

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. ANGLADE

**Points caractéristiques des quadriques de Darboux et propriétés de certains quadrilatères gauches introduits en géométrie différentielle projective des surfaces**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 72 (1944), p. 1-26

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1944\\_\\_72\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**BULLETIN**  
DE LA  
**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

**POINTS CARACTÉRISTIQUES DES QUADRIQUES DE DARBOUX  
ET PROPRIÉTÉS DE CERTAINS QUADRILATÈRES GAUCHES  
INTRODUITS EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE  
DES SURFACES;**

PAR M. E. ANGLADE,  
Professeur au Lycée de Béziers.

Dans la première partie de cette étude, je donne quelques propriétés des points caractéristiques de toute quadrique de Darboux. Les coordonnées d'un point quelconque  $x$  d'une surface (S), rapportée à ses asymptotiques  $u$ ,  $v$ , sont écrites sous une forme normale qui permet de déterminer plus simplement les deux directrices de Wilczynski  $(\omega_1)$ ,  $(\omega_2)$  et l'équation de la quadrique de Lie  $(\Phi)$ . Dans le tétraèdre formé par les points d'intersection de  $(\Phi)$  et des droites  $(\omega_1)$ ,  $(\omega_2)$ , la quadrique de Lie a pour équation locale

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0,$$

tandis que, si  $\lambda$  est une fonction arbitraire de  $u$ ,  $v$ ,

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 + 2 \lambda z_4^2 = 0$$

donne les quadriques de Darboux (D) du faisceau défini par  $(\Phi)$  et le plan tangent (T) à (S) compté deux fois. Il existe, pour chaque quadrique (D), deux cônes quadratiques  $(\gamma_u)$ ,  $(\gamma_v)$ , de sommet  $x$ , qui contiennent les points caractéristiques. Chacun d'eux touche le plan (T) le long d'une direction asymptotique de (S). Le plan polaire d'une tangente asymptotique par rapport

à un cône ( $\gamma$ ) passe par l'une ou l'autre des directrices de Wilczynski et reste le même quand on change de quadrique de Darboux. En reliant les points caractéristiques au point  $x$ , on obtient les droites  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$ ,  $(\Delta_3)$ ,  $(\Delta_4)$  communes aux deux cônes ( $\gamma$ ). On constate que les plans tels que  $(\Delta_1\Delta_2)$ ,  $(\Delta_3\Delta_4)$  coupent le plan tangent (T) le long de directions conjuguées pour la surface (S).

Pour une famille de quadriques (D) associées à une surface *isothermo-asymptotique*, les équations des cônes ( $\gamma$ ) prennent des formes particulièrement simples. Dans ce cas, la directrice  $(\omega_1)$  issue de  $x$  porte l'un des points caractéristiques; elle coïncide avec l'une des droites  $(\Delta)$ ,  $(\Delta_4)$  par exemple. Le plan des points caractéristiques contenus sur les droites  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$ ,  $(\Delta_3)$  passe par la directrice  $(\omega_2)$ ; les plans  $(\Delta_1\Delta_2)$ ,  $(\Delta_2\Delta_3)$ ,  $(\Delta_3\Delta_4)$  contiennent les directions de Darboux de la surface (S); les plans  $(\omega_1\Delta_1)$ ,  $(\omega_1\Delta_2)$ ,  $(\omega_1\Delta_3)$  coupent (T) suivant les directions de Segre. On démontre également que les droites telles que  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$  sont conjuguées harmoniques par rapport aux intersections de leur plan par les plans (T) et  $(\omega_1\Delta_3)$ . Enfin,  $(\omega_1)$ ,  $(\Delta_4)$  et les intersections du plan  $(\omega_1\Delta_1)$  par les plans (T) et  $(\Delta_2\Delta_3)$  forment un faisceau de rapport anharmonique constant égal à 3.

Dans la deuxième partie, dès le paragraphe 11, la surface (S) redevient quelconque. Il est d'abord question de couples de quadrilatères  $(\Sigma)$ ,  $(\theta)$  à diagonales sécantes et tracés sur une même quadrique : *leurs côtés se séparent harmoniquement*. De ce théorème, utilisé dans toute la suite, on trouvera plusieurs démonstrations dont une de M. Gambier et l'autre de M. Vincensini. Je me permets de leur exprimer ici ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

En considérant l'hyperquadrique (Q) qui représente l'espace réglé dans l'espace auxiliaire de Félix Klein, en introduisant, selon la méthode de M. Godeaux, une suite de Laplace autopolaire par rapport à (Q) et liée à la surface (S), on retrouve la propriété due à M. Bompiani : *les diagonales du quadrilatère de Demoulin  $(\Sigma_1)$  s'appuient sur les directrices de Wilczynski  $(\omega_1)$ ,  $(\omega_2)$* . Sur la quadrique de Lie, il existe un quadrilatère  $(\theta_1)$  qui admet ces directrices pour diagonales. Les côtés de  $(\Sigma_1)$  et  $(\theta_1)$  se partagent harmoniquement.

En menant le long de l'asymptotique  $u = \text{const.}$  les tangentes aux asymptotiques  $v = \text{const.}$ , on forme une surface réglée gauche  $(R_u)$ . Une surface  $(R_v)$  s'introduit par un procédé analogue. Les complexes linéaires osculateurs à ces deux surfaces ont en commun une congruence linéaire dont les directrices possèdent les mêmes propriétés que  $(\omega_1)$  et  $(\omega_2)$ .

Les résultats obtenus à propos des quadrilatères  $(\Sigma_1)$ ,  $(\theta_1)$  de la quadrique de Lie peuvent s'étendre à d'autres quadrilatères  $(\Sigma_n)$ ,  $(\theta_n)$  tracés sur des quadriques d'une suite donnée par M. Godeaux.

Prenons maintenant une congruence  $(W)$ . Soient  $x$ ,  $\bar{x}$  les foyers d'une même génératrice,  $(T)$ ,  $(\bar{T})$  les plans focaux et  $(S)$ ,  $(\bar{S})$  les nappes focales. La biquadratique d'intersection des quadriques de Lie  $(\Phi)$ ,  $(\bar{\Phi})$  relatives aux points  $x$ ,  $\bar{x}$  des deux nappes se décompose en quatre droites  $(i_1)$ ,  $(i_2)$ ,  $(i'_1)$ ,  $(i'_2)$ . On peut trouver dans le faisceau  $(x, \bar{T})$  une droite  $(h_1)$  dont la conjuguée  $(h_2)$  par rapport à  $(\Phi)$  fait partie du faisceau  $(\bar{x}, T)$ . Il est curieux de constater que  $(h_1)$ ,  $(h_2)$  sont également conjuguées par rapport à  $(\bar{\Phi})$ . Ces droites rencontrent les diagonales du quadrilatère  $(\Sigma)$  déterminé par  $(i_1)$ ,  $(i_2)$ ,  $(i'_1)$ ,  $(i'_2)$ . Les côtés des quadrilatères de diagonales  $(h_1)$ ,  $(h_2)$  compris sur  $(\Phi)$  et  $(\bar{\Phi})$  séparent harmoniquement ceux de  $(\Sigma)$ .

La dernière application ne concerne plus la théorie des surfaces. Elle fait intervenir un quadrilatère gauche  $(\Sigma)$  dont les couples de côtés opposés sont  $(i_1, i_2)$ ,  $(i'_1, i'_2)$ . Un complexe  $(B)$  contient la congruence de directrices  $(i_1)$ ,  $(i_2)$ ; un complexe  $(B')$  passe par la congruence linéaire de directrices  $(i'_1)$ ,  $(i'_2)$ . Les directrices de la congruence linéaire commune à ces deux complexes en involution s'appuient sur les diagonales de  $(\Sigma)$  en les divisant harmoniquement; elles sont conjuguées par rapport à toute quadrique  $(\Phi)$  passant par  $(\Sigma)$ ; elles déterminent sur  $(\Phi)$  un quadrilatère  $(\theta)$  auquel s'applique le théorème énoncé plus haut.

