BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE COTTON

Intersection de deux surfaces définies par des trièdres mobiles

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 10-21 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__s10_0>

CONFÉRENCE

FAITE A GENÈVE AU COURS DE LA SÉANCE DU 8 MAI 1938
DU GROUPE RHODANIEN.

INTERSECTION DE DEUX SURFACES DÉFINIES PAR DES TRIÈDRES MOBILES;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Deux surfaces étant données par des mouvements à deux paramètres (u, v pour la première S, et u^*, v^* pour l'autre S^*) de trièdres de Darboux, si les sommets de ces trièdres sont confondus et décrivent une courbe d'intersection, les quatre paramètres deviennent fonctions d'une même variable t. Ces fonctions sont solutions d'un système différentiel (R) dont la formation est indiquée au début de ce travail (nos 1-3), ainsi que quelques remarques concernant la recherche de données initiales correspondant à une position respective de S et S^* (n° 4). En adjoignant trois nouvelles fonctions inconnues ω, α, ω^* aux précédentes, on substitue à (R) un nouveau système différentiel (R′) (n° 5) d'aspect moins symétrique que le premier, mais qui présente sur lui le double avantage de ne contenir que des dérivées du premier ordre et d'être linéaire par rapport à ces dérivées. A tout contact des deux surfaces correspond une singularité du système différentiel; l'étude directe de cette singularité sur les équations de (R′) n'est pas toujours simple (n° 6). Mais en revenant à l'origine de cette question on établit (n° 7) que pour des données analytiques dans tous les cas qui peuvent se présenter les inconnues sont fonctions holomorphes ou algébroïdes de l'arc de la courbe compté à partir du point de contact.

1. Darboux a rattaché l'étude d'une surface S à celle du mouvement à deux paramètres d'un trièdre trirectangle. Ces paramètres u, v caractérisent un point M de la surface ; à ce point correspond le trièdre mobile $Mxyz$, l'axe Mz est normal à la surface, la position

de l'axe Mx dans le plan tangent est supposée déterminée, elle aussi, par u et v.

A des valeurs $u + du$, $v + dv$ des paramètres infiniment voisines des précédentes correspond un trièdre $M'x'y'z'$ infiniment voisin de $Mxyz$. On passe de $Mxyz$ à $M'x'y'z'$ par une translation infiniment petite amenant M en M' et par une rotation infiniment petite. Soient ξ_d, η_d les projections sur Mx, My du vecteur MM', et p_d, q_d, r_d celles du vecteur porté par l'axe de la rotation infiniment petite ayant pour mesure l'angle infiniment petit de cette rotation. Ce sont des expressions de Pfaff

$$\xi_d = \xi\, du + \xi_1\, dv, \qquad \eta_d = \eta\, du + \eta_1\, dv, \qquad p_d = p\, du + p_1\, dv,$$
$$q_d = q\, du + q_1\, dv, \qquad r_d = r\, du + r_1\, dv,$$

dont les coefficients (que nous supposerons fonctions analytiques de u et v) satisfont à des conditions bien connues d'intégrabilité (¹) ou conditions de structure (²) qu'il est inutile d'écrire.

2. A une seconde surface S^* correspondent des paramètres u^*, v^* déterminant un point M^* et un trièdre $M^*x^*y^*z^*$ analogues aux précédents, ainsi que des expressions de Pfaff $\xi_d^*, \ldots, r_d^*$, les conditions d'intégrabilité étant encore remplies.

Chacune des surfaces S, S^* n'est déterminée qu'à un déplacement près ; en d'autres termes nous avons une famille de surfaces S égales entre elles, dépendant de six constantes (en général) et de même pour la famille des surfaces S^*. Les courbes Γ intersections d'une surface S et d'une surface S^* dépendent donc (en général) de douze constantes arbitraires. Le nombre de constantes diminue d'une unité lorsque l'une des surfaces est hélicoïdale ou cylindrique ou de révolution, de deux unités pour un cylindre de révolution, de trois pour une sphère ou un plan.

