BULLETIN DE LA S. M. F.

LEWIS-BAYARD ROBINSON

Un système de Riquier et le calcul tensoriel. II

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 129-133
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__129_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN SYSTÈME DE RIQUIER ET LE CALCUL TENSORIEL;

(DEUXIÈME PARTIE).

PAR M. LEWIS-BAYARD ROBINSON.

Introduction.

Wilczynski a calculé les covariants et semi-covariants du système

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} y_1'' + p_{11}y_1' + p_{12}y_2' + q_{11}y_1 + q_{12}y_2 = 0, \\ y_2'' + p_{21}y_1' + p_{22}y_2' + q_{21}y_1 + q_{22}y_2 = 0 \end{cases}$$

sous le groupe de transformations

$$y_k = \sum_{\lambda=1}^{2} \alpha_{k\lambda}(x)\eta_\lambda,$$

$$y_k^{(l)} = \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\rho=0}^{l}\binom{l}{\rho}\alpha_{k\lambda}^{(\rho)}(x)\eta^{(l-\rho)}x = f(\xi) \qquad (k = 1, 2;\ l = 0, 1, 2, \ldots, m) \quad (^1),$$

où $\binom{l}{\rho}$ est le coefficient de x^ρ dans le développement de $(1+x)^l$.

Quand il s'agit des semi-covariants

$$x = f(\xi) = \xi.$$

nous pouvons associer au système ci-dessus un système desemi-tenseurs

$$\bar{\mathrm{I}}_1 = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{r!}{(r-k)!\,k!}\Delta_{11}^{r-k}\Delta_{21}^{k}\,\mathrm{I}_{1+k} \equiv \mathrm{V}_1,$$

$$\bar{\mathrm{I}}_{s+1} = \frac{(r-s)!}{r!}\left[\Delta_{12}\frac{\partial}{\partial\Delta_{11}} + \Delta_{22}\frac{\partial}{\partial\Delta_{21}}\right]^s \mathrm{V}_1 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

---

(1) *Voir* WILCZYNSKI, *Projective differential Geometry*, Chapter IV.

où les I dépendent de

$$y_1, \quad y_2, \quad y'_1, \quad y'_2,$$

$$p_{ij}, \quad p'_{ij}, \quad q_{ij} \qquad (i, j = 1, 2),$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{11} \equiv \quad \alpha_{22}, \qquad \Delta_{12} \equiv -\alpha_{21},$$

$$\Delta_{21} \equiv -\alpha_{12}, \qquad \Delta_{22} \equiv \quad \alpha_{11}.$$

Nous avons étudié en détail le cas où

$$r = 2 \quad (^2).$$

Nous procéderons au calcul des semi-tenseurs dans le casgénéral. Nous pourrons les trouver comme les solutions d'un système d'équations désigné par le symbole (A).

Écrivons le système

$$\Omega_{ij}(f) \equiv 2\frac{\partial f}{\partial p'_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial q_{ii}},$$

$$\Psi_{ij}(f) \equiv -y_j\frac{\partial f}{\partial y'_i} + 2\frac{\partial f}{\partial p_{ij}} + \sum_{\lambda=1}^{2}\left(p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p'_{\lambda j}} - p_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p'_{i\lambda}} + p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial q_{\lambda j}}\right),$$

$$\Phi_{ij}(f) \equiv -y_i\frac{\partial f}{\partial y_i} - y'_j\frac{\partial f}{\partial y'_i}$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{2}\left(p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p_{\lambda j}} - p_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_{i\lambda}} + p'_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p'_{\lambda j}} - p'_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p'_{i\lambda}} + q_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial q_{\lambda j}} - q_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_{i\lambda}}\right).$$

Cherchons à résoudre le système

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \Omega_{ij}(\mathrm{I}_k) = 0 & (i, j = 1, 2), \\ \Psi_{ij}(\mathrm{I}_k) = 0 & (k = 1, 2, \ldots, r+1); \\ \Phi_{12}(\mathrm{I}_k) = -(r-k+1)\mathrm{I}_{k+1}, \\ \Phi_{11}(\mathrm{I}_k) = +(k-1)\mathrm{I}_k, \\ \Phi_{22}(\mathrm{I}_k) = +(r-k+1)\mathrm{I}_k, \\ \Phi_{21}(\mathrm{I}_k) = -(k-1)\mathrm{I}_{k-1}. \end{cases}$$

L'intégration du système

$$\Omega_{ij}(f) = 0, \qquad \Psi_{ij}(f) \doteq 0, \qquad \Phi_{ij}(f) = 0 \quad (^3)$$

([2]) Voir *Comptes rendus* (Doklady) *de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 1937, p. 411.