#### POINTS CARACTÉRISTIQUES DES QUADRIQUES DE DARBOUX.

1. **Coordonnées normales de Wilczynski.** — Soit  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  un système quelconque de coordonnées projectives homogènes d'un point, *non parabolique*, d'une surface  $(S)$  rapportée

à ses asymptotiques  $u, \nu$ . Les déterminants

$$|X_{uu} \ X_u \ X_\nu \ X|, \quad |X_{\nu\nu} \ X_u \ X_\nu \ X|$$

sont simultanément nuls. Il existe donc des fonctions  $A, B, C, M, N, P$ , des paramètres  $u, \nu$ , telles que

$$(1) \quad X_{uu} + AX_u + BX_\nu + CX = 0, \quad X_{\nu\nu} + MX_u + NX_\nu + PX = 0.$$

L'une des conditions d'intégrabilité de ce système s'écrit

$$A_\nu - N_u = 0.$$

Elle montre qu'il est possible de déterminer une fonction  $\rho(u, \nu)$  vérifiant

$$2(\log \rho)_u + A = 0, \quad 2(\log \rho)_\nu + N = 0.$$

Remplaçons le système de coordonnées  $X$  par le système  $x$  défini par

$$(2) \quad X = \rho x.$$

Les nouvelles coordonnées sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles

$$(3) \quad x_{uu} + 2bx_\nu + cx = 0, \quad x_{\nu\nu} + 2ax_u + dx = 0,$$

qui se déduit de (1) par la substitution (2).

Avec ces valeurs  $x$ , on obtient les *coordonnées normales de Wilczynski*. Nous les utiliserons dans tout ce qui suit.

Les conditions d'intégrabilité de (3),

$$(4) \quad \begin{cases} a_{uu} + d_u + 2ba_\nu + 4ab_\nu = 0, \\ b_{\nu\nu} + c_\nu + 2ab_u + 4ba_u = 0, \\ c_{\nu\nu} + 2ac_u + 4a_uc = d_{uu} + 2bd_\nu + 4b_\nu d, \end{cases}$$

s'emploient rarement sous cet aspect. On observe, dans toute étude de géométrie différentielle projective, que les expressions

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(\log a)_{uu} + (\log a)_u^2 + 4(b_\nu + c), \\ \beta &= 2(\log b)_{\nu\nu} + (\log b)_\nu^2 + 4(a_u + d), \\ h &= 4ab - (\log b)_{u\nu}, \quad k = 4ab - (\log a)_{u\nu}, \end{aligned}$$

reviennent très souvent. Par suite, il est bon de transformer les conditions (4) en introduisant  $\alpha, \beta$ , pour éliminer  $c$  et  $d$ . Toutes les fois que les termes  $(\log a)_{u\nu}, (\log b)_{u\nu}$  apparaissent, il faut les

remplacer respectivement par  $4ab - k$  et  $4ab - h$ . Enfin, la dernière de ces conditions peut s'écrire

$$\begin{aligned} 2ac_u + 4a_uc - (b_{\nu\nu} + 2ab_u + 4ba_u)_\nu \\ = 2bd_\nu + 4b_\nu d - (a_{uu} + 2ba_\nu + 4ab_\nu)_u, \end{aligned}$$

ce qui transforme (4) en un système équivalent.

On trouve ainsi pour conditions d'intégrabilité <sup>(1)</sup> de (3)

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \beta_u + 2h(\log bh)_\nu = 0, \\ \alpha_\nu + 2k(\log ak)_u = 0, \\ \alpha\alpha(\log a^2\alpha)_u = b\beta(\log b^2\beta)_\nu. \end{cases}$$

**2. Remarques sur les coordonnées radiales d'une droite.** — Deux points  $x, y$  déterminent une droite ( $g$ ). Ses coordonnées radiales

$$G_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}$$

sont, dans un espace linéaire ( $S_5$ ) à cinq dimensions, les coordonnées homogènes d'un point G placé sur l'hyperquadrique (Q)

$$(5) \quad G_{12}G_{34} + G_{13}G_{42} + G_{14}G_{23} = 0.$$

Le point G est l'image de la droite ( $g$ ). Nous conviendrons d'écrire

$$G = |x \ y|,$$

pour désigner ses coordonnées.

La condition bien connue pour que deux droites ( $g$ ), ( $g'$ ), d'images G et G', soient dans un même plan,

$$(6) \quad \begin{aligned} \Omega(G, G') = G_{12}G'_{34} + G_{13}G'_{42} + G_{14}G'_{23} \\ + G_{34}G'_{12} + G_{42}G'_{13} + G_{23}G'_{14} = 0, \end{aligned}$$

équivalait à dire que les points G et G' sont conjugués par rapport à (Q). Il ne faut pas oublier que l'on a

$$(6 \text{ bis}) \quad \Omega(|xy|, |zt|) = |xyzt|,$$

car le second membre de (6) représente alors le développement <sup>(2)</sup> de ce dernier déterminant par la règle de Laplace.

<sup>(1)</sup> L. GODEAUX, *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Hermann, 1934.

<sup>(2)</sup> Dans le cas très fréquent où G et G' désignent des sommes,  $\Omega(G, G')$  se développe comme le produit de ces deux sommes. Ainsi

$$\Omega(A + B, M + N) = \Omega(A, M) + \Omega(B, M) + \Omega(A, N) + \Omega(B, N).$$

Observons enfin que l'on peut remplacer l'équation (5) par  
(5 bis)  $\Omega(G, G) = 0.$

**8. Directrices de Wilczynski.** — Désignons par  $(S_u)$ ,  $(S_v)$  les développables qui admettent pour arêtes de rebroussement les asymptotiques  $v = \text{const.}$ ,  $u = \text{const.}$ , tracées sur  $(S)$  et passant par  $x$ . Les complexes linéaires osculateurs à ces surfaces contiennent une même congruence linéaire dont nous cherchons les directrices appelées *directrices de Wilczynski*.

La génératrice  $(xx_u)$  de la développable  $(S_u)$  a pour image le point

$$U = |xx_u|,$$

qui décrit une courbe lorsque  $u$  varie seul. L'hyperplan  $UU_u U_{uu} U_{uuu} U_{uuuu}$ , osculateur à cette courbe, coupe  $(Q)$  suivant l'image du complexe linéaire osculateur à  $(S_u)$ .

Dérivons  $U$  en tenant compte des relations (3). On constate alors que l'hyperplan précédent  $(H)$  est déterminé par les points

$$\begin{aligned} &|xx_u|, |xx_v|, |xx_{uv}| + |x_u x_v|, |x_u x_{uv}|, \\ &|x_v x_{uv}| + |x_u x_v|(\log b), \end{aligned}$$

Montrons qu'aucun hyperplan ne passe par les six points

$$|xx_u|, |xx_v|, |x_u x_v|, |xx_{uv}|, |x_u x_{uv}|, |x_v x_{uv}|.$$

Cela revient à prouver l'impossibilité de tout système de relations de la forme

$$(7) \quad \begin{aligned} \Sigma = A |xx_u| + B |xx_v| + C |x_u x_v| \\ + D |xx_{uv}| + E |x_u x_{uv}| + F |x_v x_{uv}| = 0. \end{aligned}$$

En calculant successivement

$$\Omega(\Sigma, |xx_u|), \quad \Omega(\Sigma, |xx_v|), \quad \Omega(\Sigma, |x_u x_v|), \quad \dots, \quad \Omega(\Sigma, |x_v x_{uv}|)$$

et en observant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & x_u & x_v & x_{uv} \end{vmatrix}$$

ne peut s'annuler en un point  $x$  non parabolique de  $(S)$ , on voit que le système (7) n'admet que la solution évidente

$$A = B = C = D = E = F = 0.$$

Donc, si  $U_1$  est le pôle de l'hyperplan (H) par rapport à (Q), ses coordonnées s'écrivent

$$U_1 = M |xx_u| + N |xx_\nu| + P |x_u x_\nu| \\ + Q |xx_{u\nu}| + R |x_u x_{u\nu}| + S |x_\nu x_{u\nu}|.$$

Les conditions de polarité (6) vérifiées par  $U_1$  et les cinq points qui déterminent (H) donnent

$$N = R = S = 0, \quad P + Q = 0, \quad M + Q(\log b)_\nu = 0$$

et, par suite,

$$U_1 = |xx_{u\nu}| - |x_u x_\nu| - |xx_u|(\log b)_\nu.$$

De même l'hyperplan de pôle

$$V_1 = |xx_{u\nu}| + |x_u x_\nu| - |xx_\nu|(\log a)_u$$

représente le complexe osculateur à la développable ( $S_\nu$ ).