Soit OXYZ un trièdre de coordonnées rectangulaires attaché au repère des mouvements à deux paramètres u et v. Les coordonnées X, Y, Z d'un point M d'une courbe Γ sont considérées comme fonctions d'un même paramètre, par exemple l'abscisse curviligne ou un paramètre t fonction de cette abscisse. Ces fonctions X, Y, Z dépendant de constantes arbitraires sont solutions d'un système différentiel (Σ).

(¹) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. 1, livre I et t. II livre V.

(²) Cartan, *La Théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Chap. XI.

On peut remplacer (Σ) par l'ensemble de deux systèmes d'équations différentielles. Le premier, système résolvant (R), est vérifié par les expressions en fonction de t des paramètres u, v d'un point décrivant Γ considérée comme située sur S et les expressions en fonction de t de $u^\star$, $v^\star$ lorsque Γ est considérée comme courbe de $S^\star$. Une solution $u(t)$, $v(t)$, $u^\star(t)$, $v^\star(t)$ de (R) étant donnée, en portant ces expressions dans $\xi_d, \ldots, r_d$ on aura les translations et rotations d'un trièdre $Mxyz$ dont le sommet M décrit une courbe Γ; la détermination de la position d'un trièdre OXYZ lié au repère de ce mouvement et par suite la recherche des coordonnées X, Y, Z de M comme fonctions de t revient à l'intégration d'un second système [système automorphe (A)]. Cette réduction de (Σ) à deux autres systèmes (R) et (A) est un cas particulier d'une théorie générale de M. Vessiot [1].

Le système (A) est bien connu depuis l'étude faite par Darboux dans ses leçons sur la *Théorie des surfaces;* nous nous occuperons uniquement de (R).

3. Adoptant une représentation cinématique, nous pourrons parler de l'instant t et considérer pour le point M de l'intersection Γ les vecteurs vitesse, accélération et accélération du second ordre

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}, \quad \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}, \quad \frac{d^3\overrightarrow{M}}{dt^3},$$

le repère servant à définir ces dérivées étant celui auquel OXYZ est fixé. Le produit vectoriel $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$ a pour mesure le produit de la courbure par le cube de la vitesse, et le produit scalaire de ce produit vectoriel par $\frac{d^3\overrightarrow{M}}{dt^3}$ est égal à la torsion multiplée par le carré de la courbure et par la sixième puissance de la vitesse (pour la définition opposée parfois adoptée de la torsion un changement de signe serait nécessaire).

La trajectoire Γ de M étant située sur la surface S, au mouvement de M correspond un mouvement du trièdre de Darboux $Mxyz$; u, v coordonnées curvilignes de M deviennent des fonctions de t, les

[1] *Acta Mathematica*, t. 28.

quotients $\bar{\xi} = \frac{\xi_d}{dt}$, $\bar{\eta} = \frac{\eta_d}{dt}$ donnent les projections de $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ sur Mxyz;

$$\bar{p} = \frac{p_d}{dt}, \qquad \bar{q} = \frac{q_d}{dt}, \qquad \bar{r} = \frac{r_d}{dt}$$

celles du vecteur rotation instantanée $\vec{\mathcal{R}}$ du trièdre Mxyz.

Des formules connues de Cinématique nous donnent alors les projections sur les axes du trièdre mobile Mxyz des vecteurs vitesse et accélération du premier et du second ordre; on trouve ainsi, en désignant leurs projections par les lettres x, y, z affectées d'un indice égal à l'ordre de dérivation,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} : x_1 = \bar{\xi}, & y_1 = \bar{\eta}, & z_1 = 0, \\ \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} : x_2 = \frac{d\bar{\xi}}{dt} - \bar{r}\bar{\eta}, & y_2 = \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \bar{r}\bar{\xi}, & z_2 = \bar{p}\bar{\eta} - \bar{q}\bar{\xi}, \\ \frac{\overrightarrow{d^3M}}{dt^3} : x_3 = \frac{dx_2}{dt} + \bar{q}z_2 - \bar{r}y_2, & y_3 = \frac{dy_2}{dt} + \bar{r}x_2 - \bar{p}z_2, & z_3 = \frac{dz_2}{dt} + \bar{p}y_2 - \bar{q}x_2. \end{cases}$$

