

# BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

**Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers  
et les décompositions en deux carrés**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 6 (1878), p. 119-120

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1878\\_\\_6\\_\\_119\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__119_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés; par M. HALPHEN.*

(Séance du 9 janvier 1878.)

Dans le tome précédent du *Bulletin*, j'ai donné une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres, formule analogue à celle d'Euler. En voici une nouvelle, qui ne concerne que les sommes de certains diviseurs.

Soient  $x$  un nombre entier positif et  $S(x)$  la somme des diviseurs positifs de  $x$ , dont les quotients par  $x$  sont impairs; la fonction numérique  $S(x)$  vérifie la relation récurrente

$$(1) \quad S(x) = 2[S(x-1) - S(x-4) + S(x-9) \dots \pm S(x-n^2) \dots].$$

Le second membre doit être prolongé jusqu'au dernier nombre positif  $(x - n^2)$ , et, si  $x$  est un carré,  $S(0)$  doit être remplacé par  $\frac{1}{2}x$ .

La démonstration, calquée sur celle qu'Euler a donnée de sa célèbre formule, se déduit de l'identité suivante :

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots$$

La formule (1) présente cette circonstance curieuse qu'on en peut aisément déduire la théorie de la décomposition des nombres entiers en sommes de deux carrés. C'est ce que je vais montrer.

Dès que  $x$  n'est pas un carré impair,  $S(x)$  est pair, comme on le voit soit directement, soit par la formule (1).

Si  $x$  n'est pas un carré et qu'aucun nombre  $(x - n^2)$  ne soit lui-même un carré, la formule (1) fait voir que  $S(x)$  est divisible par 4. Ainsi  $S(x)$  est divisible par 4 toutes les fois que  $x$  n'est pas la somme de deux carrés.

Je suppose  $x$  premier. Alors  $S(x)$  est égal à  $(x + 1)$ . Si  $x$  n'est pas la somme de deux carrés, j'en conclus que  $x$  est de la forme  $4m - 1$ , puisque  $(x + 1)$  doit être divisible par 4. Donc, *tout nombre premier qui n'est pas la somme de deux carrés est de la forme  $4m - 1$ .*

En conséquence, *tout nombre premier  $4m + 1$  est la somme de deux carrés.*

---