramètres principaux, ces formules donnent (puisque $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $e_{13} = 0$, $e_{23} = 0$)

$$\begin{aligned} e_{11}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) &= \delta\alpha\omega_1 + \delta\beta\omega_2 - \alpha e_{11}\omega_1 - \beta e_{22}\omega_2,\\ e_{22}(\beta\omega_1 + \gamma\omega_2) &= \delta\beta\omega_1 + \delta\gamma\omega_2 - \beta e_{11}\omega_1 - \gamma e_{22}\omega_2,\end{aligned}$$

d'où

$$\delta\alpha = 2\alpha e_{11}, \qquad \delta\beta = \beta(e_{11} + e_{22}), \qquad \delta\gamma = 2\gamma e_{22}.$$

D'après cela, si α et γ ne sont pas nuls, on peut les ramener à l'unité au moyen d'une détermination convenable des paramètres secondaires en fonction des paramètres principaux. Cela fait, β et $\mathcal{F}$ deviennent des invariants du second ordre de la surface. C'est le trièdre ainsi particularisé, d'ordre deux, que nous appellerons le *trièdre biisotrope attaché à la surface*, ou plus brièvement, le trièdre B.

Lorsqu'on se sert de ce trièdre, les deux formes fondamentales de la surface sont

$$ds^2 = 2\mathcal{F}\omega_1\omega_2, \qquad \Phi = \omega_1^2 + 2\beta\omega_1\omega_2 + \omega_2^2.$$

La signification des deux invariants β et $\mathcal{F}$ s'obtient en calculant la courbure moyenne H et la courbure totale K

$$\mathrm{H} = \frac{-\mathcal{F}\beta}{-\mathcal{F}^2} = \frac{\beta}{\mathcal{F}}, \qquad \mathrm{K} = \frac{1-\beta^2}{-\mathcal{F}^2} = \mathrm{H}^2 - \frac{1}{\mathcal{F}^2}.$$

Désignons par A la demi-différence des courbures principales a et c. On a évidemment, $\mathrm{K} = \mathrm{H}^2 - \mathrm{A}^2$, donc $\mathrm{A}^2 = \frac{1}{\mathcal{F}^2}$. En rangeant convenablement les directions principales, on peut faire en sorte que $\mathrm{A} = \frac{1}{\mathcal{F}}$, et $\beta = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}$. Les deux formes de la surface sont alors

$$ds^2 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\mathrm{A}}, \qquad \Phi = \omega_1^2 + 2\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}\omega_1\omega_2 + \omega_1^2. \tag{10}$$

On a supposé α et γ différents de zéro. Ces coefficients ne sont nuls qu'aux ombilics de la surface; de tels points sont donc exclus de nos considérations. Sur une sphère, la théorie présente est inapplicable. Le coefficient $\mathbf{A} = \frac{a-c}{2}$, qui est nul aux ombilics, sera appelé l'*asphéricité* de la surface.

2. **Signification du trièdre B.** — Cherchons d'abord la signification géométrique des formes invariantes du second ordre ω_1, ω_2.

Si nous lions les paramètres principaux par $\omega_2 = 0$, ω_1 devient une différentielle dt, et M parcourt la ligne minima (L_1) de la surface. Or les formes ω_{11} et ω_{22} sont linéaires en ω_1 et ω_2. Posons

$$\omega_{11} = p\omega_1 + r\omega_2, \qquad \omega_{22} = s\omega_1 + q\omega_2, \tag{11}$$

p, q, r, s sont des invariants du troisième ordre. La variation du trièdre B se déduit de (5)

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mathrm{I}_1, \qquad \frac{d\mathrm{I}_1}{dt} = p\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3, \qquad \frac{d\mathrm{I}_2}{dt} = s\mathrm{I}_2 + \beta\mathrm{I}_3, \qquad \frac{d\mathrm{I}_3}{dt} = -\frac{\beta}{\mathcal{F}}\mathrm{I}_1 - \frac{1}{\mathcal{F}}\mathrm{I}_2. \tag{12}$$

On a donc

$$\mathrm{M}'_t = \mathrm{I}_1, \qquad \mathrm{M}''_{t^2} = p\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3, \qquad \mathrm{M}'''_{t^3} = \left(p'_t + p^2 - \frac{\beta}{\mathcal{F}}\right)\mathrm{I}_1 - \frac{1}{\mathcal{F}}\mathrm{I}_2 + p\mathrm{I}_3. \tag{13}$$

Or le pseudo-arc σ de la ligne minima (L_1) vérifie, comme on sait,

$$d\sigma^2 = i\,\frac{(\mathrm{M}'\mathrm{M}''\mathrm{M}''')_t}{(\mathrm{M}''_{t^2})^2}\,dt^2.$$

Remplaçant dans cette formule $\mathbf{M}'_t$, $\mathbf{M}''_{t^2}$, $\mathbf{M}'''_{t^3}$ par leurs valeurs (13) et tenant compte de (3), il vient

$$d\sigma^2 = dt^2 = \omega_1^2.$$

Ainsi ω_1, quand $\omega_2 = 0$, est *la différentielle du pseudo-arc de* (L_1) (¹).

Des calculs analogues, effectués sur l'autre ligne minima (L_2), donnent un résultat légèrement différent : la relation entre le pseudo-arc σ de (L_2) et ω_2 est $d\sigma^2 = -\omega_2^2$; c'est donc $i\omega_2$ qui est la différentielle du pseudo-arc de (L_2). Pour simplifier l'écriture, je proposerais d'introduire, dans l'étude de toute courbe minima, à côté du pseudo-arc σ, un paramètre τ, qu'on pourrait appeler le *pseudo-arc indirect*, et qui vérifierait $d\tau = i\,d\sigma$. L'emploi de ce paramètre conduit à attacher à la courbe un trièdre cyclique $MK_1K_2K_3$ *indirect*, c'est-à-dire satisfaisant à la condition $(K_1, K_2, K_3) = -i$ (au lieu de i). Les formules de Serret-Frenet correspondant à ce trièdre et à ce paramètre sont identiques aux formules classiques

$$\frac{dM}{d\tau} = K_1, \qquad \frac{dK_1}{d\tau} = K_2, \qquad \frac{dK_2}{d\tau} = lK_1 - K_3, \qquad \frac{dK_3}{d\tau} = -lK_2.$$

On vérifie facilement que l'invariant l qui y figure (invariant indirect) est simplement *opposé* à l'invariant qui se présente dans les formules usuelles. Avec cette convention, on voit que ω_2 est *la différentielle du pseudo-arc indirect de* (L_2).

Revenons à la courbe minima (L_1) et appelons $MJ_1J_2J_3$ son trièdre cyclique intrinsèque (direct). La comparaison des formules (12) avec celles de Serret-Frenet donne, puisque $d\sigma = dt$,

$$(14) \qquad J_1 = I_1, \qquad J_2 = pI_1 + I_3, \qquad J_3 = -\frac{p^2}{2}I_1 + \frac{1}{\mathcal{F}}I_2 - pI_3,$$

et, si l'on appelle h l'invariant (direct) de (L_1), on a

$$(15) \qquad h = \frac{dp}{d\sigma} + \frac{p^2}{2} - H.$$

De même, $MK_1K_2K_3$ étant le trièdre cyclique indirect de (L_2), on aura

$$(16) \qquad K_1 = I_2, \qquad K_2 = qI_2 + I_3, \qquad K_3 = -\frac{q^2}{2}I_2 + \frac{1}{\mathcal{F}}I_1 - qI_3,$$

et l'invariant indirect l de (L_2) sera donné par

$$(17) \qquad l = \frac{dq}{d\tau} + \frac{q^2}{2} - H.$$

Les formules (14) et (16) se résolvent

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} I_1 &= J_1, \\ I_3 &= J_2 - pJ_1, \\ I_2 &= \mathcal{F}\left(J_3 + pJ_2 - \frac{p^2}{2}J_1\right), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} I_2 &= K_1, \\ I_3 &= K_2 - qK_1, \\ I_1 &= \mathcal{F}\left(K_3 + qK_2 - \frac{q^2}{2}K_1\right). \end{aligned}\right.$$

(¹) On trouve déjà une proposition équivalente dans un mémoire de E. Vessiot, *Contribution à la géométrie conforme* (*Bull. de la Soc. Math.*, 54, 1926, pp. 139-179).

Le trièdre biisotrope $MI_1I_2I_3$ attaché à la surface se trouve ainsi clairement situé tant par rapport au trièdre cyclique direct de (L_1) que par rapport au trièdre cyclique indirect de (L_2).