Si Γ est l'intersection d'une surface S et d'une surface S*, on pourra considérer aussi les paramètres u^*, v^* comme fonctions de t, et obtenir des expressions $\bar{\xi}^* = \frac{\xi_d^*}{dt}, \ldots, \bar{r}^* = \frac{r_d^*}{dt}$ analogues à $\bar{\xi}, \ldots, \bar{r}$ et enfin les projections $x_1^*, \ldots, z_3^*$ des vecteurs $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}, \frac{\overrightarrow{d^3M}}{dt^3}$ sur les axes du trièdre de Darboux M$x^*y^*z^*$ de la surface S*.

On peut d'ailleurs se donner arbitrairement la loi de parcours de Γ; le plus souvent nous supposerons le mouvement uniforme, mais il peut être utile parfois de prendre pour vitesse une fonction $f(t)$; nous aurons alors

$$(2) \qquad x_1^2 + y_1^2 = x_1^{*2} + y_1^{*2} = f^2(t).$$

Égalant ensuite les deux expressions du carré de l'accélération [1]

$$(3) \qquad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_2^{*2} + y_2^{*2} + z_2^{*2}.$$

---

[1] En tenant compte de l'équation (2) et de celle qu'on obtient en la dérivant par rapport à t, on voit que l'équation (3) peut remplacer celle qu'on obtient en égalant les deux expressions de la mesure du produit vectoriel $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \wedge \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}$ correspondant à S et S*.

Le produit mixte $\left(\frac{\overrightarrow{d\mathrm{M}}}{dt} \wedge \frac{\overrightarrow{d^2\mathrm{M}}}{dt^2}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{d^3\mathrm{M}}}{dt^3}$ donne de même

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^\star & y_1^\star & 0 \\ x_2^\star & y_2^\star & z_2^\star \\ x_3^\star & y_3^\star & z_3^\star \end{vmatrix}$$

Si l'on prend $f(t) = 1$, la variable t n'est autre que l'arc de la courbe Γ, la valeur commune des deux membres de (3) est alors le carré de la courbure; les deux membres de (4) sont égaux aux produits de la courbure par la torsion.

Les équations (2), (3) et (4) constituent le système (R); on voit facilement qu'elles peuvent être remplacées par sept équations du premier ordre. Les courbes ne dépendent pas de $f(t)$; prenons $f(t) = 1$; l'une des constantes arbitraires entrant dans la solution générale de (R) peut être considérée comme déterminant l'origine des abscisses curvilignes sur Γ et les courbes Γ tracées sur une surface déterminée S ne dépendent que de six constantes arbitraires.

4. Donnons-nous des valeurs numériques u_0, v_0, $u_0^\star$, $v_0^\star$ des paramètres u, v, $u^\star$, $v^\star$ auxquelles correspondent les deux trièdres de Darboux $\mathrm{M}_0x_0y_0z_0$, $\mathrm{M}_0^\star x_0^\star y_0^\star z_0^\star$, supposons que $\mathrm{M}_0^\star$ et M_0 coïncident et qu'on connaisse l'orientation mutuelle de ces deux trièdres (ce qui revient en général à la donnée de trois angles d'Euler). La position mutuelle des surfaces est ainsi déterminée, leur intersection l'est aussi. Indiquons brièvement comment on peut trouver les données initiales autres que u_0, ..., $v_0^\star$ pouvant caractériser la solution correspondante de (R).

