

BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEX FRODA

**Mesures extérieure et intérieure des ensembles-
image des fonctions multiformes ou uniformes
de variables réelles**

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 83-108

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__83_0

© Bulletin de la S. M. F., 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES EXTÉRIEURE ET INTÉRIEURE DES ENSEMBLES-IMAGE
DES FONCTIONS MULTIFORMES OU UNIFORMES DE VARIABLES
RÉELLES;

PAR M. ALEX. FRODA.

Dans ce qui suit, on étudie le problème d'évaluer les mesures extérieure et intérieure, au sens de *Lebesgue*, de l'ensemble-image d'une fonction multiforme ou uniforme ⁽¹⁾.

Les résultats qu'on atteint s'appuient sur une analyse des relations qui existent entre ces mesures et celles de l'ensemble vertical V de $f(P)$ en chaque point.

L'utilisation de notions aussi transcendantes que les intégrales extérieure et intérieure d'une fonction $f(P)$, mesurable ou non ⁽²⁾, paraît indispensable à la solution des problèmes qu'on s'est posés.

1. Voici un premier résultat fondamental :

I. *Lorsqu'une fonction bornée $f(P)$ multiforme ou uniforme, à n variables réelles possède en chaque point P d'un intervalle-support Δ_n un ensemble vertical V de valeurs, tel que*

$$m_e V \geq k \quad (\text{resp. } m_i V \leq k),$$

où $k > 0$, on a, pour l'image I de $f(P)$,

$$m_e I \geq k \text{ mes } \Delta_n \quad (\text{resp. } m_i I \leq k \text{ mes } \Delta_n).$$

Convenons, dans ce qui suit, de désigner, sauf avis contraire, l'ensemble-image (E_{n+1} par exemple), qui a pour support un ensemble donné (E_n par exemple) et dont l'ensemble vertical est

⁽¹⁾ La première tentative de résoudre ce problème date de 1912 (ALEX. FRODA, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 194, p. 2016, séance du 6 juillet 1932). Les résultats énoncés alors ont été complètement révisés dans cette étude.

⁽²⁾ Cf. ALEX. FRODA, *Sur quelques fonctionnelles attachées à des fonctions uniformes de variables réelles, mesurables ou non. Intégrales extérieure et intérieure* [*Bulletin math. de la Soc. Roumaine des Sciences*, t. 39, (2), Bucarest, 1937, p. 71-85].

en chaque point $\mathcal{Q}$ identique à l'intervalle $[a, b]$ par la même lettre (E par exemple) que l'ensemble-support, mais en changeant l'indice inférieur n en $(n + 1)$. On dira que E_n et E_{n+1} *se correspondent* l'un à l'autre.

Appelons, pour abrégé, *ensemble σ_n des points exclus d'un intervalle-support quelconque Δ_n par rapport à un intervalle-support J_n donné en Δ_n* , l'ensemble ouvert des points de Δ_n , dont la projection sur l'un au moins des n axes de coordonnées se trouve à une distance strictement inférieure à une quantité λ , positive et non nulle, de la projection sur l'axe respectif d'une au moins des extrémités de l'intervalle J_n , contenu en Δ_n .

Il est clair qu'en extrayant d'un intervalle-support quelconque Δ_n l'ensemble σ_n , ainsi défini, l'intervalle Δ_n se trouve par cela même décomposé en une somme d'intervalles-supports non empiétant, que nous appellerons *somme S_n d'un nombre fini ⁽³⁾ d'intervalles fermés restant en Δ_n après l'extraction de σ_n* .

On peut enfin faire remarquer que λ peut toujours être choisi assez petit pour que l'on ait $\text{mes} \sigma_n < \varepsilon \text{mes} \Delta_n$, où ε est une quantité positive donnée. En effet, la mesure de l'ensemble σ_n des points exclus de Δ_n est inférieure à $2\lambda n L^{n-1}$, quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut, si λ est assez petit, L désignant la plus grande projection de l'intervalle Δ_n sur l'un quelconque des axes.

Prouvons que

$$m_e I \geq k \text{mes} \Delta_n, \quad \text{lorsque} \quad m_e V \geq k > 0.$$

Supposons, en effet, que le contraire ait lieu, c'est-à-dire

$$m_e I < k \text{mes} \Delta_n.$$

Alors, si $\eta > 0$ est assez petit, il y a aussi

$$m_e I < (k - \eta) \text{mes} \Delta_n.$$

Recouvrons I d'un ensemble-image ouvert Ω , de mesure assez voisine de $m_e I$ pour que l'on ait encore

$$\text{mes} \Omega < (k - \eta) \text{mes} \Delta_n,$$

ce que l'on peut écrire, Δ_{n+1} étant l'intervalle-image qui cor-

(3) Ce nombre n'est pas supérieur à 3ⁿ, ni nul.

respond à Δ_n et enferme l'image I de $f(P)$ et $\Omega < \Delta_{n+1}$, ce qui est toujours possible,

$$\delta = (k - \eta) \text{mes} \Delta_n - \text{mes} \Omega \Delta_{n+1} > 0.$$

L'ensemble-image ouvert Ω a la structure d'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles fermés, non empiétant, sauf peut-être des points-frontière communs. Désignons ces intervalles-images fermés par

$$H_{n+1}^1, H_{n+1}^2, \dots, H_{n+1}^{\eta}, \dots,$$

et soient $H_n^1, H_n^2, \dots, H_n^{\eta}, \dots$ leurs intervalles-supports fermés (*).

Soit Δ_n l'intervalle-support fermé de $f(P)$, décomposé à l'aide de $J_1 = H_n^1$, en un ensemble ouvert σ_n^1 des points exclus de Δ_n par rapport à J_1 , ainsi qu'en une somme S_n^1 d'intervalles Δ_n^1 restant en Δ_n , après l'extraction de σ_n^1 . Il y a $\Delta_n = \Sigma \Delta_n^1 + \sigma_n^1$, donc

$$\text{mes} \Delta_n = \text{mes} \Sigma \Delta_n^1 + \text{mes} \sigma_n^1 \quad \text{et} \quad S_n^1 = \Sigma \Delta_n^1.$$

Or, en donnant à $\Delta_{n+1}^1, \sigma_{n+1}^1$ la signification indiquée ci-dessus, par rapport à Δ_n^1, σ_n^1 , il y a

$$\text{mes} \sigma_{n+1}^1 = (b - a) \text{mes} \sigma_n^1; \quad \Delta_{n+1}^1 = \Sigma \Delta_{n+1}^1 + \sigma_{n+1}^1,$$

et identiquement

$$\text{mes} \Omega \Sigma \Delta_{n+1}^1 = \Sigma \text{mes} \Omega \Delta_{n+1}^1 = \Sigma \frac{\text{mes} \Omega \Delta_{n+1}^1}{\text{mes} \Delta_n^1} \text{mes} \Delta_n^1.$$

Mais l'on ne peut avoir, pour chaque paire d'intervalles $\Delta_{n+1}^1, \Delta_n^1$,

$$\frac{\text{mes} \Omega \Delta_{n+1}^1}{\text{mes} \Delta_n^1} \geq k - \eta,$$

car il en résulterait

$$(k - \eta) \Sigma \text{mes} \Delta_n^1 - \text{mes} \Omega \Sigma \Delta_{n+1}^1 \leq 0,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \delta &= (k - \eta) \text{mes} \Delta_n - \text{mes} \Omega \Delta_{n+1} \\ &= [(k - \eta) \Sigma \text{mes} \Delta_n^1 - \text{mes} \Omega \Sigma \Delta_{n+1}^1] + [(k - \eta) \text{mes} \sigma_n^1 - \text{mes} \Omega \sigma_{n+1}^1] \\ &\leq (k - \eta) \text{mes} \sigma_n^1 - \text{mes} \Omega \sigma_{n+1}^1. \end{aligned}$$

(*) Il est clair que cette décomposition peut toujours être obtenue, de sorte qu'aucun des intervalles-supports H_n^i ne soit dégénéré (c'est-à-dire que H_n^i possède une mesure à n dimensions non nulle, puisque les points frontières des H_{n+1}^i peuvent être négligés, car ils forment au total un ensemble de mesure nulle).