3. **Invariants du troisième ordre. Nouvelle expression des relations de Codazzi et de Gauss.** — Les invariants r et s des formules (11) se calculent par des dérivations à partir des formes ω_1 et ω_2, que nous appellerons les *formes minima*. En effet, les formules $d\omega_1 = [\omega_1\omega_{11}]$ et $d\omega_2 = [\omega_2\omega_{22}]$ s'écrivent, d'après (11)

$$d\omega_1 = r[\omega_1\omega_2], \qquad d\omega_2 = s[\omega_2\omega_1] = -s[\omega_1\omega_2]. \tag{19}$$

On voit que r et s ne sont nuls que si ω_1 et ω_2 sont des différentielles exactes. Les invariants p et q figurent dans la différentielle de Λ, car (7) donne, compte tenu de $\Lambda = \frac{1}{\mathfrak{F}}$,

$$\frac{d\Lambda}{\Lambda} = -\omega_{11} - \omega_{22} = -(p+s)\omega_1 - (q+r)\omega_2. \tag{20}$$

Les relations de Codazzi s'obtiennent en différentiant extérieurement

$$\omega_{13} = \omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_{23} = \beta\omega_1 + \omega_2.$$

Le calcul donne, en indiquant par les indices 1 et 2 des dérivées covariantes,

$$\beta_1 = \beta(p+s) - 2r, \qquad \beta_2 = \beta(q+r) - 2s,$$

et, si l'on introduit la courbure moyenne $H = \Lambda\beta$, il vient

$$H_1 = -2r\Lambda, \qquad H_2 = -2s\Lambda,$$

ce qui se condense en

$$\frac{dH}{2\Lambda} = -r\omega_1 - s\omega_2. \tag{21}$$

C'est une forme intéressante des relations de Codazzi. On en déduit de nombreuses conséquences. Si, par exemple, la surface est à courbure moyenne constante, dH est nul, donc r et s sont nuls; par suite, ω_1 et ω_2 sont des différentielles exactes, et réciproquement; on peut donc rapporter une telle surface aux pseudo-arcs de ses lignes minima. Si la surface, à courbure moyenne variable, est une surface de Weingarten, Λ est fonction de H, et la formule (21) montre que $r\omega_1 + s\omega_2$ est une différentielle exacte.

L'équation $r\omega_1 + s\omega_2 = 0$, que l'on peut former dès qu'on connaît les formes minima ω_1, ω_2, est l'équation des lignes d'égale courbure moyenne. Si S et $\bar{S}$ sont deux surfaces susceptibles d'être mises en correspondance ponctuelle de telle sorte que leurs lignes minima se correspondent, avec conservation des pseudo-arcs, la correspondance satisfait à $\bar{r} = r$, $\bar{s} = s$, donc

$$\frac{d\bar{H}}{\bar{\Lambda}} = \frac{dH}{\Lambda},$$

et, par suite, $\bar{H} = f(H)$: les lignes d'égale courbure moyenne se correspondent sur les deux surfaces. En outre $\frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda} = f'(H)$. Or la correspondance supposée est une représentation conforme particulière, et l'on a $ds^2 = \frac{A}{\bar{A}} ds^2$: le rapport local de similitude entre les deux surfaces est $\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\cdot$ D'après la formule précédente, on voit que ce rapport reste constant le long d'une ligne d'égale courbure moyenne.

L'équivalent de la relation de Gauss s'obtient en différentiant extérieurement l'une ou l'autre des équations

$$\omega_{11} = p\,\omega_1 + r\,\omega_2, \qquad \omega_{22} = s\,\omega_1 + q\,\omega_2.$$

La première donne

$$[\omega_{13}\,\omega_{31}] = (r_1 - p_2 + pr - rs)\,[\omega_1\,\omega_2];$$

le premier membre s'écrit $-A(1 - \beta^2)[\omega_1\,\omega_2] = \frac{K}{A}[\omega_1\,\omega_2]$. Donc

$$\frac{K}{A} = r_1 - p_2 + pr - rs. \tag{22}$$

En différentiant la seconde, on aurait trouvé

$$\frac{K}{A} = s_2 - q_1 + qs - rs. \tag{23}$$

Ces deux expressions trouvées pour $\frac{K}{A}$ sont bien équivalentes, comme on le vérifie en différentiant extérieurement la formule (20). Ce coefficient $\frac{K}{A}$ s'écrit, en utilisant les courbures principales a, c,

$$\frac{K}{A} = \frac{2ac}{a - c} \qquad \text{d'où} \quad \frac{A}{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2},$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure principaux. Or la demi-distance focale de l'indicatrice de Dupin est $\sqrt{\rho_1 - \rho_2}$. Le coefficient $\frac{K}{A}$ pourrait être appelé : le *coefficient d'isotropie* de la surface.

Signalons encore une identité qu'on obtient en différentiant extérieurement la relation (21)

$$ps - qr + r_2 - s_1 + 2s^2 - 2r^2 = 0. \tag{24}$$

Si deux surfaces S et $\bar{\mathrm{S}}$ se correspondent comme il a été dit plus haut, elles ont en commun r, s, r_2, s_1, donc

$$\bar{p}\,s - \bar{q}\,r = ps - qr \qquad \text{ou} \qquad \frac{\bar{p} - p}{r} = \frac{\bar{q} - q}{s}.$$

Cette formule exprime que $\frac{d\bar{A}}{\bar{A}} - \frac{dA}{A}$ ne diffère de dH que par un facteur fini, et que, par conséquent, $\frac{\bar{A}}{A}$ est une fonction de H, ce que nous avions déjà remarqué.

4. Relations entre le trièdre B et les coordonnées minima (1). — En désignant par u et v des coordonnées minima (ou symétriques), c'est-à-dire des intégrales

(1) Nous utilisons les notations de M. E. Vessiot dans ses *Leçons de Géométrie supérieure*, Paris, Hermann, 1919.

premières quelconques des équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, les formes de la surface s'écrivent

$$ds^2 = 2\,F\,du\,dv, \qquad \Phi = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

L'analyse précédente prouve que

$$(25) \qquad \omega_1 = \sqrt{L}\,du, \qquad \omega_2 = \sqrt{N}\,dv;$$

mais on peut aussi établir directement ces formules. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface, m le point courant. On a

$$L = \vec{n}.\overrightarrow{m''_{u^2}}, \qquad M = \vec{n}.\overrightarrow{m''_{uv}}, \qquad N = \vec{n}.\overrightarrow{m''_{v^2}}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{m'_u}$, $\overrightarrow{m''_{u^2}}$ et $\vec{n}$ sont tous les trois orthogonaux à $\overrightarrow{m'_u}$, donc ils sont coplanaires, et il existe une formule telle que

$$\overrightarrow{m''_{u^2}} = a\overrightarrow{m'_u} + b\vec{n},$$

qui, élevée au carré, donne $(m''_{u^2})^2 = b^2$, et, multipliée scalairement par $\vec{n}$, $L = b$; donc $(m''_{u^2})^2 = L^2$. Or, sur la courbe (L_1), le pseudo-arc σ vérifie, comme on sait, $d\sigma^4 = (m''_{u^2})^2\,du^4$. On obtient donc

$$d\sigma^4 = L^2\,du^4.$$

Cette formule, déjà obtenue par M. Vessiot [1], n'établit pas complètement la propriété énoncée, car elle ne définit que $d\sigma^4$. La formule qui donne $d\sigma^2$ est

$$d\sigma^2 = i\,\frac{(m'\,m''\,m''')_u}{(m''_{u^2})^2}\,du^2.$$

Or on a $m'_u \wedge m''_{u^2} = b(m'_u \wedge n) = L(m'_u \wedge n)$, et, comme m'_u ne diffère de I_1 que par un facteur scalaire, tandis que $n = I_3$, la formule (3) $I_3 \wedge I_1 = -iI_1$ donne ici $m'_u \wedge n = im'_u$, donc $(m'm''m''')_u = (m'_u \wedge m''_{u^2}).m'''_{u^3} = iLm'_u.m'''_{u^3}$. Mais, en dérivant $m'_u.m''_{u^2} = 0$, on obtient, $m'_u.m'''_{u^3} = -(m''_{u^2})^2$, et le $d\sigma^2$ devient en fin de compte

$$d\sigma^2 = i\,\frac{-iL(m''_{u^2})^2}{(m''_{u^2})^2}\,du^2 = L\,du^2.$$

Un calcul analogue prouve que $\sqrt{N}\,dv$ est le pseudo-arc indirect de (L_2).

Identifiant $\frac{2\omega_1\omega_2}{A}$ avec $2F\,du\,dv$, et $2\beta\omega_1\omega_2$ avec $2M\,du\,dv$, on trouve

$$(26) \qquad A = \frac{\sqrt{LN}}{F}, \qquad H = \frac{M}{F}.$$

Du fait que r et s satisfont à $d\omega_1 = r[\omega_1\omega_2]$, $d\omega_2 = s[\omega_2\omega_1]$, on a

$$(27) \qquad r = -\frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\partial\log\sqrt{L}}{\partial v}, \qquad s = -\frac{1}{\sqrt{L}}\,\frac{\partial\log\sqrt{N}}{\partial u}.$$

---

[1] *Contribution à la géométrie conforme* (*Bull. de la Soc. Math.*, 54, 1926, p. 139-179).