Dans le cas général, où l'angle $\widehat{\mathrm{M}_0z_0, \mathrm{M}_0z_0^\star}$ n'est pas un multiple de π, les plans tangents aux deux surfaces étant distincts, leur intersection donne la tangente $\mathrm{M}_0\mathrm{T}_0$ à la courbe Γ; les angles d'Euler $\widehat{\mathrm{M}_0x_0, \mathrm{M}_0\mathrm{T}_0}$, $\widehat{\mathrm{M}_0\mathrm{T}_0, \mathrm{M}_0x_0^\star}$ étant connus, les cosinus directeurs de $\mathrm{M}_0\mathrm{T}_0$ le sont aussi et déterminent $\left(\text{puisque } \frac{ds}{dt} = 1\right)$ les valeurs initiales de ξ, η, $\xi^\star$, $\eta^\star$, et par suite celles des dérivées premières $\frac{du}{dt}$, ..., $\frac{dv^\star}{dt}$.
L'accélération de M est portée par la normale principale, ses projections sur Mz, M$z^\star$ [*voir* formules (1)] sont connues; lorsque M est en M_0, ce vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM}_0''}$ est situé dans le plan $z_0\mathrm{M}z_0^\star$, ses projections sur

M_0x_0, M_0y_0, $M_0x_0^*$, $M_0y_0^*$ sont faciles à calculer; on en déduit les valeurs initiales des dérivées secondes $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2u^*}{dt^2}$, $\frac{d^2v^*}{dt^2}$.

Mais quand les axes M_0z_0, $M_0z_0^*$ *sont portés par la même droite*, les plans tangents en M_0 sont confondus, la méthode précédente n'est plus valable. L'angle $\varphi = \widehat{M_0x_0, M_0x_0^*}$ étant alors connu, on exprime que $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, $\bar{\xi}_0^*$, $\bar{\eta}_0^*$ sont les projections sur les axes des deux systèmes d'un même vecteur $\overrightarrow{M_0M_0'}$ de mesure égale à l'unité, on écrit encore que les projections de l'accélération $\overrightarrow{M_0M_0''}$ sur les axes M_0z_0, $M_0z_0^*$ sont égales ou opposées selon que ces axes ont ou non même sens. On a ainsi quatre équations pour le calcul des valeurs initiales des dérivées premières. En les supposant obtenues, on peut chercher celles des dérivées secondes en utilisant les équations obtenues par dérivation des équations (2), les équations obtenues en égalant les courbures géodésiques au point M_0 de la courbe considérée comme appartenant à S et à S^*, et enfin celle qui exprime que, en M_0, z_3 et z_3^* sont égaux ou ont une somme nulle.

On peut vérifier que ces équations donnent les valeurs initiales cherchées quand les deux surfaces ont en M_0 un contact du premier ordre, le point double présenté par l'intersection étant à tangentes distinctes. [Il est commode de prendre ici pour trièdres de Darboux les trièdres de Frenet (dont les axes sont les tangentes aux lignes de courbure et les normales à S et S^*)]. Mais lorsque les tangentes au point double sont confondues, ou lorsque l'ordre du contact surpasse l'unité, une étude plus complète est nécessaire.

5. Par l'introduction de nouvelles fonctions inconnues, *nous substituerons au système résolvant* (R) *un système* (R') *formé d'équations du premier ordre où les dérivées des fonctions inconnues figurent linéairement.*

A chaque point M d'une intersection Γ correspondent deux trièdres de Darboux $Mxyz$, $Mx^*y^*z^*$ relatifs à S et à S^*; désignons par ω, α, $-\omega^*$ les angles d'Euler caractérisant l'orientation de $Mx^*y^*z^*$ par rapport à $Mxyz$; ω et ω^* sont donc les angles que la tangente (orientée) MT à Γ fait avec Mx et Mx^*. Les nouvelles fonctions inconnues sont ω, α, ω^*.