Il résulterait

$$\delta \leq [k + (b - a)] \varepsilon \text{ mes } \Delta_n.$$

Or, δ est une constante positive et non nulle, tandis que ε peut être pris aussi petit que l'on veut, en choisissant $\gamma > 0$ en conséquence, de sorte que la dernière inégalité est absurde.

Il s'ensuit que, si l'on suppose

$$\delta_1 = (k - \gamma) \text{ mes } \Delta_n - \text{mes } \Omega \Delta_{n+1} > 0,$$

l'on doit avoir en même temps, pour au moins une paire d'intervalles $\Delta_{n+1}^1, \Delta_n^1$,

$$\frac{\text{mes } \Omega \Delta_{n+1}^1}{\text{mes } \Delta_n^1} < k - \gamma,$$

c'est-à-dire, pour cette paire d'intervalles ainsi distingués (par un choix parmi un nombre fini, choix qu'il serait aisé de préciser), l'on a

$$\delta_2 = (k - \gamma) \text{ mes } \Delta_n^1 - \text{mes } \Omega \Delta_{n-1}^1 > 0.$$

Ajoutons la remarque que l'intervalle fermé Δ_n^1 , ainsi distingué, est *strictement* intérieur à Δ_n .

Désignons maintenant par J_2 le premier des intervalles de mesure non nulle à n dimensions de la suite d'intervalles fermés

$$H_n^2 \Delta_n^1, H_n^3 \Delta_n^1, \dots$$

Or, la dernière inégalité entraîne, par application du même procédé, une décomposition de Δ_n^1 en un ensemble ouvert σ_n^1 des points exclus de Δ_n^1 par rapport à J_2 , ainsi qu'en une somme S_n^2 d'intervalles Δ_n^2 , restant en Δ_n^1 , après l'extraction de σ_n^1 .

On obtient, comme conclusion, une paire d'intervalles $\Delta_{n+1}^2, \Delta_n^2$, tels que

$$\delta_3 = (k - \gamma) \text{ mes } \Delta_n^2 - \text{mes } \Omega \Delta_{n+1}^2 > 0,$$

et l'intervalle Δ_n^2 est *strictement* intérieur à Δ_n^1 .

On voit que le procédé peut être continué indéfiniment. On obtient de la sorte une suite d'intervalles *strictement* emboîtés

$$\Delta_n > \Delta_n^1 > \Delta_n^2 > \dots > \Delta_n^q > \dots$$

Divisons chaque côté de l'intervalle Δ_n^q en q intervalles égaux, de sorte que Δ_n^q se décompose en q^n intervalles égaux $\Delta_n^{q'}$ et $\Delta_{n+1}^{q'}$ aussi en q^n intervalles égaux $\Delta_{n+1}^{q'}$ correspondants.

Puisque

$$\text{mes } \Omega \Delta'_{n+1} < (k - \eta) \text{mes } \Delta'_n,$$

il est clair, en raisonnant comme ci-dessus, qu'il existe au moins une paire Δ'_n, Δ'_{n+1} , telle que

$$\text{mes } \Omega \Delta'_{n+1} < (k - \eta) \text{mes } \Delta'_n.$$

Or, la suite des intervalles strictement emboîtés Δ'_n tend vers un point-limite $\mathfrak{X}$, qui par construction, ne peut se trouver sur la frontière d'aucun des intervalles H'_n , projections des intervalles constituant Ω .

Prouvons maintenant que ces résultats, obtenus en supposant par absurde $m_e I < (k - \eta) \text{mes } \Delta_n$, sont incompatibles avec l'hypothèse d'avoir $m_e V \geq k > 0$ en tout point P de Δ_n et en particulier au point $\mathfrak{X}$, que nous venons de distinguer.

En effet, l'ensemble ouvert Ω , recouvrant I, découpe sur la verticale du point $\mathfrak{X}$ un ensemble W d'intervalles linéaires non empiétants (au sens large) en nombre fini ou infini, et il y a évidemment $\text{mes } W \geq \text{mes } V \geq k > 0$.

Retenons, parmi ces intervalles, un nombre fini, formant un ensemble W' d'intervalles de manière que l'on ait encore, ce qui est toujours possible,

$$\text{mes } W' \geq k - \eta,$$

où η a la valeur indiquée ci-dessus.

Considérons parmi les intervalles-images H'_{n+1} , non empiétants, sauf peut-être des points frontières, les intervalles en nombre fini H'_{n+1} , qui découpent sur la verticale de $\mathfrak{X}$, les intervalles en nombre fini de W' . Considérons l'intervalle-support H, fermé, des points communs aux intervalles en nombre fini H'_n , supports des H'_{n+1} . Il est clair qu'il existe, et l'on peut choisir dans la suite des Δ'_n déterminés ci-dessus, un intervalle Δ'_n contenu dans l'intervalle-support H, que nous venons de définir et auquel le point $\mathfrak{X}$ doit être strictement intérieur ⁽⁵⁾. Il en résulte que $\Omega \Delta'_{n+1}$ contient, pour cette valeur particulière de q , une somme d'intervalles-images non empiétants, définis comme ayant chacun pour support commun

(5) C'est là un point indispensable à la démonstration et dont nous avons dû nous assurer par l'exclusion successive des σ'_n . Or, la distance de $\mathfrak{X}$ à l'ensemble des points-frontières des intervalles H'_n en nombre fini, ne peut être nulle, par construction.

l'intervalle choisi $\Delta_n^{g'}$ et pour projection sur l'axe des côtés, des intervalles égaux à ceux de W' . Cela permet d'écrire

$$\text{mes } \Omega \Delta_{n+1}^{g'} \geq \text{mes } W' \text{ mes } \Delta_n^{g'},$$

et donc

$$\text{mes } \Omega \Delta_{n+1}^{g'} \geq (k - \eta) \text{mes } \Delta_n^{g'},$$

contrairement au résultat antérieur, ce qui complète la démonstration.

Prouvons maintenant que $m_i I \leq k \text{mes } \Delta_n$, lorsque $m_i V \leq k$, où $k > 0$. On utilise, à cet effet, la fonction $c(P)$, complémentaire de $f(P)$ en Δ_{n+i} (*). Désignons par V' l'ensemble vertical des valeurs de $c(P)$ au point P , quelconque en Δ_n .

Il y a, V et V' étant complémentaires sur le segment de verticale de mesure $(b - a)$,

$$m_e V' + m_i V = (b - a),$$

donc

$$m_e V' = (b - a) - m_i V \geq (b - a) - k,$$

et par application des résultats précédents à $c(P)$, dont l'image est complémentaire de I en Δ_{n+1} , on a

$$m_e cI \geq [(b - a) - k] \text{mes } \Delta_n.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} m_i I &= \text{mes } \Delta_{n+1} - m_e cI = (b - a) \text{mes } \Delta_n - m_e cI \\ &\leq (b - a) \text{mes } \Delta_n - [(b - a) - k] \text{mes } \Delta_n = k \text{mes } \Delta_n. \end{aligned}$$

2. II. *Lorsqu'une fonction bornée $f(P)$, multiforme ou uniforme, possède en chaque point P d'un ensemble-support ouvert O_n (ou fermé F_n) un ensemble vertical V de valeurs, tel que*

$$m_e V \geq K \quad (\text{resp. } m_i V \leq K),$$

où $k > 0$, on a, pour l'image I de $f(P)$ sur O_n (resp. sur F_n),

$$m_e I \geq k \text{mes } O_n \quad (\text{resp. } m_i I \leq k \text{mes } F_n).$$

En effet, l'ensemble-support O_n est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles-supports Δ_n^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) fermés, non empiétants, sauf peut-être des points-frontières

(*) Rappelons que c'est, par définition, la fonction ayant pour image le complémentaire cI de l'image I de $f(P)$, par rapport à Δ_{n+1} .