Les images des directrices de la congruence linéaire commune aux deux complexes s'obtiennent en prenant les points d'intersection de la droite  $U_1 V_1$  et de (Q). Ces points

$$pU_1 + qV_1$$

doivent vérifier la condition (5 bis). Il en résulte la condition

$$p^2 - q^2 = 0,$$

qui montre que les images des directrices de Wilczynski sont

$$V_1 + U_1 = 2 |xx_{u\nu}| - |xx_u|(\log b)_\nu - |xx_\nu|(\log a)_u, \\ V_1 - U_1 = 2 |x_u x_\nu| + |xx_u|(\log b)_\nu - |xx_\nu|(\log a)_u.$$

La première directrice relie donc les deux points

$$x \quad \text{et} \quad x_u(\log b)_\nu + x_\nu(\log a)_u - 2x_{u\nu},$$

tandis que la deuxième joint les points

$$x(\log a)_u - 2x_u \quad \text{et} \quad x(\log b)_\nu - 2x_\nu$$

pris dans le plan tangent (T).

**4. Première équation locale de la quadrique de Lie. Quadriques de Darboux.** — Menons, le long de l'asymptotique  $u = \text{const.}$  qui passe par le point  $x$  de (S), les tangentes aux asymptotiques



$\nu = \text{const.}$  Nous formons la surface réglée gauche  $(R_u)$ . Les coordonnées

$$X = x + \omega x_u$$

de l'un quelconque de ses points s'expriment en fonction des variables  $\nu$  et  $\omega$ .

On sait que la quadrique de Lie  $(\Phi)$  relative au point  $x$  de  $(S)$ , est le lieu des tangentes menées, le long de la génératrice issue de  $x$ , aux asymptotiques curvilignes de  $(R_u)$ .

L'équation différentielle des asymptotiques de cette surface,

$$| X \quad X_\nu \quad X_\omega \quad d^2 X | = 0,$$

s'écrit

$$| x + \omega x_u \quad x_\nu + \omega x_{\nu u} \quad x_u \quad (x_{\nu\nu} + \omega x_{\nu\nu u}) d\nu^2 + 2x_{u\nu} d\nu d\omega | = 0,$$

ou, en vertu de (3),

$$| x x_u x_\nu x_{\nu u} | (d\nu d\omega - 2ab\omega^2 d\nu^2) = 0.$$

De l'équation des asymptotiques curvilignes de  $(R_u)$ ,

$$d\omega - 2ab\omega^2 d\nu = 0,$$

on tire immédiatement les équations paramétriques de  $(\Phi)$ ,

$$(8) \quad X = x + \omega(1 + 2ab\omega z)x_u + zx_\nu + z\omega x_{\nu u},$$

dans lesquelles  $z$  et  $\omega$  désignent les variables.

Les directrices de Wilczynski coupent  $(\Phi)$  en

$$x, \quad y = [8ab - (\log a)_u (\log b)_\nu] x + 2x_u (\log b)_\nu + 2x_\nu (\log a)_u - 4x_{\nu u},$$

et en

$$m = x(\log a)_u - 2x_u, \quad n = x(\log b)_\nu - 2x_\nu.$$

Un point quelconque  $X$  de l'espace a des coordonnées qui peuvent se mettre sous la forme

$$X = t_1 x + t_2 x_u + t_3 x_\nu + t_4 x_{\nu u},$$

en représentant par  $t_1, t_2, t_3, t_4$  ses coordonnées locales dans le tétraèdre  $(x x_u x_\nu x_{\nu u})$ .

D'après (8), on trouve pour tout point de  $(\Phi)$ ,

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \omega(1 + 2ab\omega z), \quad t_3 = z, \quad t_4 = z\omega,$$

ce qui donne l'équation locale de la quadrique de Lie,

$$t_1 t_4 - t_2 t_3 + 2 ab t_4^2 = 0.$$

On constate immédiatement que nous aurions trouvé la même quadrique en partant de la surface réglée gauche ( $R_\nu$ ).

Toute quadrique de Darboux (D) du faisceau formé par ( $\Phi$ ) et le plan tangent (T) compté deux fois, est déterminée par

$$(9) \quad 2(t_1 t_4 - t_2 t_3) + (4 ab - \lambda) t_4^2 = 0,$$

si l'on désigne par  $\lambda$  une fonction arbitraire de  $u$  et  $v$  astreinte seulement à posséder des dérivées partielles du premier ordre.

**5. Recherche des points caractéristiques d'une quadrique de Darboux.** — Un point de coordonnées locales  $t$  dans le repère ( $x x_u x_v x_{uv}$ ), relatif au point  $x$ , a pour coordonnées  $t' = t + \Delta t$  dans le repère relatif au point  $x + \Delta x$ . Nous avons

$$t_1 x + t_2 x_u + t_3 x_v + t_4 x_{uv} = (t_1 + \Delta t_1)(x + \Delta x) + (t_2 + \Delta t_2)(x_u + \Delta x_u) + \dots,$$

ce qui conduit aux relations immédiates, si l'on tient compte de (3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_1}{\partial u} &= ct_2 + (c_v - 2bd)t_4, & \frac{\partial t_1}{\partial v} &= dt_3 + (d_u - 2ac)t_4, \\ \frac{\partial t_2}{\partial u} &= -t_1 - 4abt_4, & \frac{\partial t_2}{\partial v} &= 2at_3 + (2a_u + d)t_4, \\ \frac{\partial t_3}{\partial u} &= 2bt_2 + (2b_v + c)t_4, & \frac{\partial t_3}{\partial v} &= -t_1 - 4abt_4, \\ \frac{\partial t_4}{\partial u} &= -t_3, & \frac{\partial t_4}{\partial v} &= -t_2. \end{aligned}$$

Passons maintenant à la détermination des points caractéristiques de la surface

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, a, b, \lambda) = 0.$$

La surface relative au point  $x + \Delta x$  a pour équation, dans le repère correspondant,

$$F(t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, a + \Delta a, b + \Delta b, \lambda + \Delta \lambda) = 0,$$

ce qui entraîne

$$F(t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2, t_3 + \Delta t_3, t_4 + \Delta t_4, a + \Delta a, b + \Delta b, \lambda + \Delta \lambda) = 0$$

et montre, en définitive, que les points caractéristiques sont sur les surfaces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial u} + \dots + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial v} + \dots + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Appliquons ce résultat à la quadrique (D) d'équation (9). Nous obtenons les cônes quadratiques de sommet  $x$

$$\begin{aligned} (\gamma_u) \quad t_4^2 [2c_v - 4bd + 4(ab)_u - \lambda_u] - 4bt_2^2 - 4b_v t_2 t_4 + 2\lambda t_3 t_4 &= 0, \\ (\gamma_v) \quad t_4^2 [2d_u - 4ac + 4(ab)_v - \lambda_v] - 4at_3^2 - 4a_u t_3 t_4 + 2\lambda t_2 t_4 &= 0. \end{aligned}$$

**6. Second système de coordonnées locales.** — Il est possible d'introduire un nouveau système de coordonnées locales  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , en utilisant le tétraèdre  $(xmn\gamma)$  déterminé sur la quadrique de Lie par les directrices de Wilczynski. Les relations

$$t_1 x + t_2 x_u + t_3 x_v + t_4 x_{uv} = z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 \gamma$$

donnent, en faisant intervenir les expressions de  $m, n, \gamma$  obtenues plus haut,

$$\begin{aligned} t_1 &= z_1 + z_2(\log a)_u + z_3(\log b)_v + z_4[8ab - (\log a)_u(\log b)_v], \\ t_2 &= 2z_4(\log b)_v - 2z_2, \\ t_3 &= 2z_4(\log a)_u - 2z_3, \\ t_4 &= -4z_4. \end{aligned}$$

Dans le nouveau tétraèdre de référence, la quadrique de Lie et la quadrique de Darboux (D) ont respectivement pour équation

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0, \quad z_1 z_4 + z_2 z_3 + 2\lambda z_4^2 = 0,$$

tandis que les cônes précédents sont définis par

$$\begin{aligned} (\gamma_u) \quad \mu z_4^2 + bz_2^2 - \lambda z_3 z_4 &= 0, \\ (\gamma_v) \quad \varphi z_4^2 + az_3^2 - \lambda z_2 z_4 &= 0, \end{aligned}$$

si l'on convient d'écrire

$$\mu = \lambda_u + \lambda(\log a)_u + b\beta, \quad \varphi = \lambda_v + \lambda(\log b)_v + a\alpha.$$

Nous retrouvons des expressions  $\alpha$  et  $\beta$  déjà indiquées au paragraphe 1. Pour que  $\beta$  apparaisse dans le coefficient  $\mu$ , il suffit de

supprimer le terme  $c_v$  en s'aidant de la deuxième condition d'intégrabilité (4). De même, en supprimant  $d_u$  dans  $\varphi$  on introduit  $\alpha$ .