Le vecteur $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ porté par MT ayant pour mesure $f(t)$, ses projections sur les axes Mx, ..., My^* sont

$$(5)\qquad \begin{cases} \bar{\xi} = f(t)\cos\omega, & \bar{\eta} = f(t)\sin\omega, \\ \bar{\xi}^* = f(t)\cos\omega^*, & \bar{\eta}^* = f(t)\sin\omega^*. \end{cases}$$

Le vecteur rotation instantanée $\vec{\mathcal{R}}^*$ du mouvement de $Mx^*y^*z^*$ par rapport à des axes $MX'Y'Z'$ parallèles aux axes fixes OXYZ est la résultante du vecteur rotation instantanée de $Mx^*y^*z^*$ par rapport à $Mxyz$ et du vecteur rotation instantanée de $Mxyz$ par rapport à $MX'Y'Z'$.

Cette relation géométrique se traduit par trois équations, nous écrivons celles qu'on obtient en projetant ces vecteurs sur MT et sur les perpendiculaires MN, MN* à MT situés respectivement dans les plans Mxy, Mx^*y^* $\left(\text{l'angle } \widehat{My, MN} = \omega \text{ et } \widehat{My^*, MN} = \omega^*\right)$. Les équations ainsi obtenues peuvent s'écrire

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \bar{p}^*\cos\omega^* + \bar{q}^*\sin\omega^* - (p\cos\omega + q\sin\omega), \\ \sin\alpha\dfrac{d\omega}{dt} = -\bar{r}\sin\alpha + (-\bar{p}^*\sin\omega^* + \bar{q}^*\cos\omega^*) \\ \qquad - (-\bar{p}\sin\omega + \bar{q}\cos\omega)\cos\alpha, \\ \sin\alpha\dfrac{d\omega^*}{dt} = -\bar{r}^*\sin\alpha + (-\bar{p}^*\sin\omega^* + \bar{q}^*\cos\omega^*)\cos\alpha \\ \qquad - (-\bar{p}\sin\omega + \bar{q}\cos\omega). \end{cases}$$

Les équations (5) et (6) forment le système (R′) cherché. En éliminant ω, ω^*, α, on retrouverait un système équivalent à (R). Supposons les déterminants $\xi\eta_1 - \eta\xi_1$, $\xi^*\eta_1^* - \eta^*\xi_1^*$ différents de zéro, les équations (5) donnent $\dfrac{du}{dt}$, $\dfrac{dv}{dt}$, $\dfrac{du^*}{dt}$, $\dfrac{dv^*}{dt}$ et leurs valeurs portées dans les seconds membres des équations (6) donnent au système (R′) la forme

$$(7)\qquad \frac{du}{U\sin\alpha} = \frac{dv}{V\sin\alpha} = \frac{du^*}{U^*\sin\alpha} = \frac{dv^*}{V^*\sin\alpha} = \frac{d\alpha}{A\sin\alpha} = \frac{d\omega}{\Omega} = \frac{d\omega^*}{\Omega^*} = \frac{f(t)\,dt}{\sin\alpha}.$$

U, V sont fonctions holomorphes de u, v, ω ; U^*, V^* sont aussi holomorphes en u^*, v^*, ω^*; A, Ω, Ω^* sont fonctions holomorphes de u, v, u^*, v^*, ω, ω^*; il est inutile d'écrire leurs expressions.

6. **Prenons d'abord $f(t) = 1$ et donnons-nous des valeurs initiales $u_0, v_0, \ldots, \alpha_0$, auxquelles correspondent deux trièdres de Darboux $M_0 x_0 y_0 z_0$, $M_0 x_0^* y_0^* z_0^*$ dont l'orientation mutuelle est aussi connue; nous prendrons M_0 comme origine des arcs, autrement dit $t = 0$ pour ce point. Les théorèmes classiques d'existence montrent que,** ***pour $\sin\alpha_0 \neq 0$, le système (7) admet une solution unique, $u, v, \ldots, \omega^*, \alpha$ sont fonctions holomorphes de t.***

Lorsque $\sin\alpha_0$ est nul, les surfaces sont tangentes en M_0 et l'on peut (en changeant au besoin les directions de deux des axes de l'un des trièdres) obtenir que α_0 soit nul, comme nous l'admettrons.