$O_n = \sum_k \Delta_n^k$. Soient Δ_{n+1}^k l'intervalle-image, correspondant à Δ_n^k selon la convention posée ci-dessus, I_{n+1}^k l'ensemble-image d'une fonction multiforme $f_k(P)$ définie sur Δ_n^k et identique à $f(P)$ en tout point P de Δ_n^k . On a, par suite de $m_e V \geq k$, en chaque point P de $\Delta_n^k(I)$,

$$m_e I_n^k \geq k \text{mes} \Delta_n^k,$$

et, en sommant, avec la remarque que chaque I_n^k est intérieur à un Δ_{n+1}^k distinct (sauf un ensemble-image de mesure nulle), il vient ⁽¹⁾

$$m_e I = \sum_k m_e I_{n+1}^k \geq \sum_k k \text{mes} \Delta_n^k = k \text{mes} O_n.$$

C. Q. F. D.

La seconde inégalité se démontre à l'aide des complémentaires.

Considérons $f(P)$, telle que $m_i V \leq k$ en chaque point de l'ensemble-support F_n . Soient $O_n = c F_n$, le complémentaire de F_n en Δ_n ; O_{n+1} et F_{n+1} les ensembles-images correspondants ayant pour supports O_n et F_n respectivement et pour projection commune sur l'axe des cotes l'intervalle $[a, b]$.

Soient $\varphi(P)$ une fonction multiforme identique à $f(P)$ en chaque point de F_n et à l'intervalle linéaire $[O, k]$ en chaque point de $O_n = c F_n$; J l'image de $\varphi(P)$, qui est ainsi définie en chaque point de Δ_n ; J' l'image de $\varphi(P)$ sur l'ensemble-support O_n . On a $\text{mes} J' = k \text{mes} O_n$, comme il résulte du fait que l'image de $\varphi(P)$ sur chaque intervalle-support Δ_n^k , constituant O_n , est mesurable et a pour mesure $k \text{mes} \Delta_n^k$.

D'autre part, $J = I + J'$, où I et J' sont disjoints. Il en résulte

$$m_i J = m_i I + \text{mes} J'.$$

Or, en chaque point de Δ_n , l'ensemble vertical W des valeurs de $\varphi(P)$ est tel que $m_i W \leq k$, donc, en vertu de la proposition précédente (I),

$$m_i J \leq k \text{mes} \Delta_n.$$

Donc

$$m_i I = m_i J - \text{mes} J' = k \text{mes} \Delta_n - k \text{mes} O_n = k \text{mes} F_n.$$

⁽¹⁾ Cf. ALEX. FRODA, *Sur quelques propriétés métriques des ensembles de points* [Bulletin math. de la Soc. Roumaine des Sciences, t. 38, (2), Bucarest, 1936, p. 88 (Remarque)].

3. On a aussi

III. *Lorsqu'une fonction bornée $f(P)$ multiforme ou uniforme possède, en chaque point P d'un ensemble-support E mesurable, un ensemble vertical V de valeurs, tel que*

$$m_e V \geq k \quad (\text{resp. } m_i V \leq k),$$

où $k > 0$, on a, pour l'image I de $f(P)$ sur E ,

$$m_e I \geq k \text{ mes } E \quad (\text{resp. } m_i I \leq k \text{ mes } E).$$

Définissons les ensembles variables avec l'indice k , F_n^k fermés et O_n^k ouverts, tels que l'on ait, pour ε positif donné,

$$F_n^k < E < O_n^k,$$

et dès que k est assez grand, puisque E est mesurable,

$$\text{mes}(O_n^k - E) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \text{mes}(E - F_n^k) < \varepsilon.$$

Soient $\varphi(P)$ la fonction multiforme bornée, définie en Δ_n , comme étant identique à $f(P)$ en chaque point de E et prenant les valeurs de l'intervalle $[0, k]$ en chaque point du complémentaire cE de E en Δ_n ; $[a', b']$ l'intervalle-cote contenant les valeurs que $\varphi(P)$ prend en Δ_n ; J'_k et J''_k les images de $\varphi(P)$ sur F_n^k et O_n^k ; W l'ensemble vertical des valeurs de $\varphi(P)$ en un point P ; on a

$$J'_k < I < J''_k.$$

Or, en vertu de la proposition précédente (II) et puisque

$$m_e W \geq k \quad (\text{resp. } m_i W \leq k),$$

on a

$$m_e J'_k \geq k \text{ mes } O_n^k \quad (\text{resp. } m_i J'_k \leq k \text{ mes } F_n^k).$$

D'autre part

$$m_e J''_k \leq m_e I + m_e (J''_k - I); \quad m_i I \leq m_i J'_k + m_e (I - J'_k).$$

Or $(J''_k - I)$ a pour support $(O_n^k - E)$ et $(I - J'_k)$ a pour support $(E - F_n^k)$. Il s'ensuit, en vertu de résultats antérieurs ⁽⁸⁾

$$\begin{aligned} m_e (J''_k - I) &\leq m_e^k (J''_k - I) = k \text{ mes}(O_n^k - E) < k\varepsilon, \\ m_e (I - J'_k) &\leq m_e^k (I - J'_k) \leq (b' - a') \text{ mes}(E - F_n^k) < \varepsilon(b' - a'), \end{aligned}$$

⁽⁸⁾ Cf. ALEX. FRODA, *Sur la mesurabilité au sens restreint des ensembles-images des fonctions multiformes ou uniformes de variables réelles* (*Mathematica*, vol. XV

on obtient donc

$$m_e I \geq m_e J_k'' - m_e (J_k'' - I) \geq k \text{mes} O_k'' - k\varepsilon \geq k \text{mes} E - k\varepsilon;$$

respectivement

$$m_i I \leq m_i J_k' + m_e (I - J_k') \leq k \text{mes} F_k'' + \varepsilon (b' - a') \leq k \text{mes} E + \varepsilon (b' - a'),$$

et, comme ε est aussi petit que l'on veut, l'énoncé se trouve démontré.

4. IV. *Lorsqu'une fonction finie $f(P)$, multiforme ou uniforme, possède en chaque point P d'un ensemble E mesurable ou non, un ensemble vertical V de valeurs, tel que*

$$m_e V \geq k \quad (\text{resp. } m_i V \leq k),$$

où $k > 0$, il y a, pour l'image I de $f(P)$ sur l'ensemble E ,

$$m_e I \geq k m_e E \quad (\text{resp. } m_i I \leq k m_i E).$$

Supposons d'abord $f(P)$ bornée. Soient $m_i V \leq k$ et χ un noyau d'égale mesure de $l^{(9)}$, construit de manière qu'il soit mesurable B. Désignons par H sa projection, qui est aussi mesurable, comme ensemble analytique $(^{10})$.

On a

$$\text{mes} \chi = m_i I; \quad \chi < I \quad \text{et} \quad H < E, \quad \text{donc} \quad \text{mes} H \leq m_i E.$$

Soit W l'ensemble vertical de χ , correspondant à l'ensemble V de I , on a $W < V$, donc $\text{mes} W \leq m_i V$. En vertu de l'hypothèse

$$\text{mes} W \leq k,$$

et, par application de (III), il vient

$$\text{mes} \chi \leq k \text{mes} H,$$

donc, *a fortiori*,

$$m_i I = \text{mes} \chi \leq k m_i E.$$

C. Q. F. D.

Avant de donner la démonstration de l'autre inégalité, nous allons démontrer le résultat suivant, que nous allons utiliser.

⁽⁹⁾ Cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1936, p. 79.

