BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 124-129

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__124_1>

Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 9 janvier 1878.)

1. Soit à intégrer l'équation du premier ordre $dy - y'dx = 0$, où y' est déterminé par l'équation

$$V(x, y, y') = \alpha \tag{1}$$

α désignant une constante arbitraire.

M étant le multiplicateur propre à rendre $dy - y'dx$ une différentielle exacte, on peut supposer que, dans son expression, on ait remplacé α par sa valeur tirée de l'équation (1); M sera donc une fonction de x, y, y', telle que

$$M(dy - y'dx),$$

soit une différentielle exacte.

D'où l'on déduit l'équation de condition

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{dM}{dy}y' + \left(M + y'\frac{dM}{dy'}\right)\frac{dy'}{dy} = 0.$$

L'équation (1) donne d'ailleurs les relations

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{dy} = 0.$$

Tirons de ces relations les valeurs de $\frac{dy'}{dx}$ et $\frac{dy'}{dy}$, et portons-les dans l'équation précédente, il viendra

$$(2) \qquad \frac{dV}{dx}\frac{dM}{dy'} - \frac{dV}{dy'}\frac{dM}{dx} + y'\left(\frac{dV}{dy}\frac{dM}{dy'} - \frac{dV}{dy'}\frac{dM}{dy}\right) + M\frac{dV}{dy} = 0.$$

Cette équation doit être identiquement satisfaite quand on y remplace y' par sa valeur tirée de (1), et, comme α est arbitraire, elle doit être satisfaite quel que soit y'.

Le facteur d'intégrabilité M est donc déterminé par l'équation aux différences partielles (2), où x, y et y' doivent être considérées comme trois variables indépendantes.

Il suffit de trouver une solution particulière quelconque de cette équation et de remplacer, dans cette solution, y' par sa valeur tirée de l'équation (1).

Quant à la solution générale de l'équation (2), il est évident qu'elle se ramène à la solution de l'équation (1) elle-même.

2. Proposons-nous maintenant le problème suivant :

Trouver toutes les fonctions $V(x, y, y')$ telles que, y' étant déterminée par la relation (1), $V(x, y, y') = \alpha$, l'équation

$$dy - y'\,dx = 0$$

admette comme facteur d'intégrabilité une fonction donnée M de x, y et y'.

Si, dans l'équation (2), on regarde V comme la fonction inconnue, on voit immédiatement que l'intégration de cette équation dépend de l'intégration du système suivant d'équations aux différentielles ordinaires du premier ordre :

$$(3) \qquad \frac{dx}{\frac{dM}{dy'}} = \frac{dy}{M + y'\frac{dM}{dy'}} = \frac{dy'}{-\left(\frac{dM}{dx} + y'\frac{dM}{dy}\right)};$$

on a identiquement

$$\frac{d}{dx}\frac{dM}{dy'} + \frac{d}{dy}\left(M + y'\frac{dM}{dy'}\right) - \frac{d}{dy'}\left(\frac{dM}{dx} + y'\frac{dM}{dy}\right) = 0.$$

Le dernier multiplicateur du système d'équations (3) est donc l'unité.

Supposons que nous ayons trouvé une solution $V(x, y, y') = \alpha$ du problème proposé, d'après les principes donnés par Jacobi, on obtiendra une seconde solution du système (3), en posant

$$(3)' \qquad \int \frac{1}{\frac{d\alpha}{dy'}}\left[\left(M + y'\frac{dM}{dy'}\right)dx - \frac{dM}{dy'}dy\right] = \beta,$$

y' étant remplacé sous le signe somme par sa valeur déduite de (1) et β désignant une constante; non-seulement la quantité sous le signe somme sera une différentielle exacte, comme on le sait par les propositions dues à Jacobi, mais encore l'intégration pourra toujours s'effectuer effectivement.

La solution la plus générale du problème est ainsi donnée par la relation suivante, où F désigne une fonction arbitraire,

$$(4) \qquad F(\alpha, \beta) = \text{const.},$$

où α doit être remplacé par sa valeur déduite de (1); et l'équation $dy - y'dx = 0$, où la valeur de y' est fournie par l'équation (4), admet comme facteur d'intégrabilité l'expression $M(x, y, y')$, où y' doit être remplacé par sa valeur déduite de (4).

3. Soit $f(x, y, \alpha)$ une fonction quelconque de x, y et d'une constante arbitraire α; en posant

$$(5) \qquad \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0,$$

l'équation $dy - y'dx = 0$ admet évidemment comme facteur d'intégrabilité l'expression

$$M = \Phi(\alpha)F'(f)\frac{df}{dy},$$

quelles que soient les fonctions Φ et F.

Je suppose que, dans cette expression, on ait remplacé α par sa valeur tirée de l'équation (5), et je me propose de trouver toutes les équations qui admettent M comme facteur d'intégrabilité.