**7. Propriétés des cônes ( $\gamma$ ).** — Les cônes ( $\gamma_u$ ) et ( $\gamma_v$ ) ont une disposition intéressante relativement au plan (T) tangent à la surface (S).

*Le cône ( $\gamma_u$ ) touche (T) le long de la tangente asymptotique ( $xx_v$ ); le cône ( $\gamma_v$ ) touche ce même plan le long de la tangente asymptotique ( $xx_u$ ).*

La tangente asymptotique ( $xx_u$ ) d'équations

$$z_3 = z_4 = 0$$

admet, par rapport au cône ( $\gamma_u$ ), le plan polaire

$$z_2 = 0.$$

C'est le plan ( $xny$ ) formé par la tangente asymptotique ( $xx_v$ ) et la directrice de Wilczynski issue de  $x$ .

D'autre part, le plan polaire de ( $xx_v$ ), par rapport au même cône, est le plan tangent (T) qui contient la deuxième directrice de Wilczynski.

En choisissant une nouvelle fonction  $\lambda(u, v)$ , ce qui revient à envisager une nouvelle quadrique de Darboux, ces deux plans polaires restent invariables. Nous pouvons donc énoncer la propriété :

*Le plan polaire d'une tangente asymptotique par rapport à un cône ( $\gamma$ ) passe par l'une ou l'autre des directrices de Wilczynski; il ne dépend pas de la quadrique (D) choisie.*

L'intersection des deux cônes ( $\gamma$ ) comprend quatre droites ( $\Delta$ ) qui portent les points caractéristiques de (D), au nombre de huit. Quatre de ces points se confondent en  $x$ ; seuls les autres interviennent dans la suite.

Les cônes ( $\gamma_u$ ) et ( $\gamma_v$ ) déterminent un faisceau de cônes du deuxième degré qui découpent sur le plan tangent (T) deux faisceaux de droites en involution. Les droites doubles sont les tangentes asymptotiques. Trois de ces cônes se décomposent en des plans passant par les droites ( $\Delta$ ). Ainsi :

Deux droites ( $\Delta$ ) déterminent un plan; les deux autres droites ( $\Delta$ ) déterminent un second plan. Ces plans coupent ( $\Gamma$ ) suivant des directions conjuguées de la surface (S).

On fait apparaître, par ce procédé, trois couples de directions conjuguées.

**8. Directions de Darboux.** — Une quadrique de Darboux quelconque coupe la surface (S) suivant une courbe ( $\Gamma$ ) dont nous allons former les équations paramétriques au voisinage de  $x$ . Un point quelconque de (S) a pour coordonnées

$$X = x + x_u du + x_v dv + \frac{1}{2}(x_{uu} du^2 + 2x_{uv} du dv + x_{vv} dv^2) + \frac{1}{6}(x_{uuu} du^3 + \dots) + \dots$$

et, dans le tétraèdre local ( $xx_u x_v x_{uv}$ ), si l'on fait intervenir les relations (3),

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 - \frac{1}{2}(c du^2 + d dv^2) + \dots, \\ t_2 &= du - a dv^2 + \dots, \\ t_3 &= dv - b du^2 + \dots, \\ t_4 &= du dv - \frac{1}{3}(b du^3 + a dv^3) + \dots \end{aligned}$$

En écrivant que ce point fait partie de la quadrique de Darboux (9), nous obtenons la condition

$$b du^3 + a dv^3 + F(du, dv) = 0,$$

F ayant en  $du$  et  $dv$  un degré supérieur au troisième. Ceci montre que ( $\Gamma$ ) possède en  $x$  un point triple; les directions des tangentes, déterminées par

$$(10) \quad b du^3 + a dv^3 = 0,$$

sont les *directions de Darboux*. Elles ne dépendent pas de la quadrique (D) envisagée.

L'équation

$$b du^3 - a dv^3 = 0$$

fournit les *directions de Segre* conjuguées des précédentes.

Posons

$$\omega = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

et désignons par  $1, r, s$  les racines cubiques de l'unité. Aux directions de Darboux

$$\frac{du}{dv} = \omega, \quad \frac{du}{dv} = \omega r, \quad \frac{du}{dv} = \omega s$$

associons respectivement les directions de Segre

$$\frac{du}{dv} = -\omega, \quad \frac{du}{dv} = -\omega r, \quad \frac{du}{dv} = -\omega s.$$

Nous constatons que les rapports anharmoniques  $(\omega, -\omega, \omega r, \omega s)$  et  $(\omega, -\omega, -\omega r, -\omega s)$  sont égaux à  $-1$ . Cela démontre que, sur toute surface, *une direction de Darboux et la direction correspondante de Segre forment un faisceau harmonique avec les deux autres directions de Darboux et aussi avec les deux autres directions de Segre.*

**9. Cas particulier d'une surface isothermo-asymptotique.** — Les équations des cônes  $(\gamma)$  se simplifient lorsque

$$(11) \quad \mu = \lambda_u + \lambda(\log a)_u + b\beta = 0, \quad \varphi = \lambda_v + \lambda(\log b)_v + a\alpha = 0.$$

La condition d'intégrabilité de ce système s'écrit, en vertu de la dernière des relations (4 bis),

$$(\log a)_{uv} = (\log b)_{uv}.$$

Elle exprime que  $\frac{a}{b}$  doit évaluer le quotient d'une fonction de  $v$  par une fonction de  $u$ . Cela revient à dire que la surface (S) est *isothermo-asymptotique*. Un changement de variables

$$u' = f(u), \quad v' = g(v),$$

conservant les asymptotiques ramène alors l'équation différentielle (10) des lignes de Darboux à la forme

$$du'^3 + dv'^3 = 0.$$

*Dans tout ce paragraphe, nous supposons  $\lambda$  solution de (11) et, par conséquent, la surface (S) isothermo-asymptotique.*

Les équations des cônes  $(\gamma)$  deviennent

$$\begin{aligned} (\gamma_u) \quad & bz_2^2 - \lambda z_3 z_1 = 0, \\ (\gamma_v) \quad & az_3^2 - \lambda z_2 z_1 = 0. \end{aligned}$$

On reconnaît immédiatement que ces deux cônes ont en commun la droite

$$z_2 = z_3 = 0.$$

*L'un des points caractéristiques vient se placer sur la directrice de Wilczynski  $(xy)$ . Chaque cône  $(\gamma)$  est tangent le long de  $(xy)$  au plan déterminé par cette directrice et par la tangente asymptotique non comprise sur  $(\gamma)$ .*

Considérons maintenant les droites  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$ ,  $(\Delta_3)$  distinctes de  $(xy)$ . Les équations des cônes  $(\gamma_u)$  et  $(\gamma_v)$  montrent que l'on a

$$bz_2^2 - az_3^2 = 0,$$

ce qui est justement, dans le plan  $(T)$ , l'équation du faisceau des directions de Segre. Nous énoncerons donc :

*Les plans déterminés par la première directrice de Wilczynski et par les droites  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$ ,  $(\Delta_3)$ , coupent le plan tangent  $(T)$  suivant les directions de Segre de la surface  $(S)$ .*

Nous avons montré (§ 7), que, par exemple, les plans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  et  $(xy, \Delta_3)$  coupent  $(T)$  suivant deux droites conjuguées. Comme l'une est une direction de Segre, l'autre est une direction de Darboux.

*Prises deux à deux, les droites  $(\Delta)$  distinctes de la directrice de Wilczynski forment trois plans qui coupent le plan tangent  $(T)$  suivant les directions de Darboux.*

La solution générale du système (11) dépend d'une constante arbitraire  $k$ . Si nous lui donnons diverses valeurs, les droites  $(\Delta)$  varient. Toutefois, chaque droite  $(\Delta)$  reste dans un plan fixe passant par  $(xy)$  et par une direction de Segre. Le plan de deux droites  $(\Delta)$  tourne autour d'une direction de Darboux.