Nous indiquerons par l'indice zéro les valeurs des fonctions correspondant aux valeurs initiales des variables. Celles de Ω et Ω^* sont égales

$$\Omega_0 = \Omega_0^* = \bar{p}_0 \sin\omega_0 - \bar{q}_0 \cos\omega_0 - (\bar{p}_0^* \sin\omega_0^* - \bar{q}_0^* \cos\omega_0^*),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\Omega_0 = \Omega_0^* = \bar{p}_0 \bar{\eta}_0 - \bar{q}_0 \bar{\xi}_0 - (\bar{p}_0^* \bar{\eta}_0^* - \bar{q}_0^* \bar{\xi}_0^*). \tag{8}$$

Supposons d'abord $\Omega_0 \neq 0$. En prenant pour variable indépendante ω à la place de t [et faisant toujours $f(t) = 1$)], le système (7) admet une solution unique correspondant aux données initiales, mais elle est sans intérêt au point de vue géométrique, car on vérifie directement que cette solution n'est autre que $\alpha = t = 0$, $u = u_0$, $v = v_0$, $u^* = u_0^*$, $v^* = v_0^*$; on a donc un point au lieu d'une ligne d'intersection. C'est là un exemple d'un cas exceptionnel qui peut se présenter dans l'étude des singularités des systèmes différentiels (¹).

Prenons donc $\Omega_0 = 0$; divers cas sont à examiner pour cette relation considérée comme équation en ω_0 et ω_0^*. Si elle ne se réduit pas à une identité, ***elle détermine l'un de ces angles connaissant l'autre, ou mieux les deux angles connaissant leur différence*** **$\delta = \omega_0 - \omega_0^*$, c'est-à-dire l'angle $\widehat{M_0 x_0, M_0 x_0^*}$, qui suffit à caractériser l'orientation des deux surfaces SS^* quand il y a contact en M_0 (²).**

(¹) *Voir* dans l'exposé de Painlevé (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. 2, vol. III, art. 15) le n° 17, p. 23-24.

(²) Dans ces conditions, les équations obtenues en projetant les rotations instantanées sur MN, MN* ne sont plus distinctes; mais on a, en projetant

Nous écrirons l'équation $\Omega_0 = 0$, et poursuivrons notre étude en supposant les deux surfaces rapportées à leurs lignes de courbure. On trouve facilement avec les notations et les formules de Darboux (*Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, tableau V, p. 386),

$$\bar{p}\eta - \bar{q}\xi = \frac{\cos^2\omega}{R} + \frac{\sin^2\omega}{R'},$$

et par suite

$$\Omega_0 = \frac{\cos^2\omega_0}{R_0} + \frac{\sin^2\omega_0}{R'_0} - \frac{\cos^2\omega_0^*}{R_0^*} - \frac{\sin^2\omega_0^*}{R_0^{*\prime}} = 0.$$

Cette équation exprime que les courbures des sections normales tangentes à M_0T_0 doivent être les mêmes dans les deux surfaces, ainsi que l'indique le théorème de Meusnier. L'équation

$$(10) \quad \frac{1}{R_0} + \frac{\mathfrak{T}^2}{R'_0} - \frac{1}{R_0^*}(\cos\delta + \mathfrak{T}\sin\delta)^2 - \frac{1}{R_0^{*\prime}}(\sin\delta - \mathfrak{T}\cos\delta)^2 = 0$$

détermine $\mathfrak{T} = \operatorname{tg}\omega_0$ (si elle ne se réduit pas à une identité).

Nous poserons $\omega = \omega_0 + w$, $\omega^* = \omega_0^* + w^*$, les valeurs initiales des nouvelles variables sont nulles, et l'on peut admettre qu'il en est de même pour u, v, u^*, v^*.