Pour cela, on a à intégrer le système d'équation (3) dont une première intégrale est donnée par l'équation (5), où α désigne une constante arbitraire; d'après ce que j'ai dit plus haut, une seconde intégrale sera donnée par l'équation (3)', qui devient alors

$$\int \frac{dy'}{d\alpha}\left[\left(\mathrm{M}+y'\frac{d\mathrm{M}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy'}\right)dx-\frac{d\mathrm{M}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy'}\,dy\right]=\beta,$$

ou encore

$$\int \frac{dy'}{d\alpha}\left(\mathrm{M}+y'\frac{d\mathrm{M}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy'}\right)dx-\frac{d\mathrm{M}}{d\alpha}\,dy=\beta.$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (4),

$$\frac{dy'}{d\alpha}=\frac{\dfrac{df}{dx}\dfrac{d^2f}{d\alpha\,dy}-\dfrac{df}{dy}\dfrac{d^2f}{d\alpha\,dx}}{\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2}.$$

En substituant cette valeur de $\dfrac{dy'}{d\alpha}$ dans l'expression précédente et intégrant, il vient

$$\Phi(\alpha)\mathrm{F}'(f)\frac{df}{d\alpha}+\Phi'(\alpha)\mathrm{F}(f)=\beta;$$

d'où cette conclusion :

Quelles que soient les fonctions Φ, Θ *et* F, *le facteur d'intégrabilité de l'équation*

$$dy-y'\,dx=0,$$

où y' *est déterminé par la relation*

$$\Phi(\alpha)\mathrm{F}'(f)\frac{df}{d\alpha}+\Phi'(\alpha)\mathrm{F}(f)+\Theta(\alpha)=0, \tag{6}$$

relation dans laquelle α *doit être remplacé par sa valeur déduite de l'équation* (5), *est*

$$\Phi(\alpha)\mathrm{F}'(f)\frac{df}{dy};$$

α *étant, dans cette expression, remplacé par sa valeur tirée de l'équation* (6).

4. La proposition précédente peut encore s'énoncer ainsi :

En désignant par Φ, Ψ *et* Θ *des fonctions arbitraires, on peut toujours ramener aux quadratures l'intégration de l'équation*

$$\Phi(\alpha)F'(f)\frac{df}{d\alpha} + \Psi(\alpha)F(f) + \Theta(\alpha) = 0, \tag{7}$$

α *étant déterminé par l'équation*

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0.$$

En effet, si Φ n'est pas identiquement nul, on pourra facilement ramener l'équation précédente à la forme de l'équation (6).

Si $\Phi = 0$, l'équation peut se ramener à la forme $f = \varphi(\alpha)$, α étant remplacé par sa valeur tirée de (6) et son intégrale est, comme l'a remarqué Lagrange,

$$f(x, y, \alpha) = \varphi(\alpha),$$

α désignant une constante arbitraire.

5. Je ferai remarquer encore que, l'équation (6) ne déterminant f qu'à une constante arbitraire près, on peut, dans cette équation, remplacer f par $f + \mu(\alpha)$, μ désignant une fonction arbitraire de α.

On sait donc, quelles que soient les fonctions Φ, Ψ, Θ, μ *et* f, *intégrer l'équation*

$$\Phi(\alpha)F'[f + \mu(\alpha)]\left[\frac{df}{d\alpha} + \mu'(\alpha)\right] \\ + \Psi(\alpha)F[f + \mu(\alpha)] + \Theta(\alpha) = 0,$$

où α *doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation*

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0.$$

6. Soit, pour prendre l'exemple le plus simple, $f = y - \alpha x$; on en déduit $y' = \alpha$.

D'où il suit que l'équation

$$dy - y'dx = 0,$$

où y' est déterminée par l'équation

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi'(y')F[y - xy' + \varphi(y')] \\ \quad - x\Phi(y')F'[y - xy' + \varphi(y')] + \Theta(y') = 0, \end{cases}$$

a pour facteur d'intégrabilité, quelles que soient les fonctions Φ, F, Θ et φ, l'expression

$$M = \Phi(y')F'[y - xy' + \varphi(y')],$$

où y' doit être remplacé par sa valeur tirée de la relation (8). Faisons, par exemple,

$$\varphi(t) = 0, \quad \Phi(t) = 1, \quad F(t) = -t^2 \quad \text{et} \quad \Theta(t) = t^2,$$

on aura

$$y'^2 - 2x^2y' + 2xy = 0;$$

d'où l'équation différentielle

$$dy - \left(x^2 + \sqrt{x^4 - 2xy}\right)dx = 0,$$

dont un facteur d'intégrabilité sera

$$y - x^3 - x\sqrt{x^4 - 2xy}.$$

Effectivement, on a

$$\begin{aligned} &\left(y - x^3 - x\sqrt{x^4 - 2xy}\right)\left[dy - \left(x^2 + \sqrt{x^4 - 2xy}\right)\right]dx \\ &\quad = \left(y - x^4 - x\sqrt{x^4 - 2xy}\right)dy \\ &\qquad - \left[3yx^2 - x^5 + \left(y - 2x^3\right)\sqrt{x^4 - 2xy}\right]dx, \end{aligned}$$

expression qui, comme il est facile de le vérifier, est une différentielle exacte.