L'équation (21) devient

$$(28)\qquad dH = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial L}{\partial v}du + \frac{\partial N}{\partial u}dv\right),$$

et l'on constate que cela équivaut bien aux deux équations de Codazzi. Les invariants p et q se calculent en partant de (20)

$$(29)\qquad p = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\log\frac{F}{\sqrt{L}}\right), \qquad q = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\log\frac{F}{\sqrt{N}}\right).$$

Quant à la relation (24), on trouve sa transformée en différentiant extérieurement (28), ce qui donne

$$(30)\qquad \frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial \log F}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial \log F}{\partial v} = \frac{\partial^2 N}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}.$$

On retrouve la forme classique de l'équation de Gauss en observant que, d'après (20),

$$\omega_{11} = p\omega_1 + r\omega_2 = -s\omega_1 + r\omega_2 - (\log A)_1\omega_1 = -s\omega_1 + r\omega_2 - (\log A)_u du,$$

d'où

$$\frac{K}{A} = \frac{d\omega_{11}}{[\omega_1\omega_2]} = \frac{d(-s\omega_1 + r\omega_2)}{[\omega_1\omega_2]} + \frac{(\log A)_{uv}}{\sqrt{LN}}.$$

Mais

$$-s\omega_1 + r\omega_2 = (\log\sqrt{N})_u du - (\log\sqrt{L})_v dv,$$

donc

$$d(-s\omega_1 + r\omega_2) = -(\log\sqrt{LN})_{uv}[du\, dv],$$

et

$$\frac{K}{A} = \frac{1}{\sqrt{LN}}\left(\log\frac{A}{\sqrt{LN}}\right)_{uv};$$

ou, en remplaçant $\frac{\sqrt{LN}}{A}$ par F,

$$K = -\frac{1}{F}(\log F)_{uv},$$

ce qui est la formule habituelle.

5. **Étude géométrique des invariants** p, q, r, s. — A chaque ligne minima tracée sur une surface, on peut attacher un trièdre cyclique distinct de son triède cyclique intrinsèque, qu'on appellera son *trièdre cyclique géodésique*. Pour (L_1), nous le désignerons par $Me_1e_2e_3$. e_1 est la tangente isotrope et se confond avec J_1, donc, d'après (18) avec I_1; e_2 est la normale unitaire à la surface $e_2 = I_3$; e_3 complète le trièdre cyclique de façon qu'il soit direct, e_3 a donc la même direction que I_2, mais non la même extension; $e_3 = AI_2$, de sorte que

$$(e_1, e_2, e_3) = (I_1, I_3, AI_2) = -A(I_1, I_2, I_3) = iA\mathcal{F} = i.$$

La relation entre le trièdre cyclique géodésique $Me_1e_2e_3$ et le trièdre cyclique intrinsèque $MJ_1J_2J_3$ de (L_1) se déduit des formules (18)

$$(31)\qquad e_1 = J_1, \qquad e_2 = J_2 - pJ_1, \qquad e_3 = J_3 + pJ_2 - \frac{p^2}{2}J_1.$$

ou, en résolvant

$$J_1 = e_1, \qquad J_2 = e_2 + pe_1, \qquad J_3 = e_3 - pe_2 - \frac{p^2}{2} e_1. \tag{32}$$

On passe donc d'un de ces trièdres cycliques à l'autre par une rotation *parabolique*, déplacement au cours duquel le seul vecteur isotrope J_1 reste inchangé, pendant que le plan isotrope contenant J_1 glisse sur lui-même. L'invariant p mesure l'amplitude de cette rotation; il exprime l'*écart* (nous ne disons pas l'*angle*, qui est nul) entre la normale affine J_2 de (L_1) et la normale e_2 à la surface. De ce point de vue, p joue pour une courbe minima le même rôle que, pour une courbe non minima, l'angle ϖ que fait la normale à la surface avec la normale principale à la courbe : il situe le trièdre cyclique géodésique de la courbe par rapport à son trièdre (cyclique) intrinsèque.

Cet invariant p se présente encore lorsqu'on étudie le déplacement infinitésimal du trièdre géodésique de (L_1) le long de (L_1). Rappelons qu'on a, pour le trièdre intrinsèque, le déplacement

$$\frac{dJ_1}{d\sigma} = J_2, \qquad \frac{dJ_2}{d\sigma} = hJ_1 - J_3, \qquad \frac{dJ_3}{d\sigma} = -hJ_2. \tag{33}$$

Les formules (31) et (32) donnent en conséquence

$$\frac{de_1}{d\sigma} = e_2 + pe_1,$$

$$\frac{de_2}{d\sigma} = hJ_1 - J_3 - \frac{dp}{d\sigma}J_1 - pJ_2 = \left(h - \frac{dp}{d\sigma} - \frac{p^2}{2}\right)e_1 - e_3,$$

$$\frac{de_3}{d\sigma} = -hJ_2 + p(hJ_1 - J_3) + \frac{dp}{d\sigma}J_2 - \frac{p^2}{2}J_2 - p\frac{dp}{d\sigma}J_1 = \left(-h + \frac{dp}{d\sigma} + \frac{p^2}{2}\right)e_2 - pe_3.$$

Cela se simplifie si l'on tient compte de (15), qui lie l'invariant h de la courbe aux invariants de la surface,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{de_1}{d\sigma} &= \quad pe_1 + e_2, \\ \frac{de_2}{d\sigma} &= -He_1 - e_3, \\ \frac{de_3}{d\sigma} &= \quad He_2 - pe_3. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

C'est l'analogue des formules de Darboux-Ribaucour, qui donnent la variation infinitésimale du trièdre géodésique d'une courbe ordinaire.

Notons en passant que, si la surface est minima, $H = 0$; on a $\frac{de_3}{d\sigma} = -pe_3$, le vecteur e_3 conserve une direction fixe le long de (L_1). Cela traduit le fait que les surfaces minima sont des surfaces de translation : on passe d'une courbe (L_2), tangente à e_3, à une autre courbe (L_2) par une translation de trajectoire (L_1). Les directions minima dans ce cas sont conjuguées; e_3 engendre la développable circonscrite le long de $(L_1,)$, qui est, en l'occurrence, un cylindre isotrope.

Revenons au cas général. En comparant les formules (34) à celles de Darboux-Ribaucour, on se trouve conduit à assimiler le coefficient H à la torsion géodésique, et le coefficient p, à la courbure géodésique. En effet, pour une courbe quelconque de la surface, si l'on considère la rotation instantanée de son trièdre géodésique, la torsion géodésique est la projection du vecteur rotation sur la tangente à la courbe, tandis que la courbure géodésique est la projection de ce même vecteur sur la normale à la surface (la vitesse linéaire du point courant étant prise égale à l'unité). Appliquons des considérations analogues à la courbe minima (L_1). Le temps étant désigné par t et le vecteur rotation par $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$, on a

$$\frac{de_1}{dt} = (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3) \wedge e_1 = -i\mu e_1 + i\nu e_2,$$

$$\frac{de_2}{dt} = (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3) \wedge e_2 = \quad i\lambda e_1 - i\nu e_3,$$

$$\frac{de_3}{dt} = (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3) \wedge e_3 = -i\lambda e_2 + i\mu e_3,$$

car, d'après $(e_1,\ e_2,\ e_3) = i$, on a $e_1 \wedge e_2 = ie_1$, $e_2 \wedge e_3 = ie_3$, $e_3 \wedge e_1 = ie_2$. On identifie avec (34), à condition de poser $dt = i\,d\sigma$, et

$$\lambda = \mathrm{H}, \qquad \mu = p, \qquad \nu = -1.$$

H et p sont donc respectivement les composantes du vecteur rotation sur la tangente e_1 à la courbe et sur la normale e_2 à la surface. On pourrait donc appeler p la *pseudo-courbure géodésique*, et H, la *pseudo-torsion géodésique* de (L_1). On obtiendrait ainsi la proposition : *la pseudo-torsion géodésique d'une ligne minima est égale à la courbure moyenne de la surface*, proposition qui rappelle évidemment le théorème d'Enneper concernant la torsion des lignes asymptotiques.

A la courbe minima (L_2) on attachera de même le trièdre cyclique *indirect* $Me'_1 e'_2 e'_3$ défini par

$$e'_1 = I_2, \qquad e'_2 = I_3, \qquad e'_3 = AI_1, \qquad (e'_1,\ e'_2,\ e'_3) = -i.$$

Entre les deux trièdres cycliques géodésiques, on a les relations

$$e'_1 = \frac{e_3}{A}, \qquad e'_2 = e_2, \qquad e'_3 = A\,e_1,$$

et le déplacement infinitésimal de ce second trièdre vérifie

$$(34')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{de'_1}{d\tau} &= \quad q e'_1 + e'_2, \\ \frac{de'_2}{d\tau} &= -\mathrm{H}e'_1 - e'_3, \\ \frac{de'_3}{d\tau} &= \quad \mathrm{H}e'_2 - qe'_3. \end{aligned}\right.$$

On remarquera que les invariants r et s sont absents des formules (34) et (34'). Ils apparaissent en revanche quand on déplace le trièdre géodésique de (L_1) dans la direction de (L_2), ou inversement. En effet, des formules $e_1 = I_1$, $e_2 = I_3$, $e_3 = AI_2$, on déduit

$$de_1 = \omega_{11} I_1 + \omega_{13} I_3 = \omega_{11} e_1 + \omega_{13} e_2,$$

$$de_2 = \omega_{31} I_1 + \omega_{32} I_2 = -A\,\omega_{23} e_1 - \omega_{13} e_3,$$

$$de_3 = dA\,I_2 + A(\omega_{22} I_2 + \omega_{23} I_3) = -\omega_{11} e_3 + A\,\omega_{23} e_2.$$

Si donc l'on fait $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = d\tau$, il vient

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{de_1}{d\tau} &= \quad r e_1 + \beta e_2, \\ \frac{de_2}{d\tau} &= -A e_1 - \beta e_3, \\ \frac{de_3}{d\tau} &= \quad A e_2 - r e_3. \end{aligned}\right. \qquad \left(\beta = \frac{H}{A}\right),$$

Ainsi, quand on déplace le trièdre géodésique de (L_1) dans la direction de (L_2), le vecteur rotation de ce trièdre est $(dt = i d\tau)$

$$A e_1 + r e_2 - \beta e_3 ;$$

r est précisément la composante de ce vecteur rotation sur la normale à la surface. L'invariant r a donc trait à la position relative des lignes minima (L_1) les unes par rapport aux autres; on trouverait une propriété analogue de s relativement aux courbes minima (L_2). On remarque que, si la surface est à courbure moyenne constante $(r = 0,\ s = 0)$, le vecteur rotation est dans le plan tangent à la surface; l'axe du mouvement hélicoïdal instantané du trièdre $Me_1e_2e_3$ est parallèle au plan tangent et rencontre la normale au point $M + \frac{1}{2H} I_3$. Si la surface est minima $(H = 0)$, le vecteur rotation est porté par e_1 : un tel mouvement du trièdre $Me_1e_2e_3$ n'est pas assimilable à un mouvement hélicoïdal instantané.