([3]) Voir ***Projective differential Geometry***, loco-citoto.

nous donne un système complet de semi-covariants. L'intégration du système (A) nous donne un système complet de semi-tenseurs.

L'intégration du système (A) est équivalente à l'intégration du système suivant

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \Omega_{ij}(f)=0, \qquad \Psi_{ij}(f)=0, \\ \Phi_{12}(f)-\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r+1}(r-k+1)\mathrm{I}_{k+1}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}_k}=0, \\ \Phi_{11}(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r+1}(k-1)\mathrm{I}_k\frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}_k}=0, \\ \Phi_{22}(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r+1}(r-k+1)\mathrm{I}_k\frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}_k}=0, \\ \Phi_{21}(f)=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r+1}(k-1)\mathrm{I}_{k-1}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}_k}=0 \quad (^1). \end{cases}$$

Une intégrale première du système (B) peut s'écrire

$$f_1 \equiv y_1^r\,\mathrm{I}_{r+1}-ry_1^{r-1}y_2\mathrm{I}_r+\frac{r(r-1)}{1.2}y_1^{r-2}y_2^2\mathrm{I}_{r-1}(-1)^r y_2^r\,\mathrm{I}_1.$$

Nous tirons une chaîne de solutions f_{s+1} de la première solution ainsi

$$f_{s+1}\equiv\left(\mathrm{Y}_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\mathrm{Y}_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)f_s \qquad (s=1, 2, \ldots, r),$$

où

$$\mathrm{Y}_1\equiv 2y'_1+y_2p_{12}+y_1p_{11},$$
$$\mathrm{Y}_2\equiv 2y'_2+y_1p_{21}+y_2p_{22}.$$

Nous avons aussi comme solutions

$$\mathrm{I}\equiv u_{11}+u_{22}, \qquad \mathrm{J}\equiv u_{11}u_{22}-u_{12}u_{21},$$
$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\equiv\frac{1}{\mathrm{D}}\{u_{12}y_2^2-u_{21}y_1^2+(u_{11}-u_{22})y_1y_2\},$$
$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}}\equiv\frac{1}{\mathrm{D}}\{u_{12}\mathrm{Y}_2^2-u_{21}\mathrm{Y}_1^2+(u_{11}-u_{22})\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\},$$

(1) *Voir* Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, p. 502.

où

$$u_{11} \equiv 2p'_{11} - 4q_{11} + p_{11}^2 + p_{12}p_{21},$$
$$u_{12} \equiv 2p'_{12} - 4q_{12} + p_{12}(p_{11} + p_{22}),$$
$$u_{21} \equiv 2p'_{21} - 4q_{21} + p_{21}(p_{11} + p_{22}),$$
$$u_{22} \equiv 2p'_{22} - 4q_{22} + p_{22}^2 + p_{12}p_{21},$$

$$D \equiv \begin{vmatrix} y_1 & Y_1 \\ y_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Par conséquent la solution générale du système (B) peut s'écrire

$$\Phi\left\{f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}; \mathrm{I}, \mathrm{J}, \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}, \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}}\right\},$$

où Φ est une fonction arbitraire.

Écrivons

$$\text{(C)} \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{r+1} = 0.$$

Les Φ_i sont des fonctions arbitraires de

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}}.$$

Résolvons les $\Phi_i = 0$ par rapport aux $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$.

Nous aurons

$$f_i = \Psi_i\left\{\mathrm{I}, \mathrm{J}, \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}, \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1).$$

où les Ψ sont des fonctions arbitraires.

Écrivons

$$\mathrm{M} \equiv \frac{\mathrm{D}(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1})}{\mathrm{D}(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_{r+1})}.$$

Les f sont linéaires par rapport aux I.

Pour cette raison, M ne dépend pas des I.

Désignons les mineurs du déterminant M par les symboles M_{ij}.

Attachons-nous à résoudre le système $f_i = \Psi_i$ par rapport aux I.

Nous obtiendrons

$$\mathrm{I}_i = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_1^{r+1} {}_j \mathrm{M}_{ij} \Psi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Voilà la solution générale du système (A) et le système complet de semi-tenseurs.

Conclusion.

Si l'on veut calculer les semi-tenseurs qui dépendent de

$$y_i, \quad y'_i \,; \quad p_{ij}^{(l)}, \quad q_{ij},$$

il faut ajouter aux quantités

$$\mathrm{I}, \quad \mathrm{J}, \quad \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}, \quad \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}}$$

tous les semi-covariants restants de Wilczynski.