⁽¹⁰⁾ Cf. N. LUSIN, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris, 1930, p. 144 et 152.

§. V. Lorsqu'une fonction $f(P)$ multiforme a pour ensemble vertical en chaque point d'un ensemble-support E , mesurable ou non, un ensemble linéaire identique à l'intervalle-cote $[a, b]$, il vient pour l'image I de $f(P)$ sur l'ensemble E ,

$$m_e I = (b - a) m_e E; \quad m_i I = (b - a) m_i E.$$

En effet, si G est l'enveloppe d'égale mesure de E ⁽¹¹⁾, on définit la fonction multiforme $\varphi(P)$ à l'image J , dont l'intervalle vertical est $[a, b]$ en chaque point de G , alors $\varphi(P)$ est identique à $f(P)$ sur E .

On a ⁽¹²⁾

$$(b - a) \text{mes } G = m_i^R J \leq m_i J \leq m_e J \leq m_e^R J = (b - a) \text{mes } G,$$

donc J est mesurable, et il y a

$$\text{mes } J = (b - a) \text{mes } G.$$

Or

$$\text{mes } J = m_e I + m_i (J - I).$$

Mais l'ensemble $(J - I)$ a pour support $(G - E)$ et pour ensemble vertical, en chaque point de $(G - E)$, l'intervalle vertical $[a, b]$.

En vertu de (IV), il y a, comme on vient de la voir,

$$m_i (J - I) \leq (b - a) m_i (G - E) = 0,$$

car de $\text{mes } G = m_e E$, on déduit $m_i (G - E) = 0$.

Il s'ensuit

$$m_e I = \text{mes } J = (b - a) \text{mes } G = (b - a) m_e E.$$

D'autre part, on a vu ci-dessus (IV) que

$$m_i I \leq (b - a) m_i E,$$

tandis que ⁽¹³⁾

$$m_i I \geq m_i^R I = (b - a) m_i E,$$

donc, en confrontant les deux inégalités

$$m_i I = (b - a) m_i E.$$

⁽¹¹⁾ Cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1936, p. 79.

⁽¹²⁾ Cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1938.

⁽¹³⁾ Cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1938.

6. Reprenons la démonstration de l'autre inégalité de notre proposition antérieure (IV), en supposant $f(P)$ bornée.

Soient $\Delta^{(n)}$ l'intervalle-support, contenant l'ensemble borné E et $m_e V \geq k$, en chaque point de E .

L'on peut enfermer l'ensemble-image I en un ensemble ouvert Ω .

L'ensemble-image ouvert Ω est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles-images $\Delta_p (p=1, 2, \dots)$, non empiétants deux à deux, mais pouvant avoir des points-frontières communs,

$$\Omega = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_p + \dots; \quad \text{mes } \Omega = \Sigma \text{mes } \Delta_p.$$

Nous allons définir un nouvel ensemble-image Ω' que nous déduirons de Ω par des opérations géométriques simples : décomposition des intervalles Δ_p en d'autres, et translations verticales, de sorte que l'on ait

$$\text{mes } \Omega' = \text{mes } \Omega.$$

Introduisons d'abord des conventions de langage afin d'abrégier notre exposé.

Un ensemble-image ouvert Ω_λ sera appelé *de type B* s'il peut être considéré comme la somme d'un nombre fini d'intervalles-images Δ'_k non empiétants, sauf peut-être les frontières dont les *bases inférieures* (c'est-à-dire l'ensemble des points-frontières de plus petite cote, qui est un intervalle horizontal à n dimensions) sont contenues dans l'intervalle-support $\Delta^{(n)}$ (alors chaque intervalle-image ne contient que des points à cote non négative).

Appelons *chevauchement d'un intervalle-image Δ sur un ensemble-image ouvert Ω de type B*, l'opération qui consiste à adjoindre des intervalles à l'ensemble-image Ω_λ de type B, de manière à obtenir un nouvel ensemble de type B, en procédant comme suit : on considère les bandes verticales indéfinies $\mathcal{B}_r$ soit de mêmes bases que les intervalles Δ'_r constituant Ω_λ , soit de bases Δ''_r complémentaires en $\Delta^{(n)}$ des bases des Δ'_r .

On décompose l'intervalle-image donné Δ en une somme d'intervalles partiels $\Delta \cdot \mathcal{B}_r$ (partie de Δ contenue en chaque bande). On opère sur chaque $\Delta \cdot \mathcal{B}_r$ une translation verticale, de sorte que l'intervalle obtenu Δ''_r vienne confondre sa base inférieure soit, si possible, avec la *base supérieure* de l'intervalle Δ'_r de Ω_λ

dont on s'est servi dans la définition du $\mathcal{B}_r$ respectif, soit avec un intervalle de $\Delta^{(n)}$, lorsque $\mathcal{B}_r$ a été défini à l'aide d'un Δ_r^c .

Il est facile voir que l'ensemble-image $\Omega_{\lambda+1}$, obtenu comme somme de Ω_λ et des Δ_r'' , est toujours un ensemble-image ouvert, de type B et

$$\text{mes } \Omega_{\lambda+1} = \text{mes } \Omega_\lambda + \text{mes } \Delta.$$

Procédons maintenant à la définition de Ω' . Considérons d'abord Δ_1 . Il existe un intervalle-image Δ'_1 constituant un Ω_1 ouvert, de type B, et il est clair que l'on obtient Ω_1 de Δ_1 par une translation.

On a donc

$$\text{mes } \Omega_1 = \text{mes } \Delta_1.$$

A l'aide d'un chevauchement de Δ_2 sur Ω_1 , l'on obtient Ω_2 , qui est du type B et

$$\text{mes } \Omega_2 = \text{mes } \Omega_1 + \text{mes } \Delta_2 = \text{mes } \Delta_1 + \text{mes } \Delta_2,$$

En poursuivant de la même manière, on définira, par itération du procédé, une suite croissante d'ensembles-images ouverts $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_p < \dots$, où

$$\text{mes } \Omega_p = \sum_1^p \text{mes } \Delta_p,$$

de sorte que

$$\Omega' = \lim \Omega_p = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots$$

est un ensemble dont on sait que

$$\text{mes } \Omega' = \Sigma \text{mes } \Delta_p,$$

donc

$$\text{mes } \Omega' = \text{mes } \Omega.$$

Considérons une verticale en un point $\mathcal{X}$ de E. Comme $\Omega > I$, si l'on désigne par W l'ensemble vertical de Ω au point $\mathcal{X}$, $m_e W \geq k$. Comme, d'autre part, chacun des intervalles-images de la suite des Δ_p , qui contiennent un segment de la verticale du point $\mathcal{X}$, se retrouve en translation en Ω' , il est clair que Ω' découpe sur la verticale du point $\mathcal{X}$ un ensemble vertical W' , tel que

$$m_e W' = m_e W \geq k.$$

Or, il suffit de considérer l'ensemble-image J, ayant pour sup-

port E , et tel qu'en chaque point $\mathcal{Q}$ de E , J soit constitué par l'intervalle vertical W_0 , identique à $[0, k]$, pour constater, d'une part, qu'il y a

$$\Omega' > J,$$

et de l'autre, en vertu de la proposition que l'on vient de démontrer (V), que

$$m_e J = k m_e E.$$

On a donc

$$\text{mes } \Omega = \text{mes } \Omega' \geq m_e J = k m_e E,$$

et si l'on prend la borne inférieure au premier membre

$$m_e I \geq k m_e E.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant $f(P)$ finie, bornée ou non, I son image, p un entier donné dépassant k .