On tire, des secondes équations de (34) et de (35),

$$\left(\frac{dI_3}{d\sigma}\right)^2 = 2H, \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dI_3}{d\tau}\right)^2 = 2H.$$

$(dI_3)^2$ est le carré du déplacement sphérique. C'est à rapprocher de la formule concernant une courbe quelconque de la surface, de courbure normale $\frac{1}{\rho_N}$,

$$\left(\frac{dI_3}{ds}\right)^2 = 2H\frac{1}{\rho_N} - K \qquad (K,\ \text{courbure totale de la surface}).$$

6. **Relations entre le trièdre B et le trièdre de Darboux.** — Nous désignerons ce dernier trièdre par $MT_1T_2I_3$, T_1, T_2 étant les tangentes principales. Les composantes relatives ϖ_i, ϖ_{ij} de son déplacement infinitésimal vérifient $\varpi_{13} = a\varpi_1$, $\varpi_{23} = c\varpi_2$, où a et c désignent les courbures principales, ϖ_1 et ϖ_2 les éléments des arcs des lignes de courbure. Quand à ϖ_{12}, nous l'écrirons

$$\varpi_{12} = R\varpi_1 - S\varpi_2,$$

R et S satisfaisant à

$$(36)\qquad d\varpi_1 = R[\varpi_1\varpi_2], \qquad d\varpi_2 = S[\varpi_2\varpi_1] = -S[\varpi_1\varpi_2].$$

Les courbures géodésiques des lignes de courbure sont R et — S. Les équations de Codazzi s'obtiennent en différentiant extérieurement $\omega_{13} = a\omega_1$, $\omega_{23} = c\omega_2$, et s'écrivent

$$(37)\qquad a_2 = (a - c)R, \qquad c_1 = (c - a)S,$$

(les indices 1 et 2 indiquent ici des dérivées covariantes prises dans les directions principales). L'équation de Gauss s'obtient en différentiant extérieurement $\varpi_{12} = R\varpi_1 - S\varpi_2$, et prend la forme

$$ac = S_1 + R_2 - R^2 - S^2, \qquad (ac = K). \tag{38}$$

Nous introduirons en outre, à côté de R et S, les invariants P et Q, du troisième ordre eux aussi, qui vérifient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dc}{c-a} &= S\varpi_1 + Q\varpi_2, \\ \frac{da}{a-c} &= P\varpi_1 + R\varpi_2, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

si bien que

$$a_1 = (a-c)P, \qquad c_2 = (c-a)Q. \tag{40}$$

Comparons le trièdre de Darboux au trièdre biisotrope. Les lignes de courbure ont pour équation, si l'on se sert des formes minima, $\omega_1^2 - \omega_2^2 = 0$. Soient (C) la première ligne de courbure, $\omega_1 = \omega_2$ son équation; sa tangente est T_1, et aussi $I_1 + I_2$. Comme $(I_1 + I_2)^2 = \frac{2}{A}$, on déduit de là $T_1 = \sqrt{\frac{A}{2}}(I_1 + I_2)$. Pour (C′), d'équation $\omega_1 = -\omega_2$, la tangente est $I_1 - I_2$; or $(I_1 - I_2)^2 = -\frac{2}{A}$, donc $T_2 = \varepsilon i\sqrt{\frac{A}{2}}(I_1 - I_2)$. Il faut prendre $\varepsilon = -1$ pour qu'on ait à la fois $T_1 \wedge T_2 = I_3$ et $I_1 \wedge I_2 = -\frac{i}{A} I_3$. En résumé

$$\left\{\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{A}{2}}(I_1 + I_2), \\ T_2 &= -i\sqrt{\frac{A}{2}}(I_1 - I_2), \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2A}}(T_1 + iT_2), \\ I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2A}}(T_1 - iT_2). \end{aligned}\right. \tag{41}$$

On remarque que, pour passer d'un quelconque des deux trièdres à l'autre, il est nécessaire de connaître l'asphéricité A.

Entre les formes ω_1, ω_2 et ϖ_1, ϖ_2, les relations sont

$$\left\{\begin{aligned} \varpi_1 &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{\sqrt{2A}}, \\ \varpi_2 &= i\,\frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{2A}}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{A}{2}}(\varpi_1 - i\varpi_2), \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{A}{2}}(\varpi_1 + i\varpi_2). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Cherchons maintenant les relations entre invariants du troisième ordre. Dans ce paragraphe, nous désignerons par les indices 1 et 2 la dérivation dans les directions principales, par les indices σ et τ la dérivation dans les directions isotropes. Pour une fonction de point f quelconque, on a

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{\frac{A}{2}}(f_\sigma + f_\tau), \\ f_2 &= -i\sqrt{\frac{A}{2}}(f_\sigma - f_\tau); \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} f_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{2A}}(f_1 + if_2); \\ f_\tau &= \frac{1}{\sqrt{2A}}(f_1 - if_2). \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Pour exprimer P, par exemple, nous partons de (40)

$$a_1 = H_1 + A_1 = \sqrt{\frac{A}{2}}(H_\sigma + H_\tau + A_\sigma + A_\tau).$$

Or d'après (20) et (21)

$$\frac{A_\sigma}{A} = -p-s, \qquad \frac{A_\tau}{A} = -q-r, \qquad \frac{H_\sigma}{2A} = -r, \qquad \frac{H_\tau}{2A} = -s,$$

donc

$$a_1 = -A\sqrt{\frac{A}{2}}(p+q+3r+3s) \qquad \text{et} \qquad P = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}(p+q+3r+3s).$$

On obtient en définitive

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}(p+q+3r+3s),\\ Q &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}(p-q-3r+3s),\\ R &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}(p-q+r-s),\\ S &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}(p+q-r-s),\end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2\sqrt{2A}}[P+3S+i(Q+3R)],\\ q &= -\frac{1}{2\sqrt{2A}}[P+3S-i(Q+3R)],\\ r &= -\frac{1}{2\sqrt{2A}}[P-S-i(Q-R)],\\ s &= -\frac{1}{2\sqrt{2A}}[P-S+i(Q-R)],\end{aligned}\right.$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} P+iQ &= -\sqrt{\frac{A}{2}}(p+3s),\\ P-iQ &= -\sqrt{\frac{A}{2}}(q+3r),\\ S+iR &= -\sqrt{\frac{A}{2}}(p-s),\\ S-iR &= -\sqrt{\frac{A}{2}}(q-r),\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} p+q &= -\frac{1}{\sqrt{2A}}(P+3S),\\ p-q &= -\frac{i}{\sqrt{2A}}(Q+3R),\\ r+s &= -\frac{1}{\sqrt{2A}}(P-S),\\ r-s &= \frac{i}{\sqrt{2A}}(Q-R).\end{aligned}\right.$$

Quant aux composantes relatives du déplacement, ϖ_{ij} et ω_{ij}, on trouve facilement ϖ_{13}, ϖ_{23}, ϖ_{12} en transformant $I_3 . dT_1$, $I_3 . dT_2$, $T_2 . dT_1$ par les formules (4)

$$(46)\quad \varpi_{13} = \sqrt{\frac{A}{2}}(\omega_{13}+\omega_{23}), \qquad \varpi_{23} = -i\sqrt{\frac{A}{2}}(\omega_{13}-\omega_{23}), \qquad \varpi_{12} = \frac{i}{2}(\omega_{11}-\omega_{22}),$$

et

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_{13} &= \frac{1}{\sqrt{2A}}(\varpi_{13}+i\varpi_{23}),\\ \omega_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2A}}(\varpi_{13}-i\varpi_{23}),\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \omega_{11} &= -\frac{dA}{2A} - i\varpi_{12},\\ \omega_{22} &= -\frac{dA}{2A} + i\varpi_{12}.\end{aligned}\right.$$