Appliquons le résultat général de la fin du paragraphe 8 au cas particulier qui nous intéresse. Le plan  $(P_3)$  formé par les droites  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$  coupe le plan tangent  $(T)$  suivant la direction de

Darboux ( $D_3$ ). Le plan ( $Q_3$ ) formé par ( $xy$ ) et ( $\Delta_3$ ) détermine la direction de Segre ( $E_3$ ). Nous avons démontré que le faisceau de droites ( $D_3, E_3, E_1, E_2$ ) est harmonique; sa projection sur le plan ( $P_3$ ), à partir d'un point quelconque de ( $xy$ ), possède la même propriété. Cette projection comprend les droites ( $\Delta_1$ ), ( $\Delta_2$ ), ( $D_3$ ) et l'intersection des plans ( $P_3$ ), ( $Q_3$ ). Donc :

*Deux droites ( $\Delta$ ), distinctes de ( $xy$ ), sont conjuguées harmoniques par rapport à la direction de Darboux correspondante et à la section de leur plan par celui que la troisième droite ( $\Delta$ ) forme avec la directrice de Wilczynski issue de  $x$ .*

**11. Propriétés de certains faisceaux. Droites reliant les points caractéristiques.** — Dans ce paragraphe, nous supposons encore que la surface ( $S$ ) est isothermo-asymptotique.

Chaque droite ( $\Delta$ ) a des équations de la forme

$$ap^2 z_1 - \lambda z_2 = 0, \quad z_3 - pz_4 = 0,$$

dans laquelle  $p$  désigne une racine de

$$a^2 bp^3 - \lambda^3 = 0.$$

Soient  $p_1, p_2, p_3$  les trois racines qui déterminent ( $\Delta_1$ ), ( $\Delta_2$ ), ( $\Delta_3$ ). L'équation du plan ( $P_3$ ),

$$\lambda z_2 - az_3(p_1 + p_2) + ap_1 p_2 z_4 = 0,$$

peut aussi s'écrire

$$\lambda z_2 + ap_3 z_3 + ap_3^2 z_4 = 0.$$

Celle du plan ( $Q_3$ ) est

$$\lambda z_2 - ap_3 z_3 = 0.$$

Considérons à présent la droite ( $xy$ ) d'équations

$$z_2 = 0, \quad z_3 = 0,$$

la droite ( $\Delta_3$ ) définie par

$$ap_3^2 z_4 - \lambda z_2 = 0, \quad z_3 - p_3 z_4 = 0,$$

la direction de Segre ( $E_3$ ), intersection de ( $Q_3$ ) et ( $T$ ),

$$z_4 = 0, \quad \lambda z_2 - ap_3 z_3 = 0,$$



et enfin la droite ( $F_3$ ) d'intersection des plans ( $P_3$ ) et ( $Q_3$ ),

$$2\lambda z_2 + ap_3^2 z_4 = 0, \quad \lambda z_2 - ap_3 z_3 = 0.$$

On voit immédiatement, en partant des projections de ces droites sur le plan  $z_3 = 0$ , que le rapport anharmonique  $[(xy), \Delta_3, E_3, F_3]$  est égal à 3.

Nous résumons cela dans l'énoncé :

*La directrice de Wilczynski issue de  $x$  et une droite ( $\Delta$ ) forment avec les intersections de leur plan par le plan tangent ( $T$ ) et le plan des deux autres droites ( $\Delta$ ) un faisceau de rapport anharmonique constant égal à 3.*

Les points caractéristiques  $A$  qui ne sont pas sur  $(xy)$  ont pour coordonnées

$$z_1 = -2\lambda - \frac{\lambda^2}{ab}, \quad z_2 = \frac{ap^2}{\lambda}, \quad z_3 = p, \quad z_4 = 1.$$

La droite qui relie deux de ces points,  $A_1$  et  $A_2$  par exemple, coupe la droite

$$z_1 = z_4 = 0,$$

c'est-à-dire la directrice de Wilczynski ( $mn$ ) située dans le plan tangent ( $T$ ). Le point d'intersection, évidemment situé dans le plan ( $P_3$ ) formé par ( $\Delta_1$ ) et ( $\Delta_2$ ), est aussi sur la tangente ( $D_3$ ) à une ligne de Darboux.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

*Les trois points caractéristiques non situés sur la première directrice de Wilczynski forment un triangle dont le plan contient la deuxième directrice ( $mn$ ). Les côtés de ce triangle coupent ( $mn$ ) aux mêmes points que les tangentes menées par le point  $x$  aux lignes de Darboux de la surface ( $S$ ).*

QUADRILATÈRES A DIAGONALES SÉCANTES  
TRACÉS SUR UNE MÊME QUADRIQUE.

**11. Rapport anharmonique des images de quatre génératrices d'une quadrique.** — Nous utiliserons les remarques suivantes ainsi que celles du paragraphe 2; elles concernent l'espace auxiliaire de

Félix Klein et l'hyperquadrique (Q) qui représente l'espace réglé ( $S_3$ ):

1° Toutes les fois que nous écrivons que deux éléments sont conjugués, il faut comprendre que c'est par rapport à (Q).

2° Soient ( $\delta$ ) et ( $\delta'$ ) deux droites quelconques. L'hyperplan polaire d'un point J de ( $\delta$ ) coupe ( $\delta'$ ) en  $J'$ . Il existe entre J et  $J'$  une correspondance homographique qui conserve les rapports anharmoniques, si ( $\delta'$ ) n'a aucun point commun avec la variété conjuguée de ( $\delta$ ).

3° Si ( $\delta'$ ) fait partie de (Q), les points  $J'$  sont les images de droites ( $j'$ ) d'un faisceau de l'espace réglé. Le rapport anharmonique de quatre points  $J'$  égale celui des droites ( $j'$ ).

Considérons une quadrique ( $\Phi$ ) de ( $S_3$ ). Les deux systèmes de génératrices ont pour images les sections ( $\gamma$ ), ( $\gamma'$ ) de (Q) par deux plans conjugués ( $\Pi$ ), ( $\Pi'$ ). Nous prenons sur la conique ( $\gamma$ ) les points  $I_1, I_2, I_3, I_4, R$  et sur ( $\gamma'$ ) le point quelconque  $R'$ . Le rapport anharmonique  $\varepsilon$  des points  $I_1, I_2, I_3, I_4$  est, par définition, celui du faisceau  $RI_1I_2I_3I_4$  qui découpe sur une droite quelconque du plan ( $\Pi$ ) la division  $J_1J_2J_3J_4$  telle que  $(J_1J_2J_3J_4) = \varepsilon$ .

Sur les hyperplans tangents à (Q) en  $R, R'$  prenons une droite ( $\delta'$ ) contenue dans l'hyperquadrique et n'ayant aucun point commun avec la variété linéaire conjuguée de ( $\delta$ ). Pour bien se rendre compte de la possibilité de ce choix, il est bon d'examiner un problème équivalent dans l'espace réglé. Il consiste à déterminer, dans le plan des génératrices ( $r$ ), ( $r'$ ), un faisceau dont aucune droite ne coupe à la fois les génératrices ayant pour images les intersections de ( $\delta$ ) et de la conique ( $\gamma$ ).

Les hyperplans polaires des points J rencontrent ( $\delta'$ ) en quatre points  $J'$  dont le rapport anharmonique est égal à  $\varepsilon$  en vertu de la remarque n° 2 faite au début de ce paragraphe. Comme la troisième remarque est aussi applicable, on voit que les droites ( $j'$ ) forment un faisceau de même rapport. Si l'on retient que les points  $J'$  sont dans l'hyperplan tangent en  $R'$ , on peut affirmer que les droites ( $j'$ ) coupent la droite ( $r'$ ) et cela suivant une division de rapport  $\varepsilon$ .

Raisonnons maintenant sur un point  $J'$  particulier,  $J'_1$  par exemple. Il est pris dans l'hyperplan tangent en  $R$  : donc  $J'_1$  est

conjugué de R. Par construction, il est aussi conjugué de  $J_1$ , c'est-à-dire de tous les points de  $RJ_1$  et, en particulier, du point  $I_1$ . Cela signifie que la droite  $(i_1)$  coupe la droite  $(j'_1)$  ainsi que la génératrice  $(r')$  du second système. Dès lors, on voit que  $(i_1)$  passe par l'intersection de ces deux droites puisque sa qualité de génératrice lui interdit d'être dans le plan  $(r, r')$  du faisceau formé par les droites  $(j')$ . Les droites  $(i)$  déterminent donc sur  $(r')$  la même division que les droites  $(j')$ .