Définissons la fonction $\varphi_p(P)$, telle que son image I_p soit formée par l'ensemble des points M de I , de cotes contenues en $[-p, +p]$, mais seulement les points-images M tels que l'ensemble vertical V_p de $\varphi_p(P)$, contenant M , satisfasse à $m_e V_p \geq k$; désignons par E_p l'ensemble-support de $\varphi_p(P)$. On a, puisque les suites des E_p et des I_p sont croissantes avec p et tendent pour $p = \infty$ vers E et I respectivement

$$m_e I = \lim m_e I_p \quad \text{et} \quad m_e E = \lim m_e E_p.$$

Mais, puisque $\varphi_p(P)$ est bornée, on a vu ci-dessus qu'il y a $m_e I_p \geq k m_e E_p$, et donc à la limite, $m_e I \geq k m_e E$.

Définissons, d'autre part, la fonction $\psi_p(P)$, telle que son image J_p soit formée par l'ensemble des points M_0 de I , de cotes contenues en $[-p, +p]$, sans autre condition. Il est clair, en effet, que l'ensemble vertical W_p de $\psi_p(P)$, contenant M_0 , satisfait à $m_i W_p \leq k$, puisque $W_p < V$, par définition, et il y a $m_i W_p \leq m_i V$; désignons par T_p l'ensemble-support de $\psi_p(P)$, il y a $T_p < E$. On a, puisque $(I - J_p)$ et J_p sont contenus en des ensembles mesurables distincts,

$$m_e (I - J_p) = m_e I - m_e J_p.$$

Or, la suite des J_p est croissante avec p et tend vers I , pour $p = \infty$. donc

$$m_e I = \lim m_e J_p.$$

Il s'ensuit

$$\lim m_e(I - J_p) = m_e I - \lim m_e J_p = 0.$$

Mais on peut écrire aussi

$$m_i I \leq m_i J_p + m_e(I - J_p),$$

et, comme $\psi_p(P)$ est bornée, on a vu ci-dessus qu'il y a

$$m_i J_p \leq k m_i T_p \leq k m_i E.$$

On a donc

$$m_i I \leq k m_i E + m_e(I - J_p),$$

ce qui, à la limite, donne

$$m_i I \leq k m_i E.$$

CONSÉQUENCE. — *Lorsqu'une fonction finie $f(P)$ a une image I mesurable et si, en chaque point de son ensemble-support E , l'ensemble vertical V de $f(P)$ est mesurable et de même mesure positive k , l'ensemble E est lui-même mesurable.*

En effet

$$m_e I \geq k m_e E \geq k m_i E \geq m_i I,$$

et donc, puisque l'on a $m_e I = m_i I$, par hypothèse, il en résulte $m_e E = m_i E$, car $k > 0$ et finie, par hypothèse.

7. Remarque. — Il est essentiel de constater maintenant que la réciproque de la proposition I n'est pas vraie, c'est-à-dire une fonction $f(P)$ peut être telle que l'on ait $m_e I \geq k \text{mes} \Delta_n$ (respectivement $m_i I \leq k \text{mes} \Delta_n$) et tout de même $m_e V < k$ (respectivement $m_i V > k$) en chaque point $\mathcal{X}$ de Δ_n .

Voici l'exemple d'une telle fonction. On définit $f(P)$ égale en chaque point de l'ensemble non mesurable H_n de Δ_n à l'intervalle $\left[0, 1 - \frac{\nu}{2}\right]$ et en chaque point de l'ensemble complémentaire cH_n en Δ_n à $\left[-1 + \frac{\nu}{2}, 0\right]$, où ν est le degré de non-mesurabilité de H_n ⁽¹⁴⁾, et l'on suppose $\text{mes} \Delta_n = 1$, $\nu < 1$.

Alors, il y a $f(P) > 0$ en chaque point de H_n , $f(P) < 0$ en

⁽¹⁴⁾ C'est-à-dire $\nu = m_e H_n - m_i H_n$, par définition (cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1936, p. 90).

chaque point de cH_n , et si l'on désigne par I'_{n+1} , I''_{n+1} les images de $f(P)$ sur H_n , cH_n , par Δ'_{n+1} , Δ''_{n+1} deux intervalles-images à support Δ_n et se projetant sur l'axe des cotes en $[0, 1]$, $[-1, 0]$ respectivement, comme Δ'_{n+1} et Δ''_{n+1} n'ont en commun que l'intervalle Δ_n , qui est de mesure à $(n+1)$ dimensions nulle, il est clair que l'on a, puisque $I'_{n+1} < \Delta'_{n+1}$ et $I''_{n+1} < \Delta''_{n+1}$,

$$m_e I = m_e(I'_{n+1} + I''_{n+1}) = m_e I'_{n+1} + m_e I''_{n+1}.$$

Or, en appliquant les résultats de la proposition (IV),

$$m_e I'_{n+1} \geq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_e H_n; \quad m_e I''_{n+1} \geq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_e(cH_n),$$

donc

$$\begin{aligned} m_e I &\geq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) [m_e H_n + m_e cH_n] = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) (\text{mes} \Delta_n + \nu) \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) (1 + \nu) = 1 + \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) > 1. \end{aligned}$$

Il y a donc, pour $k = 1$, $\text{mes} \Delta_n = 1$,

$$m_e I > k \text{mes} \Delta_n,$$

malgré le fait que $\text{mes} V < k$, en chaque point de Δ_n .

En ce qui concerne les mesures intérieures, il y a de même, puisque $I'_{n+1} < \Delta'_{n+1}$ et $I''_{n+1} < \Delta''_{n+1}$,

$$m_i I = m_i(I'_{n+1} + I''_{n+1}) = m_i I'_{n+1} + m_i I''_{n+1},$$

et, compte tenu des résultats de la proposition (IV),

$$m_i I'_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_i H_n; \quad m_i I''_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_i(cH_n),$$

donc

$$\begin{aligned} m_i I &\leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) [m_i H_n + m_i(cH_n)] = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) [\text{mes} \Delta_n - (m_e H_n - m_i H_n)] \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) (1 - \nu) < (1 - \nu). \end{aligned}$$

On a donc, pour $k = 1 - \nu$, $\text{mes} \Delta_n = 1$,

$$m_i I < k \text{mes} \Delta_n,$$

malgré le fait que $\text{mes} V > k$, en chaque point de Δ_n .

8. Avant d'aller plus loin, il nous faut démontrer deux propositions préliminaires indispensables.

Dorénavant, nous désignerons, en général, afin d'abrégier, par $\bar{A}$ l'ensemble-image ayant pour support l'ensemble A et pour ensemble vertical, en chaque point de A , le même intervalle linéaire $[a, b]$.

On appelle $\bar{A}$ *ensemble-image au support A à chaque cote de $[a, b]$* .

On a, en général, $(\overline{A_1 A_2}) = \bar{A}_1 \bar{A}_2$.

Soient donnés un ensemble-image I , à support E et l'ensemble-support A , tels que $A < E$; nous conviendrons d'appeler $m_e I \bar{A}$, $m_i I \bar{A}$ et $\text{mes } I \bar{A}$ respectivement les *mesures extérieure, intérieure ou mesure de I sur l'ensemble-support A* .

VI. *Un ensemble-image I de l'espace à $(n + 1)$ dimensions, ayant pour support un ensemble E de l'espace à n dimensions possède une enveloppe Γ d'égale mesure de I , ayant pour support une enveloppe G d'égale mesure de E ⁽¹⁵⁾.*

Considérons, en effet, une enveloppe Γ' d'égale mesure de I , construite de manière qu'elle soit mesurable B. Il y a, par définition, $\Gamma' > I$ et

$$\text{mes } \Gamma' = m_e I.$$

Désignons par G' l'ensemble-support de Γ' , qui n'est autre que sa projection dans l'espace à n dimensions. Il est par conséquent mesurable comme ensemble analytique (projection d'ensemble mesurable B).