Si une courbe est tracée sur la surface, son trièdre géodésique se situe par rapport à son trièdre intrinsèque à l'aide de l'angle ϖ que fait la normale à la surface avec la normale principale à la courbe; le trièdre de Darboux se situe par rapport au trièdre géodésique au moyen de l'angle θ que fait la tangente à la courbe avec la première direction principale de la surface, ce qui entraîne

$$(48) \qquad \varpi_1 = ds\cos\theta, \qquad \varpi_2 = ds\sin\theta.$$

La considération de la courbure normale, de la torsion géodésique et de la courbure géodésique de la courbe donnent les relations suivantes qui lient les invariants de la courbe, ceux de la surface, et les angles θ et ϖ

$$(49) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cos\varpi}{\rho} = \mathrm{H} + \mathrm{A}\cos 2\theta,\\ &\frac{d\varpi}{ds} + \frac{1}{\tau} = -2\mathrm{A}\sin 2\theta,\\ &ds\frac{\sin\varpi}{\rho} = \varpi_{12} + d\theta. \end{aligned}\right.$$

Le trièdre biisotrope peut aussi se situer par rapport au trièdre intrinsèque de la courbe, mais cela exige la connaissance, non seulement des angles ϖ et θ, mais encore de l'asphéricité A qui, d'après (41), situe le trièdre B par rapport au trièdre de Darboux. On ne peut évidemment parler de l'angle que fait la courbe avec une direction isotrope, mais on continue d'utiliser θ et l'on a, d'après (42) et (48)

$$(50) \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{2}}\,e^{-i\theta}\,ds \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{2}}\,e^{i\theta}\,ds.$$

On remarque que $\theta = \frac{1}{2i}\log\frac{\omega_2}{\omega_1}$ se calcule indépendamment de A.

L'angle de deux courbes de la surface, (C) et $(\overline{\mathrm{C}})$, est donné par

$$(51) \qquad \overline{\theta} - \theta = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1} : \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

D'après les dernières formules (49) et (46), la courbure géodésique s'écrit

$$(52) \qquad ds\frac{\sin\varpi}{\rho} = \frac{i}{2}(\omega_{11} - \omega_{22}) + d\theta.$$

7. Gradient et paramètres différentiels de Beltrami. — L'emploi du trièdre B est très avantageux pour l'étude des paramètres de Beltrami. Le gradient d'une fonction de point f peut se décomposer suivant les vecteurs isotropes

$$\mathrm{grad} f = \xi \mathrm{I}_1 + \eta \mathrm{I}_2.$$

ξ et η se tirent de la définition du gradient

$$df = \mathrm{grad} f . d\mathrm{M} = (\xi \mathrm{I}_1 + \eta \mathrm{I}_2).(\omega_1 \mathrm{I}_1 + \omega_2 \mathrm{I}_2) = \frac{1}{\mathrm{A}}(\xi\omega_2 + \eta\omega_1),$$

d'où

$$\xi = \mathrm{A} f_2, \qquad \eta = \mathrm{A} f_1$$

et

$$(53) \qquad \mathrm{grad} f = \mathrm{A}(f_2 \mathrm{I}_1 + f_1 \mathrm{I}_2).$$

Le premier paramètre de Beltrami est

(54) $$\Delta_1 f = (\mathrm{grad} f)^2 = 2\,\mathrm{A} f_1 f_2, \qquad \left(\mathrm{I}_1 . \mathrm{I}_2 = \frac{1}{\mathrm{A}}\right).$$

Le second, $\Delta_2 f$, est défini par

(55) $$\int (\mathrm{I}_3 . \mathrm{grad} f . d\mathrm{M}) = \iint \Delta_2 f \, d\sigma,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément superficiel. L'intégrale curviligne a pour élément

$$\mathrm{I}_3 . (\mathrm{grad} f \wedge d\mathrm{M}) = i (f_1 \omega_1 - f_2 \omega_2),$$

d'où, en prenant la différentielle extérieure, et remarquant que $d\sigma = -\frac{i}{\mathrm{A}}[\omega_1 \omega_2]$,

$$\Delta_2 f = \mathrm{A}(f_{21} + f_{12} - r f_1 - s f_2).$$

Mais cela se simplifie, car en différentiant extérieurement $df = f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2$, on trouve

$$f_{21} - f_{12} + r f_1 - s f_2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f_{21} - s f_2 = f_{12} - r f_1,$$

donc

(56) $$\Delta_2 f = 2\,\mathrm{A}(f_{12} - r f_1) \qquad \text{ou si l'on veut} \quad = 2\,\mathrm{A}(f_{21} - s f_2).$$

A partir de là, on caractérise très simplement les variables minima, les variables harmoniques, les paramètres isométriques, et les systèmes isothermes.

Une *variable minima* est une intégrale première de $\omega_1 = 0$, ou de $\omega_2 = 0$; c'est ce que Beltrami appelle une *variable complexe sur la surface* et Darboux, une *coordonnée symétrique*. Soit u une intégrale première de $\omega_1 = 0$; on a $du = u_1 \omega_1$, donc $u_2 = 0$ et, par suite, $\Delta_1 u = 0$. De même, si v est une intégrale première de $\omega_2 = 0$, on a $v_1 = 0$, d'où $\Delta_1 v = 0$. Réciproquement, pour que $\Delta_1 f = 0$, il faut que f_1 ou f_2 soit nul, donc que f soit une variable minima. Les variables minima sont donc les seules fonctions de point dont le gradient soit isotrope.

Soit f une fonction de point; faisons tourner $\mathrm{grad} f$ de $\frac{\pi}{2}$ en formant $\mathrm{I}_3 \wedge \mathrm{grad} f$; nous trouvons

(57) $$\mathrm{I}_3 \wedge \mathrm{grad} f = i\mathrm{A}(-f_2 \mathrm{I}_1 + f_1 \mathrm{I}_2).$$

Pour que le vecteur obtenu ait la même direction que $\mathrm{grad} f$, il faut

$$\frac{-f_2}{f_2} = \frac{f_1}{f_1}, \qquad \text{donc soit} \quad f_1 = 0, \qquad \text{soit} \quad f_2 = 0.$$

Si $f_2 = 0$, on a $\mathrm{grad} f = \mathrm{A} f_1 \mathrm{I}_2$, et

$$\mathrm{I}_3 \wedge \mathrm{grad} f = i \mathrm{A} f_1 \mathrm{I}_2 = i\, \mathrm{grad} f.$$

Si $f_1 = 0$, on a $\mathrm{grad} f = \mathrm{A} f_2 \mathrm{I}_1$, et

$$\mathrm{I}_3 \wedge \mathrm{grad} f = - i \mathrm{A} f_2 \mathrm{I}_1 = - i\, \mathrm{grad} f.$$

Il y a donc deux espèces de variables minima : celles de première espèce, dont le gradient se trouve multiplié par $+i$ quand on le fait tourner de $\frac{\pi}{2}$, ce sont les intégrales premières de $\omega_1 = 0$; celles de seconde espèce sont les intégrales premières de $\omega_2 = 0$.

Une *variable harmonique sur la surface* est une fonction de point dont le second paramètre de Beltrami est nul sans que le premier le soit. La formule (55) montre que $\Delta_2 f = 0$ si (I_3, grad, dM) est une différentielle exacte. Or cela s'écrit $(I_3 \wedge \text{grad} f).dM$. Ce sera une différentielle exacte si $I_3 \wedge \text{grad} f$ est le gradient d'une certaine fonction g. Donc, si f est harmonique, on peut déterminer g telle que

$$I_3 \wedge \text{grad} f = \text{grad}\, g. \tag{58}$$

Ceci généralise évidemment les conditions de Cauchy pour le plan. Si (58) est satisfaite, g est aussi harmonique, car

$$I_3 \wedge \text{grad}\, g = -\text{grad} f;$$

f et g sont alors deux fonctions harmoniques associées : g est directement associée à f, f inversement associée à g, directement associée à $-g$.

D'après (56), une fonction harmonique vérifie $f_{12} - rf_1 = 0$. Or soit $f(u, v)$ cette fonction, u et v étant des variables minima. Comme $du = u_1\omega_1$ et $dv = v_2\omega_2$, on a

$$f_1 = f_u u_1, \qquad f_{12} = f_{uv} u_1 v_2 + f_u u_{12}$$

et

$$f_{12} - rf_1 = f_{uv} u_1 v_2 + f_u(u_{12} - ru_1).$$

Mais en différentiant extérieurement $du = u_1\omega_1$, on trouve $ru_1 - u_{12} = 0$, donc

$$f_{12} - rf_1 = f_{uv} u_1 v_2,$$

et, comme $u_1 v_2 \neq 0$, la condition $\Delta_2 f = 0$ équivaut à $f_{uv} = 0$, donc $f = U + V$; une fonction harmonique est donc la somme de deux variables minima d'espèces différentes. Aucune de ces deux variables ne doit se réduire à une constante, autrement f serait elle-même variable minima, on aurait $\Delta_1 f = 0$ contrairement à la définition. (Nous n'insistons pas sur les conditions de réalité, qui sont manifestes.)

Si f et g sont deux variables harmoniques associées, $f - ig$ et $f + ig$ sont des variables minima. En effet, on a par hypothèse

$$I_3 \wedge \text{grad} f = \text{grad}\, g, \qquad I_3 \wedge \text{grad}\, g = -\text{grad} f,$$

d'où

$$I_3 \wedge \text{grad}(f - ig) = \text{grad}\, g + i\,\text{grad} f = i\,\text{grad}(f - ig),$$

ce qui démontre que $f - ig$ est une variable minima de première espèce. On verra de même que $f + ig$ est une variable minima de seconde espèce.