L'étude [1] d'un point singulier d'un système différentiel de cette nature fait intervenir une équation caractéristique $\Delta(\lambda) = 0$; des calculs faciles montrent qu'elle admet six racines nulles et les deux racines A_0, $-A_0$, où

$$(11) \quad A_0 = \sin\omega_0\cos\omega_0\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_0}\right) - \sin\omega_0^*\cos\omega_0^*\left(\frac{1}{R_0^*} - \frac{1}{R_0^{*\prime}}\right).$$

---

sur Mz et Mz^* supposés confondus,

$$(9) \qquad \frac{d\omega}{dt} - \frac{d\omega^*}{dt} = \bar{r}^* - \bar{r}.$$

Cette équation est d'ailleurs identique à celle qu'on obtient en retranchant membre à membre les deux dernières équations (6), divisant par $2\sin\frac{\alpha}{2}$ et faisant ensuite $\alpha = 0$. L'équation (9) est vérifiée pour les données initiales; il peut arriver qu'elle le soit en tous les points d'une courbe commune aux deux surfaces S, S*, elles se raccordent alors en suivant cette courbe.

[1] *Voir* pour cette étude l'exposé de M. Dulac : *Points singuliers des équations différentielles* [*Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule LXI (Section II)]. *Voir* aussi son Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 40, 1912, p. 324.

Les valeurs initiales considérées constituent ce que M. Dulac appelle un point singulier exceptionnel lorsque $A_0 \neq 0$, et un point singulier multiple si $A_0 = 0$.

Dans le premier cas le système admet une « solution holomorphe nulle », c'est-à-dire telle que les diverses variables u, v, u^*, v^*, w, w^*, α sont fonctions holomorphes de l'une d'elles. En effet, en prenant α pour cette variable indépendante, on obtient un système appartenant à une classe étudiée par M. Picard (¹).

L'équation en λ qu'il considère a ici une seule racine différente de zéro (elle est égale à -2); on est donc dans le cas où sa méthode donne une solution formée par des fonctions holomorphes (de α) ne comportant aucune constante. Comme $\frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{A}$ est différent de zéro pour les valeurs initiales nulles, chacune des variables t, α est fonction holomorphe de l'autre; et les diverses inconnues $u, v, \ldots, w^*$ sont fonctions holomorphes de t.

Si l'on voulait poursuivre cette étude on devrait examiner le cas où $\mathfrak{T}$ étant déterminé par l'équation (10), A_0 serait nul, et ceux où Ω_0 est identiquement nul. Mais une autre méthode va nous donner rapidement la nature des singularités possibles.

7. L'intégration d'un système Σ d'équations aux différentielles totales complètement intégrable donne, pour chacune des surfaces S, S* les coefficients des formules de changement de coordonnées pour le passage du trièdre de Darboux au trièdre fixe OXYZ. En vertu des hypothèses faites sur $p, p_1, \ldots r_1$, et du théorème classique d'existence des solutions de Σ, ces coefficients sont fonctions analytiques des paramètres u, v; on en déduit facilement que les nouvelles coordonnées X, Y, Z de l'origine M du trièdre de Darboux $Mxyz$ de la surface S sont fonctions analytiques de ces mêmes paramètres (²).

Admettons que les constantes arbitraires soient choisies de façon que OXYZ coïncide avec le trièdre de Darboux du point M_0 pour lequel $u_0 = v_0 = 0$, et que le déterminant $\xi\eta_1 - \eta\xi_1$ ne soit pas nul pour $u_0 = v_0 = 0$, le déterminant fonctionnel $\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}$ est aussi différent de zéro, et d'autre part les dérivées $\frac{\partial Z}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial v}$ sont nulles. Par

(¹) *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. I, n° 13.

(²) Pour le calcul des coefficients de ces séries, *voir* la section I de l'article *Généralisation de la Théorie du trièdre mobile* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 33, 1905, p. 42).

suite u, v sont des séries entières en X, Y sans termes constants et Z est aussi une série entière F(X, Y) commençant par des termes dont l'ordre est au moins égal à deux.