Soit G_1 une enveloppe d'égale mesure de E ,

$$\text{mes } G_1 = m_e E; \quad G_1 > E.$$

(15) On voit directement que la proposition ne saurait être vraie pour toute enveloppe Γ d'égale mesure de I . Il suffit d'ajouter par exemple à Γ , enveloppe d'égale mesure de I , un ensemble-image J (de mesure nulle) *horizontal* (dont tous les points ont une même cote) et ayant pour support un ensemble non mesurable donné k , contenu en eG , complémentaire du support G de Γ . Alors $\Gamma' = \Gamma + J$ est aussi enveloppe d'égale mesure de I , car $\text{mes } J = c$. Mais le support G' de Γ' est tel que $G' = G + k$, ensemble non mesurable, qui ne peut plus être enveloppe d'égale mesure de l'ensemble E , support de I , mais diffère de toute enveloppe G_1 d'égale mesure de E d'un ensemble non mesurable.

Pour les définitions, cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1936, p. 79.

L'ensemble $\overline{G}_1$ est mesurable, car il y a (V)

$$\text{mes } \overline{G}_1 = (b - a) \text{ mes } G_1.$$

Il s'ensuit que $\overline{G}_1 \cdot \Gamma'$ est mesurable et il y a

$$\Gamma' > \overline{G}_1 \Gamma' > I,$$

donc

$$\text{mes } \Gamma' \geq \text{mes } \overline{G}_1 \Gamma' \geq m_e I = \text{mes } \Gamma',$$

dont il résulte que si l'on désigne par Γ l'ensemble $\overline{G}_1 \Gamma'$, il y a $\text{mes } \Gamma = m_e I$ et comme $\Gamma > I$, Γ est aussi une enveloppe d'égale mesure de I . Quant à sa projection, c'est $G_1 G'$, qui est aussi mesurable, et il y a

$$G_1 > G_1 G' > E,$$

donc

$$\text{mes } G_1 \geq \text{mes } G_1 G' \geq m_e E = \text{mes } G_1,$$

et il résulte

$$\text{mes } G_1 = \text{mes } G_1 G' = m_e E.$$

Si donc G est l'ensemble $G_1 G'$, G est la projection de Γ , et c'est une enveloppe d'égale mesure de E . C. Q. F. D.

VII. *Lorsqu'un ensemble-image I de l'espace à $(n + 1)$ dimensions ayant pour support un ensemble E de l'espace à n dimensions est de mesure intérieure non nulle sur tout sous-ensemble mesurable et de mesure non nulle de E , tout noyau χ d'égale mesure de I , a pour support un ensemble H , qui est un noyau d'égale mesure de E .*

En effet, soit H le support de χ , il est clair que $H < E$, puisque $\chi < I$.

D'autre part, il y a $\chi < \overline{H}$ et $\chi < I$, donc

$$\chi < I \overline{H} < I.$$

Il s'ensuit

$$\text{mes } \chi \leq m_i I \overline{H} \leq m_i I,$$

et comme $\text{mes } \chi = m_i I$, il résulte $m_i I \overline{H} = m_i I$.

Or

$$m_i I = m_i I \overline{H} + m_i I \cdot c\overline{H},$$

puisque les ensembles mesurables $\overline{H}$ et $c\overline{H}$ sont disjoints. Donc,

$$m_i (I \cdot c\overline{H}) = 0.$$

Il s'ensuit que l'on ne peut avoir

$$m_i(E.cH) > 0,$$

car il existerait en ce cas un ensemble mesurable $K < E.cH$, tel que $\text{mes} K > 0$, tandis que $m_i I \bar{K} \leq m_i I.c\bar{H} = 0$, I serait de mesure intérieure nulle sur K , qui est de mesure non nulle et sous-ensemble de E , ce qui contredit l'hypothèse énoncée au sujet de I . On doit donc avoir $m_i E.cH = 0$, c'est-à-dire

$$m_i(E - EH) = m_i(E - H) = m_i E - \text{mes} H = 0.$$

Donc, $m_i E = \text{mes} H$, et, comme $H < E$, H est un noyau d'égale mesure de E .

c. q. f. d.

9. Mesure de l'image d'une fonction multiforme à l'aide des fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale. — Soient I l'image de $f(P)$, fonction multiforme ou uniforme, sur un ensemble mesurable E , V l'ensemble vertical de $f(P)$ en chaque point P , $v_e(P)$ et $v_i(P)$ les deux fonctions uniformes ayant, en chaque point P , respectivement, pour valeurs $m_e V$ et $m_i V$; on les appellera *fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale extérieure et intérieure de $f(P)$* .

Désignons par $\gamma(v_e, E)$ et $\gamma(v_i, E)$ les mesures du contact extérieur en support des fonctions $v_e(P)$ et $v_i(P)$ respectivement ⁽¹⁶⁾, par B l'oscillation de la fonction $f(P)$ sur E ⁽¹⁷⁾, ensemble mesurable donné.

VIII. Une fonction multiforme ou uniforme bornée $f(P)$ étant donnée sur un ensemble mesurable E , il y a

$$m_e I \geq \int_E v_e(P) dP - B \gamma(v_e, E); \quad m_i I \leq \int_E v_i(P) dP + B \gamma(v_i, E).$$

Considérons une suite normale S de divisions s de l'intervalle-cote $[a, b]$ contenant, au sens strict, les valeurs de $f(P)$. On a q intervalles $\delta_i = [l_i, l_{i+1}]$ et $[a, b] = \Sigma \delta_i$.

Définissons les ensembles-supports

$$E'_i = E[l_i \leq v_e(P) < l_{i+1}] \quad \text{et} \quad E''_i = E[l_i < v_i(P) \leq l_{i+1}].$$

⁽¹⁶⁾ Cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1937, p. 76-78.

⁽¹⁷⁾ C'est la mesure du plus petit intervalle-cote, contenant l'ensemble des valeurs que $f(P)$ prend sur E .

Soient G'_l, G''_l des enveloppes d'égale mesure de E'_l, E''_l respectivement, I'_l, I''_l les ensembles-images des points de l ayant E'_l, E''_l pour supports, L'_l, L''_l des enveloppes d'égale mesure des ensembles-images I'_l, I''_l respectivement.

On a $l = \Sigma I'_l$ et $l = \Sigma I''_l$ et, par application des notations et résultats antérieurs ⁽¹⁸⁾, on a, compte tenu du fait que les I'_l sont disjoints deux à deux et de même les I''_l deux à deux,

$$\begin{aligned} m_e l &= \Sigma m_e I'_l - \gamma(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_l, \dots, \Gamma'_q), \\ m_i l &\leq \Sigma m_i I''_l + \gamma(\Gamma''_1, \Gamma''_2, \dots, \Gamma''_l, \dots, \Gamma''_q). \end{aligned}$$

Or, il y a, par définition, en chaque point P de E'_l ,

$$m_e V = v_e(P) \geq l_l; \quad \text{donc} \quad m_e I'_l \geq l_l m_e V_l,$$

et, en chaque point P de E''_l ,

$$m_i V = v_i(P) \leq l_{l+1}, \quad \text{donc} \quad m_i I''_l \leq l_{l+1} m_i E''_l,$$

résultats que l'on obtient par application directe de la proposition antérieure (IV).

D'autre part, chaque ensemble mesurable Γ'_l et Γ''_l peut être choisi tel qu'il possède pour support un G'_l et G''_l respectivement (VI).

L'ensemble vertical, en chaque point, tant pour Γ'_l que pour Γ''_l ne représente que des cotes, contenues en $[a, b]$ intervalle choisi de sorte que $\text{mes}[a, b] = B + \varepsilon$, où ε est aussi petit que l'on veut.