*Ainsi, sur une quadrique  $(\Phi)$ , quatre génératrices d'un système partagent toute génératrice de l'autre système dans un rapport anharmonique qui est précisément celui des quatre images sur la conique  $(\gamma)$ .*

Ce résultat, qui ne contient pas  $(r)$ , montre que le rapport anharmonique des quatre points I de  $(\gamma)$  a une valeur indépendante de la position de R.

M. Vincensini a bien voulu nous faire observer que cette propriété peut être établie d'une manière plus rapide et plus simple. Il suffit de constater que l'on peut donner, à l'aide d'un paramètre  $t$ , une représentation propre de la courbe unicursale  $(\gamma)$ . Le rapport anharmonique des points I est celui des valeurs correspondantes de  $t$ .

Les six coordonnées de I, dans  $(S_5)$ , sont les coordonnées radiales de la droite  $(i)$  et fournissent, pour un système de génératrices de la quadrique  $(\Phi)$ , une représentation paramétrique propre. Le rapport anharmonique des quatre génératrices  $(i)$  est aussi le rapport des quatre valeurs correspondantes du paramètre  $t$ .

Le théorème précédent se trouve ainsi démontré.

**12. Images des diagonales d'un quadrilatère tracé sur une quadrique.** — Sur la quadrique  $(\Phi)$  prenons, dans des systèmes différents, deux couples de génératrices  $(i_1), (i_2)$  et  $(i'_1), (i'_2)$  qui déterminent un quadrilatère  $(\Sigma)$ . Dans l'espace  $(S_5)$ , les points  $I_1, I_2$  sont situés sur  $(\gamma)$  alors que les points  $I'_1, I'_2$  font partie de  $(\gamma')$ .

Nous allons construire les diagonales de  $(\Sigma)$  par une méthode

que nous empruntons à M. Godeaux <sup>(1)</sup> qui l'utilise dans le cas où  $(\Phi)$  est la quadrique de Lie d'une surface.

Les tangentes à  $(\gamma)$  menées en  $I_1$  et  $I_2$  se coupent en B tandis que les tangentes à  $(\gamma')$  en  $I'_1$  et  $I'_2$  se coupent en B'. La droite BB' rencontre l'hyperquadrique (Q) en  $F_1, F_2$ . Les points  $I'_1, I'_2$  sont conjugués de B puisque les plans (II) et (II') sont eux-mêmes conjugués. D'après sa construction, B est également conjugué de  $I_1, I_2$ . Observons que B' possède les mêmes propriétés. Donc, la variété linéaire à trois dimensions conjuguée de  $F_1 F_2$  est  $I_1 I_2 I'_1 I'_2$ , ce qui établit que les droites  $(f_1), (f_2)$  rencontrent  $(i_1), (i_2), (i'_1), (i'_2)$ .

En construisant  $F_1, F_2$ , nous avons bien obtenu les images des diagonales du quadrilatère  $(\Sigma)$ .

**13. Quadrilatères à diagonales sécantes tracés sur une quadrique.** — Considérons sur  $(\Phi)$  un second quadrilatère  $(\theta)$  de côtés  $(l_1), (l_2), (l'_1), (l'_2)$  et supposons que l'une de ses diagonales  $(h_1)$  coupe  $(f_1), (f_2)$ . L'hyperplan polaire de  $H_1$  contient  $F_1 F_2$  qui n'est autre que BB'; sa section  $L_1 L_2$  par le plan (II) passe donc par le pôle B de  $I_1 I_2$  par rapport à la conique  $(\gamma)$ . En d'autres termes, nous obtenons sur  $(\gamma)$  la division harmonique  $I_1 I_2 L_1 L_2$ . Un raisonnement analogue conduit à la même propriété pour les points  $I'_1, I'_2, L'_1, L'_2$  de  $(\gamma')$ . En vertu du théorème formulé au n° 11, ce qui précède montre que si deux quadrilatères sont tracés sur une même quadrique et si une diagonale de l'un coupe les deux diagonales de l'autre, les côtés se divisent harmoniquement.

Ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent indique que l'image  $H_2$  de la diagonale  $(h_2)$  de  $(\theta)$  admet un hyperplan polaire qui passe par  $L_1 L_2 L'_1 L'_2$ ; il passe donc aussi par BB' (ou  $F_1 F_2$ ).

Cela prouve que si une diagonale  $(h_1)$  du quadrilatère  $(\theta)$  coupe celles de  $(\Sigma)$ , la seconde diagonale  $(h_2)$  possède la même propriété <sup>(2)</sup>.

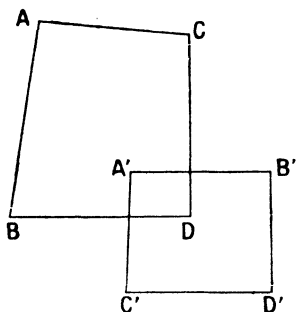
<sup>(1)</sup> L. GODEAUX, *Sur la surface enveloppée par les quadriques de Lie d'une surface* (Anais da Faculdade de Ciências do Porto, t. 17, 1931).

<sup>(2)</sup> Nous devons ce résultat à M. Gambier; il l'obtient par une méthode que nous donnons plus loin.

Il est possible de présenter ces résultats sans sortir de l'espace à trois dimensions. Voici deux élégantes démonstrations dues, la première à M. Gambier, la seconde à M. Vincensini, mais dont la reproduction exige un changement de notations.

14. **Démonstration proposée par M. Gambier** (*fig. 1*). — Soit  $(\Sigma)$  un quadrilatère gauche ABCD de diagonales AD, BC. Considérons les homographies biaxiales involutives  $(T_1)$ ,  $(T_2)$ ,  $(T_3)$  dont les axes sont les couples de droites  $(AB, CD)$ ,  $(AC, BD)$ ,  $(AD, BC)$ . On sait que  $(T_1)$  et  $(T_2)$  conservent toute quadrique qui passe par  $(\Sigma)$ ; leur produit est  $(T_3)$ .

Fig. 1.



Un point  $A'$  pris au hasard détermine avec ABCD une quadrique  $(\Phi)$  et une seule; elle contient les droites  $A'B'$  et  $A'C'$  rencontrant respectivement  $(AB, CD)$  et  $(AC, BD)$ . Nous connaissons ainsi trois génératrices de chaque système de  $(\Phi)$ .

L'involution biaxiale  $(T_1)$  transforme  $A'C'$  en une génératrice  $B'D'$  de  $(\Phi)$ ; de même  $(T_2)$  transforme  $A'B'$  en la génératrice  $C'D'$ . Nous faisons ainsi apparaître un quadrilatère  $A'B'C'D'$  (ou  $\Sigma'$ ) dans lequel  $(T_1)$  transforme  $A'$  en  $B'$ ;  $B'$  donne  $D'$  en lui appliquant  $(T_2)$ . Ce produit équivaut à  $(T_3)$ ; cela revient à dire que  $A'$  et  $D'$  se correspondent dans cette transformation  $(T_3)$ . Donc  $A'D'$  s'appuie sur les droites AD, BC et est divisé harmoniquement par elles.

*Si les côtés de deux quadrilatères tracés sur  $(\Phi)$  se séparent harmoniquement, les diagonales de chacun sont rencontrées par celles de l'autre, en deux points conjugués par rapport aux extrémités de ces diagonales.*

Or, à partir de  $A'$ , il n'est possible de tracer qu'une droite s'appuyant sur  $(AD, BC)$ . Cela prouve qu'il n'existe, sur la quadrique  $(\Phi)$ , qu'un seul quadrilatère  $(\Sigma')$ , de sommet  $A'$ , dont une diagonale  $A'D'$  rencontre celles de  $(\Sigma)$ ; c'est celui que nous venons de construire. Ainsi :

*Si deux quadrilatères  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma')$  sont tracés sur une quadrique  $(\Phi)$  et si une diagonale de  $(\Sigma')$  coupe les deux diagonales de  $(\Sigma)$ , il en est de même de l'autre. Les côtés des deux quadrilatères se séparent harmoniquement.*

La propriété du paragraphe précédent et sa réciproque se trouvent établies en mettant en jeu un minimum d'hypothèses.