Si f et g sont deux variables harmoniques associées, elles forment un système de *paramètres isométriques*. En effet, on vient de voir que

$$f - ig = U, \qquad f + ig = V,$$

donc

$$df - idg = U'\,du, \qquad df + idg = V'\,dv,$$

d'où, par multiplication membre à membre,

$$df^2 + dg^2 = \mathrm{U'V'}\,du\,dv \qquad \text{et} \qquad ds^2 = 2\mathrm{F}\,du\,dv = \frac{2\mathrm{F}}{\mathrm{U'V'}}(df^2 + dg^2);$$

ce qui démontre la proposition. La réciproque est évidente.

Une famille de courbes tracées sur la surface est *isotherme* si elle peut être représentée par l'équation $\lambda = \text{const.}$, où λ est une variable harmonique. Les trajectoires orthogonales sont alors isothermes aussi, puisqu'elles peuvent se représenter par $\mu = \text{const.}$, où μ est la variable harmonique associée à λ. Pour que le système orthogonal formé des courbes $\alpha = \text{const.}$ et de leurs trajectoires orthogonales soit un système isotherme, il faut et il suffit que α soit de la forme $\mathrm{F}(\lambda)$, où λ est harmonique, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{F}(\mathrm{U} + \mathrm{V})$, où U est une fonction quelconque de u et V une fonction quelconque de v. La condition nécessaire et suffisante est, comme dans le plan, que $\frac{\Delta_2\alpha}{\Delta_1\alpha}$ ne soit fonction que de α. En effet, il doit exister une fonction $\lambda(\alpha)$ qui soit harmonique, qui vérifie donc $\lambda_{uv} = 0$, c'est-à-dire $\frac{d^2\lambda}{d\alpha^2}\alpha_u\alpha_v + \frac{d\lambda}{d\alpha}\alpha_{uv} = 0$. D'où l'équation qui détermine $\lambda(\alpha)$

$$\frac{\dfrac{d^2\lambda}{d\alpha^2}}{\dfrac{d\lambda}{d\alpha}} = -\frac{\alpha_{uv}}{\alpha_u\,\alpha_v} = -\frac{\Delta_2\alpha}{\Delta_1\alpha};$$

elle n'est possible que si le second membre dépend uniquement de α.

Il est facile de reconnaître, sur l'équation différentielle d'une famille de courbes exprimée au moyen des formes minima, si ces courbes sont isothermes et, dans l'affirmative, cette équation s'intègre par quadratures.

Soit en effet $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$, en abrégé $\omega = 0$, l'équation différentielle en cause. Si les courbes sont isothermes, il existe une fonction harmonique λ, et une autre fonction μ, telles qu'on ait

$$d\lambda = \mu\omega = \mu(a\omega_1 + b\omega_2),$$

d'où $\lambda_1 = a\mu$, $\lambda_2 = b\mu$,

$$\lambda_{12} = a\mu_2 + a_2\mu, \qquad \lambda_{21} = b\mu_1 + b_1\mu.$$

Or λ, étant harmonique, vérifie

$$\lambda_{12} - r\lambda_1 = 0 \qquad \text{et aussi bien} \qquad \lambda_{21} - s\lambda_2 = 0,$$

ce qui s'écrit

$$a\mu_2 + a_2\mu - ra\mu = 0, \qquad b\mu_1 + b_1\mu - sb\mu = 0,$$

d'où

$$\frac{\mu_1}{\mu} = s - \frac{b_1}{b}, \qquad \frac{\mu_2}{\mu} = r - \frac{a_2}{a}.$$

La forme

$$\Omega = \left(s - \frac{b_1}{b}\right)\omega_1 + \left(r - \frac{a_2}{a}\right)\omega_2,$$

doit donc être une différentielle exacte; c'est la condition cherchée. Si elle est réalisée, on a $\log\mu$ par quadratures

$$\log\mu = \int \Omega,$$

et ensuite λ par quadratures : $\lambda = \int \mu\omega$.

Cherchons en particulier à quelle condition les lignes de courbure sont isothermes. Leur équation différentielle est $\omega_1 \pm \omega_2 = 0$; la forme Ω correspondante se réduit donc à $s\omega_1 + r\omega_2$.

On obtient donc cette proposition : *pour qu'une surface soit isothermique, il faut et il suffit que $s\omega_1 + r\omega_2$ soit une différentielle exacte.* Une grande partie du chapitre où Darboux étudie les surfaces isothermiques est consacrée à l'établissement d'une proposition complètement équivalente à la précédente. Quand la condition est réalisée, ω_1 et ω_2 admettent un facteur intégrant commun : $e^{\int s\omega_1 + r\omega_2}$.

On a vu que, le long d'une courbe quelconque, d'abscisse curviligne w, tracée sur la surface, on a (50)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\Lambda}{2}}\, e^{-i\theta}\, dw, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\Lambda}{2}}\, e^{i\theta}\, dw,$$

où θ désigne l'angle de la courbe avec la première direction principale. L'équation $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ peut donc s'écrire

$$e^{-2i\theta} = -\frac{b}{a}.$$

Mais Ω s'écrit de son côté

$$\Omega = s\omega_1 + r\omega_2 - \frac{\partial \log b}{\partial u}\, du - \frac{\partial \log a}{\partial v}\, dv$$

et

$$d\Omega = d(s\omega_1 + r\omega_2) - \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log\frac{b}{a}\, [du\, dv] = d(s\omega_1 + r\omega_2) - 2i\frac{\partial^2\theta}{\partial u\, \partial v}\, [du\, dv].$$

Sur une surface isothermique, on a donc

$$d\Omega = -2i\frac{\partial^2\theta}{\partial u\, \partial v}\, [du\, dv],$$

d'où la proposition, qui généralise une propriété connue sur les réseaux du plan : sur toute surface isothermique, les courbes isothermes sont celles qui coupent les lignes de courbure sous un angle θ qui est fonction harmonique ($\Delta_2\theta = 0$).

Enfin, si deux familles de courbes (C) et $(\overline{C})$ se coupent sous un angle φ qui est fonction harmonique, et si l'une des familles est isotherme, l'autre l'est aussi, d'après $\overline{\theta} - \theta = \varphi$. Cela s'applique en particulier si φ est constant.

8. Surfaces à courbure moyenne isotherme. — Nous étudions ici, à titre d'application des notions qui précèdent, une famille intéressante de surfaces qui se présentera d'elle-même dans la seconde partie de ce travail. La courbure moyenne H vérifie $dH = -2A(r\omega_1 + s\omega_2)$, les courbes d'égale courbure moyenne H = const. ont donc pour équation différentielle

$$r\omega_1 + s\omega_2 = 0, \qquad \text{en abrégé } \varpi = 0.$$

Pour que ce soient des courbes isothermes, il faut, d'après ce que l'on a vu, que Ω, qui prend ici la forme

$$\left(s - \frac{s_1}{s}\right)\omega_1 + \left(r - \frac{r_2}{r}\right)\omega_2, \qquad \text{en abrégé } \chi,$$

soit une différentielle exacte.

Sur de telles surfaces, on peut déterminer la forme que doivent avoir ω_1 et ω_2. En effet, H est alors de la forme $f(U + V)$, ou, en choisissant bien les coordonnées minima, $f(u + v)$. On aura donc

$$r\omega_1 + s\omega_2 = \mu(du + dv).$$

Posons

$$\omega_1 = \alpha\, du, \qquad \omega_2 = \beta\, dv, \qquad \text{d'où} \qquad r = -\frac{\alpha_v}{\alpha\beta}, \qquad s = -\frac{\beta_u}{\alpha\beta},$$

nous aurons

$$r\alpha = \mu, \qquad s\beta = \mu, \qquad \text{d'où} \qquad r\alpha = s\beta,$$

ce qui donne

$$\alpha\alpha_v = \beta\beta_u, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha^2 = \psi_u, \qquad \beta^2 = \psi_v.$$

Il existe donc un choix convenable de coordonnées minima u, v et une fonction $\psi(u, v)$ telles qu'on ait

$$\omega_1 = \sqrt{\psi_u}\, du, \qquad \omega_2 = \sqrt{\psi_v}\, dv.$$

La forme de la fonction $\psi(u, v)$ ne saurait être quelconque. La courbure moyenne étant $f(u + v)$, nous tirerons l'asphéricité A de

$$-\frac{dH}{2A} = r\omega_1 + s\omega_2 = -\frac{\psi_{uv}}{2\sqrt{\psi_u \psi_v}}(du + dv),$$

qui donne

$$A = \frac{\sqrt{\psi_u \psi_v}}{\psi_{uv}} f'(u + v).$$

Avec ces expressions de H et de A, la condition de Codazzi est satisfaite; reste à vérifier la condition de Gauss, que nous prenons sous la forme classique

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} = \frac{LN - M^2}{F}, \qquad (L = \psi_u,\ N = \psi_v).$$

Or

$$F = \frac{\sqrt{LN}}{A} = \frac{\psi_{uv}}{f'}, \qquad M = \frac{H}{A}\sqrt{LN} = \frac{\psi_{uv} f}{f'},$$

donc

$$(61) \qquad \frac{\partial^2 \log \dfrac{\psi_{uv}}{f'}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\psi_u \psi_v}{\psi_{uv}} f' - \psi_{uv} \frac{f^2}{f'}.$$

Telle est l'équation du 4^e ordre qui détermine $\psi(u, v)$ quand on a choisi $f(u + v)$.