Des opérations analogues suivies d'une rotation d'un angle $-\delta$ autour de OZ (δ a été défini au n° 6), donnent l'équation $Z = F^*(X, Y)$ de S^* rapportée aux mêmes axes OXYZ, F^* est encore une série entière commençant par des termes du second ordre au moins; et u^*, v^* sont aussi des séries entières en X, Y sans termes constants.

La projection de l'intersection des deux surfaces S, S^* sur le plan XOY a pour équation

$$F(X, Y) - F^*(X, Y) = 0. \tag{12}$$

L'étude de cette courbe au voisinage de l'origine, qui en est un point multiple, peut être faite par les méthodes utilisées pour les équations algébriques. Elle montre que, pour X voisin de zéro, les racines infiniment petites Y de (12) se répartissent en systèmes circulaires.

A chacun d'eux correspond un nombre entier ν tel qu'en posant $X = \tau^\nu$, Y est une série entière en τ, $g(\tau)$ sans terme constant, ν et les exposants de ses termes étant premiers entre eux dans leur ensemble. On a ensuite pour $Z = F(X, Y) = F^*(X, Y)$ une série entière en τ, $h(\tau)$, et l'ensemble des trois équations

$$X = \tau^\nu, \qquad Y = g(\tau), \qquad Z = h(\tau) \tag{13}$$

détermine un cycle d'Halphen analogue à ceux considérés par ce géomètre dans l'étude des courbes algébriques.

Nous admettons que OY n'est pas la tangente au cycle en O, alors pour τ infiniment petit l'ordre infinitésimal de g n'est pas inférieur à ν et celui de Z à 2ν.

Quand la tangente à l'origine d'un cycle n'est pas isotrope, on peut substituer au paramètre τ une variable t, plus pratique pour l'étude des invariants différentiels relatifs au groupe des déplacements euclidiens; elle est liée à l'arc s du cycle compté à partir de O par la relation

$$s = t^\nu, \qquad t = s^{\frac{1}{\nu}}.$$

L'arc s est donné par une série entière en τ où l'on peut mettre τ^ν en facteur; on a donc pour t une série analogue $\sigma(\tau)$ commençant par un terme du premier degré. (On peut d'ailleurs choisir les déterminations des radicaux intervenant dans la question, de façon que pour une branche réelle, t soit réel.) Inversement, τ est une série entière en t commençant par un terme du premier degré.

Les coordonnées X, Y, Z d'un point du cycle appartenant à l'intersection de S et de S^* sont donc des fonctions holomorphes de t vérifiant identiquement l'équation

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 = \nu^2 t^{2\nu-2},$$

les paramètres u, v, u^*, v^* sont aussi des fonctions de même nature dont les développements contiennent au moins t^ν en facteur.

Prenons alors t comme variable indépendante, les expressions $\bar\xi, \bar\eta, \ldots, \bar r^*$ sont fonctions holomorphes de t où $t^{\nu-1}$ entre en facteur, et l'on a

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \bar\xi^2 + \bar\eta^2 = \bar\xi^{2*} + \bar\eta^{2*} = \nu^2 t^{2\nu-2}.$$

Les sinus et cosinus de ω et de ω^*, et par suite ω, ω^* sont (n° 5) des fonctions holomorphes de t. La première formule (6)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \bar p^* \cos\omega^* + \bar q^* \sin\omega^* - (\bar p \cos\omega + \bar q \sin\omega)$$

montre que α nul pour $t = 0$ est une fonction holomorphe de t où l'on peut mettre en facteur une puissance de t d'exposant au moins égal à ν. En définitive nous avons démontré que les solutions u, v, u^*, v^*, ω, ω^*, α du système (7) sont fonctions algébroïdes ou (si $\nu = 1$) fonctions holomorphes de l'arc s.