D. ANDRÉ

Note sur les développements des puissances de certaines fonctions

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 120-121
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__120_1>

Note sur les développements des puissances de certaines fonctions; par M. Désiré André.

(Séance du 19 décembre 1877.)

Considérons une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$\sum_{0}^{n}{}_{t}\, C_t \frac{d^t\varphi}{dx} = k\Phi,$$

dont le premier membre est celui d'une équation linéaire d'ordre n à coefficients constants, et au second membre de laquelle Φ représente un polynôme quelconque, entier par rapport à la fonction φ, à la variable x, à l'indéterminée k, et à des exponentielles de la forme e^{mx}.

Nous avons démontré récemment (¹) que si l'on pose, d'une part,

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{t}\, \nu_t k^t,$$

et de l'autre

$$\varphi(x) = \sum_t (-1)^t F_t \frac{x^t}{t!}, \quad F_r = \sum_t \theta_{r,t} k^t,$$

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 29 octobre 1877.

ν_t est un polynôme entier par rapport à la variable x et a des exponentielles de la forme e^{mx}, et que $\theta_{r,t}$, regardé comme fonction de r seulement, l'indice t étant supposé constant, constitue le terme général d'une série récurrente proprement dite.

L'objet de la présente Note est de faire remarquer un fait presque évident, à savoir que ces deux résultats s'étendent aux développements d'une puissance quelconque, d'exposant entier et positif, de la fonction $\varphi(x)$, c'est-à-dire de faire remarquer, si l'on pose, d'une part,

$$\varphi^p(x) = \sum_t^{\infty} \nu_t^{(p)} k^t$$

et, de l'autre,

$$\varphi^p(x) = \sum_t (-1)^t F_t^{(p)} \frac{x^t}{t!}, \quad F_r^{(p)} = \sum_t \theta_{r,t}^{(p)} k^t,$$

que $\nu_t^{(p)}$ est, comme ν_t, un polynôme entier par rapport à la variable x et a des exponentielles de la forme e^{mx}, et que $\theta_{r,t}^{(p)}$, regardé comme fonction de r seulement, constitue, de même que $\theta_{r,t}$, le terme général d'une série récurrente proprement dite.