Remarquons que si $\psi(u, v)$ a été prise de façon à satisfaire (61), on peut retrouver f sans intégration. Écrivons en effet l'équation

$$\frac{\partial^2 \log \psi_{uv}}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 \log f'}{\partial u\, \partial v} = \frac{\psi_u \psi_v}{\psi_{uv}} f' - \psi_{uv} \frac{f^2}{f'},$$

et appelons Δ l'opération $\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$ qui, appliquée à une fonction de $u+v$, donne zéro. Nous obtiendrons successivement

$$\Delta \frac{\partial^2 \log \psi_{uv}}{\partial u\, \partial v} = f' \Delta \frac{\psi_u \psi_v}{\psi_{uv}} - \frac{f^2}{f'} \Delta \psi_{uv},$$

$$\Delta^2 \frac{\partial^2 \log \psi_{uv}}{\partial u\, \partial v} = f' \Delta^2 \frac{\psi_u \psi_v}{\psi_{uv}} - \frac{f^2}{f'} \Delta^2 \psi_{uv}.$$

Généralement, ces deux dernières équations donneront, par résolution, f' et $\frac{f^2}{f'}$, donc f, c'est-à-dire qu'en général, une fois connue $\psi(u, v)$, donc une fois connues les formes minima $\omega_1 = \sqrt{\psi_u}\, du$, $\omega_2 = \sqrt{\psi_v}\, dv$ on pourra calculer de façon univoque les deux formes fondamentales de la surface, qui se trouvera ainsi essentiellement déterminée. Mais il y a des cas exceptionnels où, à des formes minima données suivant ce schéma, il correspond une infinité de surfaces à courbure moyenne isotherme.

Le fait se produit en particulier si l'on astreint la fonction $\psi(u, v)$ à ne dépendre que de $u+v$, comme f. On a alors $\psi_u = \psi_v = g(u+v)$, $\psi_{uv} = g'(u+v)$, et l'équation (61) devient, en posant $u+v=t$

$$(61)' \qquad \frac{d^2}{dt^2} \log \frac{g'}{f'} = g^2 \frac{f'}{g'} - f^2 \frac{g'}{f'}.$$

Les surfaces correspondantes sont *de révolution*. En effet, on voit facilement que $r=s$, $p=q$, ce qui entraîne, d'après (44), $Q=0$, $R=0$, et ces relations caractérisent les surfaces de révolution. Il est bien évident que, sur une surface de révolution, les lignes d'égale courbure moyenne sont isothermes, car ce sont les parallèles. Quand la courbure moyenne $f(t)$ est donnée, g se détermine par l'équation différentielle (61)′ qui est du 3ᵉ ordre. Ici, l'on remarque que si, inversement, $g(u+v)$ est donnée, c'est-à-dire si l'on connaît les formes minima, f n'est pas déterminée univoquement; l'opération Δ introduite plus haut donne identiquement zéro. Il y a une triple infinité de surfaces de révolution correspondant aux mêmes formes minima. Remarque intéressante : l'équation qui donne f, une fois g connue, est exactement la même qui donne g quand on connaît f. Les surfaces de révolution peuvent donc être associées par couples (on ne considère pas ici comme essentiellement distinctes des surfaces de révolution *semblables*) : on passe d'une surface d'un couple à l'autre en échangeant les fonctions f et g. Voyons la relation qui existe entre deux surfaces d'un même couple.

La courbure moyenne étant $H = f(u+v)$, l'asphéricité se calcule par $A = \frac{\sqrt{\psi_u \psi_v}}{\psi_{uv}} f' = \frac{g f'}{g'}$ puisque $\psi_u = \psi_v = g(u+v)$. Les courbures principales sont

$$a = H + A = \frac{f g' + g f'}{g'}, \qquad c = H - A = \frac{f g' - g f'}{g'}.$$

Sur l'autre surface du couple, on aura, en permutant f et g,

$$a = \frac{fg' + gf''}{f''}, \qquad c = \frac{gf'' - fg'}{f''},$$

donc

$$\frac{a}{c} = -\frac{\bar{a}}{\bar{c}}:$$

le rapport des rayons de courbure principaux est conservé en grandeur, mais non en signe. Si l'une des surfaces est convexe, l'autre est à courbures opposées. Par exemple, à une sphère $\left(\frac{a}{c} = 1\right)$ est associée une caténoïde $\left(\frac{a}{c} = -1\right)$; à la surface engendrée par une arche de cycloïde tournant autour de sa base $\left(\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\right)$, correspond la surface engendrée par une parabole tournant autour de sa directrice $\left(\frac{a}{c} = -\frac{1}{2}\right)$, etc.

La transformation qui fait passer de la méridienne de la première surface à celle de la seconde mérite d'être signalée. D'abord le paramètre $t = u + v$, variable harmonique restant constante le long de tout parallèle, est, à un facteur constant près, l'abscisse curviligne non euclidienne de la méridienne, le plan méridien limité à l'axe étant considéré comme un demi-plan de Poincaré

$$dt = k\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \qquad (k, \text{ const.}),$$

(l'axe de révolution est pris suivant Ox). On passe d'une méridienne à l'autre par la transformation

$$Y = \frac{2}{y}, \qquad \frac{dX}{Y} = -\frac{dx}{y};$$

c'est une transformation qui conserve l'invariant dt, ainsi que la direction de la tangente $\left(\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}\right)$. Une homothétie qui aurait son centre sur Ox jouit aussi de ces propriétés, mais la transformation précédente s'en distingue en ce qu'elle change le sens de la concavité de la méridienne.

Un autre cas particulier s'obtient en supposant que ψ_u et ψ_v ne sont fonctions que de $u + v$. Alors ψ_{uv} ne dépend, elle aussi, que de $u + v$; soit $\psi_{uv} = g'(u + v)$, on aura $\psi_u = g(u + v) + C_1$, $\psi_v = g(u + v) + C_2$. En ajoutant une constante convenable à $g(u + v)$, on peut faire en sorte que $C_2 = -C_1$; nous poserons, pour respecter la réalité, $C_1 = -2ai$, $C_2 = 2ai$

$$\omega_1 = \sqrt{\psi_u}\, du = \sqrt{g(u + v) - 2ai}\, du, \qquad \omega_2 = \sqrt{\psi_v}\, dv = \sqrt{g(u + v) + 2ai}\, dv.$$

L'équation (61) devient

$$(61)'' \qquad \frac{d^2}{dt^2} \log \frac{g'}{f'} = (g^2 + 4a^2)\frac{f'}{g'} - f^2\frac{g'}{f'}.$$

Comme dans le cas précédent, on remarque que si g est donnée, la surface n'est pas complètement déterminée : l'intégration de $(61)''$ introduit dans $H = f(u + v)$ 3 constantes arbitraires.

Les surfaces correspondantes sont des *hélicoïdes*. Il est visible d'abord que les courbes $u+v=$ const. de la surface sont des hélices circulaires; les formules (49) et (52) montrent en effet que ρ et τ sont constantes. On peut montrer aussi inversement que les hélicoïdes répondent bien à l'équation (61)''.

Soit l'hélicoïde

$$x=r(t)\cos\theta,\qquad y=r(t)\sin\theta,\qquad z=\zeta(t)+a\theta.$$

La section par le plan $\theta=0$ est la courbe $x=r(t)$, $z=\zeta(t)$: le paramètre t est provisoirement quelconque. Le ds^2 s'écrit

$$ds^2=(a^2+r^2)\left[\frac{(a^2+r^2)r'^2+r^2\zeta'^2}{(a^2+r^2)^2}dt^2+\left(d\theta+\frac{a\zeta'\,dt}{a^2+r^2}\right)^2\right].$$

Déterminons le paramètre t de façon que

$$(a^2+r^2)r'^2+r^2\zeta'^2=(a^2+r^2)^2,\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad dt=\frac{\sqrt{(a^2+r^2)dr^2+r^2d\zeta^2}}{a^2+r^2}.$$

Nous remarquerons que si $a=0$, la surface est de révolution, et l'on a $dt=\dfrac{\sqrt{dr^2+d\zeta^2}}{r}$: notre paramètre t généralise donc l'abscisse curviligne non euclidienne envisagée précédemment.