**15. Démonstration proposée par M. Vincensini (fig. 1).** — Considérons les couples de droites  $(D, \Delta)$ ,  $(D', \Delta')$ . Supposons chacun de ces couples formé de droites conjuguées par rapport à la quadrique  $(\Phi)$ ; supposons aussi que la droite  $(D')$  coupe  $(D)$  et  $(\Delta)$ . Le plan  $(\Delta D')$  a son pôle sur  $(D)$  et  $(\Delta')$ ; donc,  $(\Delta')$  rencontre  $(D)$ . De même, le plan  $(DD')$  a son pôle sur  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ : cela prouve que  $(\Delta')$  rencontre aussi  $(\Delta)$ .

Traçons sur  $(\Phi)$  les deux quadrilatères  $ABCD$  (ou  $\Sigma$ ) et  $A'B'C'D'$  (ou  $\Sigma'$ ). Les diagonales de chaque quadrilatère sont conjuguées par rapport à  $(\Phi)$ . *Si une diagonale de  $(\Sigma')$  coupe celles de  $(\Sigma)$ , l'autre possède la même propriété en vertu de la remarque précédente.*

Plaçons-nous dans le cas où les diagonales  $A'D'$ ,  $B'C'$  de  $(\Sigma')$  coupent celles de  $(\Sigma)$ . Puisqu'elles sont conjuguées par rapport à  $(\Phi)$ , elles partagent harmoniquement la corde  $AD$ . Nous obtenons ainsi un premier résultat presque évident :

*Si deux quadrilatères  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma')$ , tracés sur une même quadrique, ont des diagonales qui se coupent, ces diagonales se divisent harmoniquement.*

Les droites  $A'B'$ ,  $C'D'$ ,  $AD$ ,  $BC$  partagent harmoniquement les segments  $A'D'$  et  $B'C'$ . Il en résulte que ces droites sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique  $(\Phi_1)$ . La droite  $AB$  coupe les trois génératrices  $AD$ ,  $BC$ ,  $A'B'$ ; donc  $AB$  est une génératrice du second système de  $(\Phi_1)$ .

Les génératrices  $A'B'$ ,  $C'D'$ ,  $AD$ ,  $BC$  déterminent le même rapport anharmonique sur toute génératrice du deuxième système. Sur  $A'D'$  ce rapport égale  $-1$ . Il égale donc aussi  $-1$  sur  $AB$ , ce qui établit bien le résultat cherché.

**16. Application du théorème précédent au quadrilatère de Demoulin.** — Revenons à une surface  $(S)$  quelconque rapportée aux asymptotiques  $u$ ,  $v$ . La tangente asymptotique  $(xx_u)$  a pour image le point  $U$  tandis que la tangente  $(xx_v)$  a pour image le point  $V$ .

MM. Bompiani et Tzitzéica <sup>(1)</sup> ont montré que  $U$ ,  $V$  sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$(\mathcal{L}) \quad \dots, U_3, U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, V_3, \dots,$$

écrite dans le sens des  $u$  et autopolaire <sup>(2)</sup> par rapport à l'hyperquadrique  $(Q)$ .

L'hyperplan polaire de  $U_n$  est  $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$  et celui de  $V_n$  est  $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$ .

On sait que les sections  $(\gamma)$ ,  $(\gamma')$  de  $(Q)$  par les plans conjugués  $UU_1 U_2$ ,  $VV_1 V_2$  sont les images des deux systèmes de génératrices de la quadrique de Lie  $(\Phi)$  relative au point  $x$  de  $(S)$ . Sur cette quadrique, les points caractéristiques distincts de  $x$  forment le quadrilatère de Demoulin  $(\Sigma_1)$ . Les sections  $I_1$ ,  $I_2$  de  $(\gamma)$  par  $U_1 U_2$  et  $I'_1$ ,  $I'_2$  de  $(\gamma')$  par  $V_1 V_2$  donnent les images des côtés de  $(\Sigma_1)$ . Les images  $F_1$ ,  $F_2$  des diagonales  $(f_1)$ ,  $(f_2)$  se construisent comme au n° 12, en partant de la même droite  $BB'$ .

Nous introduisons encore (voir § 3) les directrices de Wilczynski  $(w_1)$ ,  $(w_2)$  d'images  $W_1$ ,  $W_2$  situées sur la droite  $U_1 V_1$  <sup>(3)</sup>. De l'autopolarité signalée plus haut, il résulte que  $W_1$  et  $W_2$  sont conjugués par rapport aux plans  $(II)$ ,  $(II')$  des coniques  $(\gamma)$ ,  $(\gamma')$ .

<sup>(1)</sup> BOMPIANI, *Sull' equazione di Laplace (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 4, 1912)*; TZITZÉICA, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, 1924.

<sup>(2)</sup> L. GODEAUX, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (Bull. Acad. roy. Sc. Belgique, 1927)*.

<sup>(3)</sup> On identifiera les points  $U_1$ ,  $V_1$  du paragraphe 3 à ceux de la suite  $(\mathcal{L})$  en montrant, à l'aide des relations (3), que les tangentes  $UU_v$ ,  $VV_u$ ,  $U_1(U_1)_u$ ,  $V_1(V_1)_v$  contiennent respectivement les points  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $U$ ,  $V$ .

Cela revient à dire que les directrices  $(w_1), (w_2)$  sont conjuguées par rapport à la quadrique de Lie et déterminent sur elle un quadrilatère  $(\theta_1)$ .

Les complexes linéaires osculateurs aux surfaces réglées gauches  $(R_u), (R_v)$ , le long des tangentes asymptotiques issues de  $x$  (voir § 4), ont pour images les sections de  $(Q)$  par les hyperplans  $UU_1U_2U_3U_4, VV_1V_2V_3V_4$  de pôles respectifs  $V_2$  et  $U_2$ . Les points  $H_1, H_2$  d'intersection de la droite  $U_2V_2$  et de  $(Q)$ , images des directrices  $(h_1), (h_2)$  de la congruence linéaire commune aux deux complexes, sont eux aussi conjugués par rapport aux plans  $(\Pi), (\Pi')$ . Donc, les directrices  $(h_1), (h_2)$  sont conjuguées par rapport à la quadrique de Lie et constituent les diagonales d'un quadrilatère  $(\theta_2)$  situé sur  $(\Phi)$ .

La variété linéaire  $U_1U_2V_1V_2$  conjuguée de  $F_1F_2$  (ou  $BB'$ ) contient  $U_1V_1, U_2V_2$ . Cette variété contient donc les images  $W_1, W_2, H_1, H_2$  des diagonales des quadrilatères  $(\theta_1)$  et  $(\theta_2)$ . Cela signifie que les diagonales  $(f_1), (f_2)$  du quadrilatère  $(\Sigma_1)$  coupent les diagonales de  $(\theta_1)$  et  $(\theta_2)$ .

C'est M. Bompiani qui a démontré que les diagonales du quadrilatère de Demoulin s'appuient sur les directrices de Wilczynski.

Nous pouvons finalement énoncer la proposition suivante :

*Les côtés du quadrilatère  $(\Sigma_1)$  de Demoulin divisent harmoniquement les côtés du quadrilatère  $(\theta_1)$  déterminé sur la quadrique de Lie par les directrices de Wilczynski.*

*Réciproquement, les côtés du quadrilatère  $(\theta_1)$  divisent harmoniquement les côtés du quadrilatère de Demoulin.*

*Les directrices de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires osculateurs des surfaces réglées gauches asymptotiques déterminent, sur la quadrique de Lie, un quadrilatère  $(\theta_2)$  dont les côtés sont partagés harmoniquement par les côtés du quadrilatère  $(\Sigma_1)$  de Demoulin.*

*Réciproquement, les côtés de  $(\theta_2)$  partagent harmoniquement ceux de  $(\Sigma_1)$ .*

**17. Application à des quadrilatères formés par les points caractéristiques des quadriques d'une suite étudiée par M. Godeaux.** — Ces propriétés peuvent s'étendre à d'autres quadrilatères tracés



sur des quadriques introduites (1) en même temps que la suite de Laplace ( $\mathcal{L}$ ).

Les plans conjugués  $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ ,  $V_n V_{n+1} V_{n+2}$  représentent une quadrique ( $\Phi_n$ ), de ( $S_3$ ), qui touche chacune des quadriques ( $\Phi_{n-1}$ ), ( $\Phi_{n+1}$ ) en quatre points caractéristiques. Ainsi, sur ( $\Phi_n$ ), les huit points caractéristiques constituent deux quadrilatères ( $\Sigma_n$ ), ( $\Sigma_{n+1}$ ). Les points d'intersection de (Q) et des droites  $U_n U_{n+1}$ ,  $V_n V_{n+1}$  donnent les images des côtés de ( $\Sigma_n$ ); les points de (Q) situés sur  $U_{n+1} U_{n+2}$ ,  $V_{n+1} V_{n+2}$  donnent les côtés de ( $\Sigma_{n+1}$ ).