Or, il est clair ⁽¹⁹⁾ que le support de l'ensemble

$$\Gamma'_l(\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \dots + \Gamma'_{l+1})$$

est contenu en

$$G'_l(G'_1 + G'_2 + \dots + G'_{l+1}),$$

donc (III)

$$\text{mes} \Gamma'_l(\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \dots + \Gamma'_{l+1}) \leq (B + \varepsilon) \text{mes} G'_l(G'_1 + G'_2 + \dots + G'_{l+1}),$$

et, en sommant, il y a

$$\gamma(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_q) \leq (B + \varepsilon) \gamma(G'_1, G'_2, \dots, G'_q),$$

et de même

$$\gamma(\Gamma''_1, \Gamma''_2, \dots, \Gamma''_q) \leq (B + \varepsilon) \gamma(G''_1, G''_2, \dots, G''_q).$$

⁽¹⁸⁾ Cf. ALEX. FRODA, *op cit.*, 1936, p. 87-88.

⁽¹⁹⁾ Car si pM désigne la projection (support) d'un ensemble (image) quelconque M , il y a $p(M+N) = pM + pN$; $p(MN) < pMpN$ et si $M < N$, il y a $pM < pN$.

En utilisant les inégalités ci-dessus, il résulte

$$\begin{aligned} m_e I &\geq \Sigma l_t \quad m_e E'_t - (B + \varepsilon) \gamma(G'_1, G'_2, \dots, G'_q), \\ m_i I &\leq \Sigma l_{t+1} m_i E''_t + (B + \varepsilon) \gamma(G''_1, G''_2, \dots, G''_q). \end{aligned}$$

Or, si l'on choisit la suite normale S de divisions convenablement ⁽²⁰⁾ pour chacune de ces inégalités, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} \gamma(v_e, E) &= \lim \gamma(G'_1, G'_2, \dots, G'_q), \\ \gamma(v_i, E) &= \lim \gamma(G''_1, G''_2, \dots, G''_q), \end{aligned}$$

on a en même temps

$$\lim \Sigma l_t m_e E'_t = \int_E^e v_e(P) dP \quad \text{et} \quad \lim \Sigma l_{t+1} m_i E''_t = \int_E^i v_i(P) dP,$$

ce qui, finalement, justifie l'énoncé, puisque ε est aussi petit que l'on veut.

10. Voici enfin un dernier résultat.

IX. Une fonction multiforme ou uniforme bornée $f(P)$ étant donnée sur un ensemble mesurable de mesure non nulle E , il y a

$$m_e I \geq \int_E^i v_e(P) dP; \quad m_i I \leq \int_E^e v_i(P) dP,$$

où I est l'ensemble-image de $f(P)$, $v_e(P)$ et $v_i(P)$ les fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale de $f(P)$.

Soit $[a, b]$ un intervalle contenant les valeurs que $f(P)$ prend sur E , de manière que, B étant l'oscillation de $f(P)$ sur E , il y ait $\text{mes}[a, b] = B + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$.

Désignons par $\bar{E}$ l'ensemble-image ayant pour support à chaque cote de $[a, b]$, l'ensemble $E(\delta)$; par $c(P)$ une fonction complémentaire de $f(P)$, ayant, par définition, pour image I_0 , complémentaire de I par rapport à l'ensemble-image $\bar{E}$; par $w_e(P)$ et $w_i(P)$ les fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale de $c(P)$.

Considérons une suite normale S' de divisions s'_q de l'intervalle-cote $[a, b]$ en q intervalles $\delta'_t = (l'_t, l'_{t+1})$ et désignons par E'_t, E''_t les

(20) Cf. ALEX. FRODA, *op. cit.*, (II), 1937, p. 77.

ensembles-supports

$$E'_l = E[l'_l < \omega_e(P) \leq l'_{l+1}] \quad \text{et} \quad E''_l = E[l'_l < \omega_l(P) \leq l'_{l+1}].$$

Les E'_l sont disjoints deux à deux, les E''_l sont aussi disjoints deux à deux.

Soient I'_l , I''_l les ensembles-images des valeurs que $c(P)$ prend sur E'_l , respectivement sur E''_l . Il y a

$$I_0 = \Sigma I'_l = \Sigma I''_l,$$

les I'_l étant disjoints deux à deux, les I''_l sont aussi disjoints deux à deux.

On démontre la première égalité énoncée en procédant comme suit :

On attache à chaque ensemble-image I''_l un noyau d'égale mesure χ''_l , de même à I_0 on attache un noyau d'égale mesure χ . Désignons par H'_l et H les supports des χ''_l et χ respectivement.

Soit $[\alpha, \beta]$ le plus petit intervalle-cote contenant les valeurs que prend $c(P)$ sur E . Par définition de $[a, b]$, $\text{mes}[a, b] = \text{mes}[\alpha, \beta] + \varepsilon$ et chaque ensemble vertical W des valeurs que prend $c(P)$ en un point $\mathcal{Q}$ de E contient deux petits intervalles-cotes δ' et δ'' , tels que $\text{mes} \delta' + \text{mes} \delta'' = \varepsilon$ et ces intervalles ne varient pas avec le point $\mathcal{Q}$ sur E .

Il s'ensuit que si A désigne un ensemble-support mesurable, de mesure non nulle, contenu en E , il y a

$$m_i I \bar{A} > 0,$$

car si $J_{\delta'}$, $J_{\delta''}$ sont des ensembles-images constitués par les points des δ' et δ'' , il y a, en vertu de (V),

$$\text{mes} J_{\delta'} \bar{A} = \text{mes} \delta' \text{mes} A; \quad \text{mes} J_{\delta''} \bar{A} = \text{mes} \delta'' \text{mes} A,$$

donc, comme $I > J_{\delta'} + J_{\delta''}$ et que $\text{mes} A > 0$,

$$m_i I \bar{A} \geq \text{mes} J_{\delta'} \bar{A} + \text{mes} J_{\delta''} \bar{A} = \varepsilon \text{mes} A > 0.$$

La même propriété appartient aussi aux I''_l , lorsque $m_i E''_l > 0$, car si $A < E''_l$, il y a (A étant mesurable et de mesure non nulle),

$$I \bar{A} = I(\overline{E''_l A}) = I \bar{E''_l} \bar{A} = I''_l \bar{A},$$

donc, en vertu du résultat obtenu,

$$m_i I_i'' A > 0.$$

Donc, d'une part, H est aussi un noyau d'égale mesure de E , c'est-à-dire $\text{mes} H = \text{mes} E$, d'autre part, H_i'' est un noyau d'égale mesure de E_i'' , c'est-à-dire $\text{mes} H_i'' = m_i E_i''$, chaque fois que $m_i E_i'' > 0$ (VII).

Mais, lorsque $m_i E_i'' = 0$, l'on a aussi $\text{mes} H_i'' = 0$, puisque de $\chi_i'' < I_i''$ l'on déduit $H_i'' < E_i''$, de sorte qu'aussi, dans ce cas, H_i'' est un noyau d'égale mesure de E_i'' .

Soit $\bar{H}_i''$ l'ensemble-image au support H_i'' à chaque cote de $[a, b]$ (8).

Il est clair que $\chi \bar{H}_i''$ se projette suivant un ensemble-support $H H_i'' < H_i''$, tandis que $\chi \bar{H}_i'' < \chi$.

On voit que l'ensemble-support de $(\chi - \Sigma \chi \bar{H}_i'')$ est contenu en $(E - \Sigma H_i'')$.

Il en résulte (V) *a fortiori* que

$$\text{mes}(\chi - \Sigma \chi H_i'') \leq (B + \varepsilon) \text{mes}(E - \Sigma H_i'').$$

Il s'ensuit

$$\text{mes} \chi - \text{mes} \Sigma \chi H_i'' \leq (B + \varepsilon) \text{mes} E - (B + \varepsilon) \text{mes} \Sigma H_i''.$$

Or, $\text{mes} \chi = m_i I_0$, donc l'inégalité devient

$$(B + \varepsilon) \text{mes} E - m_i I_0 \geq (B + \varepsilon) \text{mes} \Sigma H_i'' - \text{mes} \Sigma(\chi \bar{H}_i'').$$

Mais il y a, d'une part,

$$m_i I_0 + m_2 I = (B + \varepsilon) \text{mes} E = \text{mes} \bar{E},$$

par suite de la définition de I_0 , puisque $(B + \varepsilon) \text{mes} E = \text{mes} \bar{E}$ (V).