Posons en outre $d\varphi=d\theta+\dfrac{a\zeta'\,dt}{a^2+r^2}$; le ds^2 devient

$$ds^2=(a^2+r^2)(dt^2+d\varphi^2),$$

ce qui montre que t et φ sont des variables harmoniques associées. t, en particulier, est la variable harmonique qui reste constante le long d'une ligne d'égale courbure moyenne, car H n'est fonction que de r, donc que de t. Posons

$$t-i\varphi=2u,\qquad t+i\varphi=2v,$$

de sorte que

$$t=u+v,\qquad\varphi=i(u-v),$$

nous obtenons

$$ds^2=4(a^2+r^2)\,du\,dv.$$

La seconde forme fondamentale est

$$\Phi=\frac{1}{a^2+r^2}[r(r'\zeta''-\zeta'r'')dt^2-2ar'^2dt\,d\theta+r^2\zeta'd\theta^2]$$

et l'on trouve pour courbure moyenne :

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2(a^2+r^2)^3}\Big[\big((a^2+r^2)^2+a^2r'^2\big)\zeta'+r(a^2+r^2)(r'\zeta''-\zeta'r'')\Big],$$

ce qui se simplifie en tenant compte que, d'après la définition du paramètre t, on a

$$r''=2r-\frac{rr'^3+rr'\zeta'^2+r^2\zeta'\zeta''}{r'(a^2+r^2)}.$$

Il vient

$$\mathrm{H}=\frac{a^2\zeta'}{(a^2+r^2)^2}+\frac{r\zeta''}{2r'(a^2+r^2)}.$$

Pour trouver les formes minima, on peut exprimer Φ en du, dv

$$\Phi = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

et l'on trouve

$$L = g(t) - 2ai, \qquad N = g(t) + 2ai$$

où

$$g = \frac{1}{a^2+r^2}\left[(a^2-r^2)\zeta' + \frac{a^2 r'^2 \zeta'}{a^2+r^2} + r(r'\zeta'' - \zeta' r'')\right]$$

ou encore, en exprimant r'' comme plus haut :

$$g = \frac{2(a^2-r^2)\zeta'}{a^2+r^2} + \frac{r\zeta''}{r'}$$

et l'on a

$$\omega_1 = \sqrt{g-2ai}\,du, \qquad \omega_2 = \sqrt{g+2ai}\,dv.$$

Il est facile de vérifier que l'expression trouvée pour $H = f(t)$ et celle de $g(t)$ vérifient $(61)''$; on facilite les calculs en remarquant que

$$2(a^2+r^2)f - g = \frac{2r^2\zeta'}{a^2+r^2}, \qquad \frac{g'}{f'} = 2(a^2+r^2).$$

On remarquera que nos formules s'appliquent aux surfaces de révolution en faisant $a = 0$.

9. **Formes invariantes associées à deux formes données.** — L'étude précédente a fait apparaître deux formes linéaires construites sur les formes minima ω_1, ω_2 et sur les invariants r, s, r_2, s_1, à savoir

$$\varpi = r\omega_1 + s\omega_2, \qquad \chi = \left(s - \frac{s_1}{s}\right)\omega_1 + \left(r - \frac{r_2}{r}\right)\omega_2.$$

Indépendamment des applications géométriques, le lien qui unit ces deux formes aux formes initiales ω_1, ω_2 mérite de retenir l'attention. Notons d'abord la relation

$$d\varpi = [\varpi\chi],$$

ce n'est d'ailleurs pas une propriété caractéristique de χ, car la relation subsiste si l'on remplace χ par $\chi + m\varpi$. Le rôle précis de χ est beaucoup plus caché.

Soit f une intégrale première quelconque de $r\omega_1 + s\omega_2 = 0$ et μ le facteur intégrant correspondant, si bien que

$$df = \mu(r\omega_1 + s\omega_2).$$

On a donc

$$f_1 = \mu r, \qquad f_2 = \mu s,$$

d'où

$$f_{12} - rf_1 = \mu_2 r + \mu r_2 - \mu r^2,$$
$$f_{21} - sf_2 = \mu_1 s + \mu s_1 - \mu s^2.$$

On a déjà remarqué que $f_{12} - rf_1 = f_{21} - sf_2$, comme on le voit en différentiant extérieurement $df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2$. Multiplions la première relation par $\frac{\omega_2}{r}$, la seconde par $\frac{\omega_1}{s}$ et ajoutons ; il vient

$$(f_{12} - r f_1)\left(\frac{\omega_1}{s} + \frac{\omega_2}{r}\right) = d\mu + \mu\left[\left(\frac{s_1}{s} - s\right)\omega_1 + \left(\frac{r_2}{r} - r\right)\omega_2\right]$$

ou

$$\frac{f_{12} - r_1 f}{rs}(r\omega_1 + s\omega_2) = d\mu - \mu\chi.$$

Le facteur du premier membre s'écrit $\mu^2 \frac{f_{12} - r f_1}{f_1 f_2}$.

Or si u et v désignent des intégrales premières quelconques de $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, de sorte que $du = u_1\omega_1$, $dv = v_2\omega_2$, on a

$$f_1 = f_u u, \qquad f_{12} = f_{uv} u_1 v_2 + f_u u_{12} \qquad \text{et} \qquad f_{12} - r f_1 = f_{uv} u_1 v_2,$$

car $u_{12} - r u_1 = 0$, comme on le voit en différentiant extérieurement $du = u_1\omega_1$. On peut donc écrire la relation, en divisant par μ, et en remplaçant $\mu(r\omega_1 + s\omega_2)$ par df

$$\frac{f_{uv}}{f_u f_v} df = \frac{d\mu}{\mu} - \chi.$$

χ se trouve donc rattaché à la forme ϖ par la formule

$$\chi = \frac{d\mu}{\mu} - \frac{f_{uv}}{f_u f_v} df,$$

où f est une intégrale première quelconque de $\varpi = 0$, et μ le facteur intégrant correspondant. On peut s'assurer que le second membre reste inchangé si l'on remplace le facteur intégrant μ par un autre quelconque, $\mu\Phi(f)$; cela résulte d'ailleurs de la démonstration.

La signification de l'hypothèse : χ différentielle exacte, apparaît maintenant clairement. Il faut et il suffit que

$$\frac{f_{uv}}{f_u f_v} = \Phi(f).$$

Or cela exprime qu'on peut trouver une fonction $F(f)$ qui soit de la forme $U + V$, c'est-à-dire qui vérifie $F_{uv} = 0$. En effet $F_u = F' f_u$, $F_{uv} = F'' f_u f_v + F' f_{uv}$; on a à résoudre

$$F'' f_u f_v + F' f_{uv} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{F''}{F'} = -\frac{f_{uv}}{f_u f_v}$$

et le problème est possible pourvu que le second membre soit fonction de f, c'est-à-dire, pourvu que χ soit différentielle exacte.

Dans la seconde partie de ce travail, nous aurons encore à considérer une forme invariante Φ apparentée aux précédentes. Si l'on écrit pour abréger $\chi = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, la forme Φ est

$$\Phi = \left(\beta - \frac{\beta_1}{s}\right)\omega_1 + \left(\alpha - \frac{\alpha_2}{r}\right)\omega_2.$$

Elle est liée aux deux autres par

$$d\chi = [\varpi\Phi],$$

relation qui ne la définit pas complètement. Pour obtenir sa signification exacte, nous opérons comme précédemment, en partant de

$$\frac{d\mu}{\mu} = \chi + \frac{f_{uv}}{f_u f_v} df \qquad \text{ou} \qquad = \chi + \rho\varpi \qquad \text{en posant} \qquad \rho = \mu \frac{f_{uv}}{f_u f_v}.$$

On en déduit

$$(\log\mu)_1 = \alpha + r\rho, \qquad (\log\mu)_2 = \beta + s\rho,$$
$$(\log\mu)_{12} - r(\log\mu)_1 = \alpha_2 - \alpha r + r\rho_2 + r_2\rho - r^2\rho,$$
$$(\log\mu)_{21} - s(\log\mu)_2 = \beta_1 - \beta s + s\rho_1 + s_1\rho - s^2\rho.$$

Les deux premiers membres sont égaux; une combinaison évidente donne

$$[(\log\mu)_{12} - r(\log\mu)_1]\left(\frac{\omega_1}{s} + \frac{\omega_2}{r}\right) = -\Phi + d\rho - \rho\chi.$$

Donc

$$\Phi = d\rho - \rho\chi - \frac{(\log\mu)_{12} - r(\log\mu)_1}{rs}\varpi.$$

Ainsi se trouve rattachée Φ à une intégrale première quelconque de ϖ, et au facteur intégrant μ correspondant. Le coefficient de ϖ, au second membre, contient le groupe de termes $(\log\mu)_{12} - r(\log\mu)_1$, qui serait le second paramètre différentiel de Beltrami, $\Delta_2(\log\mu)$, pour un ds^2 égal à $4\omega_1\omega_2$; le dénominateur rs peut s'écrire $\frac{f_1 f_2}{\mu^2}$, et le numérateur serait le premier paramètre différentiel $\Delta_1 f$ dans la même hypothèse. Le rapport $\frac{(\log\mu)_{12} - r(\log\mu)_1}{rs}$ peut donc s'écrire $\mu^2\frac{\Delta_2(\log\mu)}{\Delta_1 f}$, le ds^2 étant $\frac{2\omega_1\omega_2}{A}$, avec A quelconque, et l'on a la formule

$$\Phi = d\rho - \rho\chi - \mu^2\frac{\Delta_2(\log\mu)}{\Delta_1 f}\varpi, \qquad \left(\rho = \mu\frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f}\right).$$

Nous rencontrerons les formes χ et Φ dans l'étude des surfaces : on s'apercevra que le système des équations de Codazzi et de Gauss prend une signification très claire quand on le rattache à la théorie du facteur intégrant telle qu'elle vient d'être esquissée.

(Manuscrit reçu le 11 novembre 1946.)