

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. RAUCH

Deux remarques sur les fonctions entières d'ordre fini ρ

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 93-96

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__93_0

© Bulletin de la S. M. F., 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUX REMARQUES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ρ

PAR M. A. RAUCH.

1° Avec les notations de M. R. Nevanlinna ⁽¹⁾ nous posons

$$S(\theta, 2\alpha) = \lim_{k=\rho+0} \left\{ \left[\Sigma \frac{1}{r_n^k(x)} \right] : \int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right\}, \quad k > \rho$$

$$I(\theta) = \lim_{k=\rho+0} \left\{ \left[\int_1^\infty \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{dr}{r^{k+1}} \right] : \int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right\},$$

où Σ est étendue aux racines de $f(z) = x$ situées dans un angle arbitrairement petit de bissectrice $\arg z = \theta$, et d'ouverture 2α . Nous supposons $f(z)$ de la classe de divergence de l'ordre $\rho > 0$ et fini. Considérons la courbe $I = I(\theta)$ rapportée à deux axes rectangulaires $O\theta$, OI . Si $\arg z = \theta$ est une direction isolée de Borel d'ordre ρ , on a

$$2\pi \lim_{\alpha=0} S(\theta, 2\alpha) = I'(\theta + 0) - I'(\theta - 0) \quad (2).$$

Si la fonction a un nombre *fini* de directions de Borel, $S(\theta, 2\alpha)$ est généralement > 0 , quelque petit que soit α . Il n'en est plus de même, si la fonction a une infinité de directions de Borel. M. Valiron nous a suggéré d'étudier alors le rapport $S : \alpha$.

Considérons un intervalle $a < \theta < b$ où S tend vers zéro avec α en chaque point. Partout dans l'intervalle la dérivée de $I(\theta)$ à droite est égale à la dérivée à gauche. $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ étant trois valeurs de l'intervalle ($\theta_0 - \theta_1 = \theta_2 - \theta_0 = \alpha$), on a, d'après une formule de M. Valiron ⁽³⁾

$$2I(\theta_0) \cos \rho\alpha + \frac{2\pi}{\rho} \lim_{k=\rho+0} \left[\Sigma \frac{\sin k\alpha_n}{r_n^k(x)} \right] : \left[\int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right] = I(\theta_1) + I(\theta_2),$$

⁽¹⁾ *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris, Gauthier-Villars.

⁽²⁾ *Sur les directions de Borel des fonctions entières de la classe des divergences de l'ordre ρ* (*Bull. des Sc. Math.*, t. 65, 1941, p. 219-224).

⁽³⁾ *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini* (*Journ. de Math.*, t. 10, 1931, p. 457-480).

où Σ est étendue aux racines $r_n e^{i\theta_n}$ de $f(z) = x$, $\alpha - |\theta_n - \theta_0| = \alpha_n$, situées dans l'angle $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Développons les lignes trigonométriques et divisons les deux membres par α^2 . Il vient

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\alpha} \lim_{k \rightarrow \rho+0} \left[\Sigma \frac{\alpha_n}{\alpha r_n^k} \right] : \left[\int_1^\infty m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right] \\ = \frac{I(\theta_1) + I(\theta_2) - 2I(\theta_0)}{\alpha^2} + \rho^2 I(\theta_0) + \varphi. \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers zéro avec α . On diminue le premier membre en l'étendant seulement aux racines de l'angle $|\theta - \theta_0| \leq \frac{\alpha}{2}$ et en remplaçant α_n par $\frac{\alpha}{2}$. On obtient

$$\pi \frac{S(\theta_0, \alpha)}{\alpha} \leq \frac{I(\theta_1) + I(\theta_2) - 2I(\theta_0)}{\alpha^2} + \rho^2 I(\theta) + \varphi \leq 4\pi \frac{S(\theta_0, 2\alpha)}{2\alpha}.$$

En faisant tendre α vers zéro on conclut :

Si en chaque point d'un intervalle $a < \theta < b$ l'expression $\lim(S : \alpha)$ a un sens, et si la fonction $I(\theta)$ y admet une dérivée seconde, on a dans tout l'intervalle

$$(1) \quad \pi \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S(\theta, \alpha)}{\alpha} \leq I''(\theta) + \rho^2 I(\theta) \leq 4\pi \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S(\theta, 2\alpha)}{2\alpha}.$$

Aux limites a et b nous pouvons avoir des directions de Borel, où S ne tend plus vers zéro avec α .

Cas particuliers. — Dans les hypothèses précédentes on a $\lim(S : \alpha) = 0$ dans tout intervalle, où la fonction $I(\theta)$ est partout nulle, ou sinusoïdale

$$I = A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta.$$

De même $\lim(S : \alpha) > 0$ dans tout intervalle, où $I(\theta) \equiv C$, ou bien

$$I = A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta + C.$$

2° Soit $f(z)$ une fonction méromorphe de l'ordre $\rho > 0$ et fini. On sait que

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f - a_0}\right) = m\left(r, \frac{1}{f'} \frac{f'}{f - a_0}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r) \\ \leq T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r). \end{aligned}$$

D'autre part

$$m\left(r, \frac{1}{f-a_0}\right) \geq T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f-a_0}\right) - O(1).$$

Donc

$$(2) \quad T(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{f-a_0}\right) + T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r).$$

Appliquons aux fonctions f', f'', \dots le deuxième théorème fondamental

$$T(r, f') \leq \bar{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'-a_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r),$$

$$a_1 \neq 0,$$

$$T(r, f'') \leq \bar{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f''-a_2}\right) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'''}\right) + S(r),$$

$$a_2 \neq 0,$$

et ainsi de suite. Ajoutons toutes ces inégalités, y comprise (2), membre à membre; il vient

$$T(r, f) + T(r, f'') + T(r, f''') + \dots + T(r, f^{(v)})$$

$$\leq \sum_{i=1}^v N\left(r, \frac{1}{f^{(i)}-a_i}\right) + v\bar{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f^{(v+1)}}\right) + S(r).$$

L'inégalité se simplifie si $f(z)$ est entière

$$m(r, f) + m(r, f'') + m(r, f''') + \dots + m(r, f^{(v)})$$

$$\leq \sum_{i=0}^v N\left(r, \frac{1}{f^{(i)}-a_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(v+1)}}\right) + S(r),$$

et *a fortiori*

$$(3) \quad v m(r, f^{(v)}) \leq \sum_{i=0}^v N\left(r, \frac{1}{f^{(i)}-a_i}\right) + S(r), \quad a_1 a_2 \dots a_v \neq 0.$$

Considérons maintenant la classe des fonctions entières pour lesquelles

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, f^{(i)})}{m(r, f)} = 1$$

quel que soit i . Divisons les deux membres de (3) par $m(r, f)$ et

introduisons avec M. Milloux ⁽⁴⁾ les défauts

$$\delta(a, f^{(i)}) = 1 - \overline{\lim} \cdot \frac{N\left(r, \frac{1}{f^{(i)} - a}\right)}{T(r, f)}.$$

On trouve immédiatement

$$\sum_0^{\nu} \delta(a, f^{(i)}) \leq 1, \quad a \neq 0,$$

pour toute valeur de ν .

(Manuscrit reçu le 3 juillet 1944.)

⁽⁴⁾ *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées*, Paris, Hermann. (Les résultats de M. Milloux sont plus généraux que les nôtres).