Les points de la droite  $U_{n+1} V_{n+1}$  compris sur l'hyperquadrique (Q) sont les images de deux droites conjuguées par rapport à ( $\Phi_n$ ) et diagonales d'un quadrilatère ( $\theta_{n+1}$ ) de ( $\Phi_n$ ). Nous retrouvons une figure déjà étudiée.

*Les diagonales de ( $\theta_{n+1}$ ) coupent celles de ( $\Sigma_n$ ) et ( $\Sigma_{n+1}$ ). Il en résulte que les côtés de ( $\theta_{n+1}$ ) divisent harmoniquement ceux de ( $\Sigma_n$ ) et ( $\Sigma_{n+1}$ ). Réciproquement, les côtés de ( $\Sigma_n$ ) et ( $\Sigma_{n+1}$ ) divisent harmoniquement ceux de ( $\theta_{n+1}$ ).*

**18. Propriété des congruences (W).** — On peut multiplier les applications du théorème du n° 13. Voici un exemple emprunté aux congruences (W).

Désignons par  $x$  et  $\bar{x}$  les points de contact de la génératrice ( $g$ ) avec les nappes focales (S), ( $\bar{S}$ ). La droite ( $g$ ) fait partie du faisceau des deux tangentes asymptotiques ( $xx_u$ ), ( $xx_v$ ) d'images U et V. Il devient ainsi évident que la droite UV contient l'image G de ( $g$ ).

D'après un théorème de Darboux, on sait que le point G décrit un réseau. Il fait donc partie d'une suite de Laplace

$$\dots, G_{-2}, G_{-1}, G, G_1, G_2, \dots$$

écrite dans le sens des  $u$  et inscrite dans la suite ( $\mathcal{L}$ ) relative à la surface (S). On montrerait d'une manière analogue qu'elle est inscrite dans la suite ( $\bar{\mathcal{L}}$ ) attachée à ( $\bar{S}$ ).

La droite  $G_1 G_2$  rencontre (Q) en  $I_1, I_2$ . Or, la suite des points G est inscrite dans les suites ( $\mathcal{L}$ ) et ( $\bar{\mathcal{L}}$ ). Donc,  $G_1 G_2$

---

(1) L. GODEAUX, *Sur une propriété de l'enveloppe de certaines familles de quadriques* (Rendic. R. Accad. dei Lincei, 1930).

fait partie des plans  $VV_1V_2$ ,  $\overline{VV_1V_2}$  ou, ce qui revient au même, les droites  $(i_1)$ ,  $(i_2)$  sont communes aux quadriques de Lie des deux nappes. Les droites  $(i'_1)$ ,  $(i'_2)$ , représentées par les intersections de  $G_{-1}G_{-2}$  et de  $(Q)$ , sont aussi communes aux mêmes quadriques et forment avec  $(i_1)$ ,  $(i_2)$  un quadrilatère  $(\Sigma)$ .

*Les quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence  $(W)$  ont en commun deux génératrices de chaque système.*

Le plan  $G_{-1}GG_1$ , tangent à la surface décrite par  $G$ , coupe  $(Q)$  suivant deux droites  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ , images de deux faisceaux <sup>(1)</sup> :

- 1° Le faisceau  $(x, \overline{T})$ , de sommet  $x$ , compris dans le plan  $(\overline{T})$  tangent en  $\overline{x}$  à la surface  $(\overline{S})$ ;
- 2° Le faisceau  $(\overline{x}, T)$ , de sommet  $\overline{x}$ , compris dans le plan  $(T)$  tangent en  $x$  à la surface  $(S)$ .

La droite  $G_{-1}G_1$ , du plan  $G_{-1}GG_1$ , coupe  $(Q)$  en deux points  $H_1$ ,  $H_2$  portés l'un par  $(D_1)$ , l'autre par  $(D_2)$ . Il est certain que  $H_1$  et  $H_2$  sont conjugués par rapport aux plans  $UU_1U_2$ ,  $VV_1V_2$  et par rapport aux plans  $\overline{UU_1U_2}$ ,  $\overline{VV_1V_2}$  qui contiennent respectivement  $G_{-1}$  et  $G_1$ . Par suite, les droites  $(h_1)$ ,  $(h_2)$ , respectivement prises dans les faisceaux  $(x, \overline{T})$ ,  $(\overline{x}, T)$ , sont à la fois conjuguées par rapport aux quadriques de Lie des deux nappes.

*Il existe, dans le faisceau  $(x, \overline{T})$  d'une congruence  $(W)$ , une droite dont la conjuguée par rapport aux quadriques de Lie des deux nappes est située dans le faisceau  $(\overline{x}, T)$ .*

Les deux droites  $(h_1)$ ,  $(h_2)$  déterminent, sur les deux quadriques de Lie, les quadrilatères  $(\theta)$  et  $(\overline{\theta})$  dont elles sont diagonales. Nous retrouvons, dans  $(S_6)$ , la figure  $I_1I_2I'_1I'_2H_1H_2$  du n° 13.

*Ainsi, les génératrices communes aux quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence  $(W)$  forment un quadrilatère  $(\Sigma)$ . Les diagonales de  $(\Sigma)$  coupent les droites  $(h_1)$ ,  $(h_2)$  prises respectivement dans les faisceaux  $(x, \overline{T})$ , et  $(\overline{x}, T)$  et conjuguées par rapport à ces quadriques.*

---

<sup>(1)</sup> Voir L. GODEAUX, *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, p. 10.

*Les côtés du quadrilatère  $(\theta)$ , déterminé sur l'une des quadriques de Lie par les droites  $(h_1), (h_2)$ , et les côtés du quadrilatère  $(\Sigma)$  se divisent harmoniquement.*

**19. Sur certains couples de complexes linéaires en involution.**

— Pour terminer, considérons le quadrilatère gauche  $(\Sigma)$  dont les couples de côtés opposés  $(i_1, i_2), (i'_1, i'_2)$  déterminent, dans  $(S_5)$ , le quadrilatère  $I_1 I_2 I'_1 I'_2$ . Soit  $B$  un point quelconque de  $I_1 I_2$  et  $B'$  un point également quelconque de  $I'_1 I'_2$ . Ces deux points sont conjugués par rapport à  $(Q)$ . La droite  $BB'$  rencontre  $(Q)$  en  $H_1, H_2$ .

Soit une quadrique  $(\Phi)$  contenant les côtés de  $(\Sigma)$ . Les coniques  $(\gamma), (\gamma')$ , images des deux systèmes de génératrices, passent l'une par  $I_1, I_2$ , l'autre par  $I'_1, I'_2$ . Les points  $H_1, H_2$  sont conjugués par rapport aux plans de ces coniques; cela signifie que les droites  $(h_1), (h_2)$  sont conjuguées par rapport à  $(\Phi)$  et déterminent sur cette quadrique un quadrilatère  $(\theta)$  dont elles sont diagonales.

Convenons, avec M. Tzitzéica, d'appeler *seconde image* d'un complexe linéaire le pôle de l'hyperplan qui le détermine.

$B$  est la seconde image d'un complexe qui contient la congruence linéaire de directrices  $(i_1), (i_2)$ . De même,  $B'$  est la seconde image d'un complexe contenant la congruence de directrices  $(i'_1), (i'_2)$ . Ces deux complexes sont en involution et ont en commun la congruence linéaire de directrices  $(h_1), (h_2)$ .

Après avoir observé que la figure  $I_1 I_2 I'_1 I'_2 H_1 H_2$  est encore celle du n° 13, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

*Deux complexes linéaires qui contiennent respectivement les congruences linéaires déterminées par les côtés opposés d'un quadrilatère gauche  $(\Sigma)$  sont en involution. Les directrices de la congruence linéaire qui leur est commune sont conjuguées par rapport à toute quadrique  $(\Phi)$  passant par  $(\Sigma)$  et partagent harmoniquement les diagonales de  $(\Sigma)$ .*

*Il existe sur  $(\Phi)$  un quadrilatère  $(\theta)$  admettant ces directrices pour diagonales. Les côtés de  $(\theta)$  et  $(\Sigma)$  se divisent harmoniquement.*

(Manuscrit reçu le 13 janvier 1944.)