D'autre part, on peut remarquer que la projection de $\chi \bar{H}_i''$ étant contenue dans l'ensemble-support H_i'' et puisque l'ensemble vertical W en chaque point de $\chi < I_0$ est tel que $m_i W \leq l'_{i+1}$, il en résulte (IV) *a fortiori* que

$$\text{mes} \chi \bar{H}_i'' \leq l'_{i+4} \text{mes} H_i'' \quad \text{et donc} \quad \text{mes} \Sigma \chi \bar{H}_i'' \leq \Sigma l'_{i+4} \text{mes} H_i''.$$

Par suite, comme

$$\text{mes} \Sigma H_i'' = \Sigma \text{mes} H_i'',$$

il y a

$$m_i I \geq (B + \varepsilon) \Sigma \text{mes} H_i'' - \Sigma l'_{i+4} \text{mes} H_i'' = \Sigma [(B + \varepsilon) - l'_{i+4}] \text{mes} H_i''.$$

Or

$$\text{mes } H'_l = m_l E'_l,$$

et l'on a

$$v_e(P) + \omega_l(P) = \text{mes}[a, b] = B + \varepsilon,$$

donc l'on peut écrire, en posant

$$l_l = (B + \varepsilon) - l_{l+1}; \quad l_{l+1} = (B + \varepsilon) - l_l;$$

$$E'_l = E[(B + \varepsilon) - l_{l+1} \leq v_e(P) < (B + \varepsilon) - l_l] = E[l_l \leq v_e(P) < l_{l+1}],$$

et, avec cette nouvelle signification de E'_l , on a

$$m_e I \geq \sum l_l m_l E'_l.$$

Or, à la suite normale S' de divisions s'_q de $[a, b]$ en intervalles $\delta'_l = (l_l, l_{l+1})$ correspond, par les égalités que l'on vient d'écrire, une suite normale S de divisions s_q de $[a, b]$ en intervalles $\delta_l = (l_l, l_{l+1})$ et, à la limite, on a

$$m_e I \geq \int_E^I v_e(P) dP.$$

C. Q. F. D.

Pour la démonstration de la seconde inégalité, on procède comme suit :

On attache à chaque ensemble-image I'_l une enveloppe d'égale mesure Γ'_l , de même à I_0 , on attache une enveloppe d'égale mesure Γ_0 . Désignons par G'_l et G les supports des Γ'_l et Γ , respectivement.

On a vu (VI), que l'on peut choisir Γ'_l et Γ enveloppes d'égale mesure des I'_l et I_0 respectivement, de manière que leurs supports G'_l et G respectivement, soient aussi des enveloppes d'égale mesure des E'_l et E , respectivement, support des I'_l et I_0 respectivement.

Nous nous appuierons aussi sur la proposition antérieure (VIII).

Puisque $I_0 = \sum I'_l$, il y a ⁽²¹⁾,

$$m_e I_0 = \sum m_e I'_l = \gamma[\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_q],$$

où, par définition,

$$\gamma(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_q) = \sum \text{mes } \Gamma'_l (\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \dots + \Gamma'_{l-1}),$$

la somme étant étendue aux valeurs de l , de 2 à q .

(21) ALEX. FRODA, *op. cit.*, 136, p. 88.

Mais le support de $\Gamma'_t (\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \dots + \Gamma'_{t-1})$ est contenu dans l'ensemble-support $G'_t (G'_1 + G'_2 + \dots + G'_{t-1})$ puisque chaque Γ'_t a G'_t pour support. Or, l'ensemble-cote des points de Γ'_t est contenu en $[a, b]$, quel que soit t . Donc, en vertu d'un résultat antérieur (V), on a, *a fortiori*,

$$\text{mes } \Gamma'_t (\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \dots + \Gamma'_t) \leq (B + \varepsilon) \text{mes } G'_t (G'_1 + G'_2 + \dots + G'_t),$$

et donc, en sommant, il y a

$$\gamma(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_t) \leq (B + \varepsilon) \gamma(G'_1, G'_2, \dots, G'_t).$$

Or, d'autre part, on a ⁽²²⁾, puisque $E = \Sigma E'_t$,

$$\text{mes } E = \Sigma m_e E'_t - \gamma(G'_1, G'_2, \dots, G'_t).$$

Il s'ensuit

$$\lambda(G'_1, G'_2, \dots, G'_t) = (\Sigma m_e E'_t) - \text{mes } E,$$

donc, avec ce qui précède,

$$\begin{aligned} m_e I_0 &\geq \Sigma m_e I'_t - (B + \varepsilon) \gamma(G'_1, G'_2, \dots, G'_t) \\ &= \Sigma m_e I'_t - (B + \varepsilon) \Sigma m_e E'_t + (B + \varepsilon) \text{mes } E. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$m_t I = (B + \varepsilon) \text{mes } E - m_e I_0 \leq (B + \varepsilon) \Sigma m_e E'_t - \Sigma m_e I'_t.$$

Or, en chaque point de E'_t , l'ensemble vertical W de $c(P)$ a la mesure extérieure $m_e W = \omega_e(P) \geq l'_t$, et, en vertu de (IV), il y a

$$m_e I'_t \geq l'_t m_e E'_t.$$

Donc

$$m_t I \leq (B + \varepsilon) \Sigma m_e E'_t - \Sigma l'_t m_e E'_t = \Sigma [(B + \varepsilon) - l'_t] m_e E'_t.$$

Posons, comme ci-dessus,

$$l_t = (B + \varepsilon) - l'_{t+1}; \quad l_{t+1} = (B + \varepsilon) - l'_t;$$

on aura, puisque

$$v_i(P) + \omega_e(P) = \text{mes}[a, b] = B + \varepsilon,$$

une nouvelle signification de E'_t

$$E'_t = E[(B + \varepsilon) - l'_{t+1} \leq v_i(P) \leq (B + \varepsilon) - l'_t] = E[l_t \leq v_i(P) < l_{t+1},$$

et

$$m_t I \leq \Sigma l_t m_e E'_t.$$

⁽²²⁾ *Ibid.*, p. 88.

Il s'ensuit qu'à la suite normale S' de divisions s'_q de $[a, b]$ en intervalles $\delta'_i = (l'_i, l'_{i+1})$ correspond, par les égalités ci-dessus, une suite normale S de divisions s_q de $[a, b]$ en q intervalles $\delta_i = (l_i, l_{i+1})$ et que l'inégalité démontrée devient, à la limite,

$$m_i I \leq \int_E^e v_i(P) dP.$$

C. Q. F. D.

11. Conséquences. — Notons quelques conséquences directes simples des deux dernières propositions.

Appelons *verticalement mesurable* une fonction multiforme ou uniforme $f(P)$ bornée, telle que l'on ait, en chaque point P , $v_e(P) = v_i(P)$ et de plus que la fonction caractéristique unique $v(P)$ de la mesurabilité verticale $v(P) = v_e(P) = v_i(P)$ soit mesurable (en support).

Il y a, avec l'intégrale prise au sens de Lebesgue,

$$m_e I \geq \int_E v(P) dP \geq m_i I.$$

Un exemple effectif du cas, où les signes d'égalité doivent être pris au sens strict, est celui de $f(P)$ définie sur l'intervalle-support $[0, 1]$ et égale à $[0, 1]$ en chaque point d'un ensemble E non mesurable et à $[-1, 0]$ en chaque point de cE .

Alors

$$v(P) = 1; \quad m_e I = m_e E + m_e cE; \quad m_i I = m_i E + m_i cE.$$

Donc

$$m_e E + m_e cE > 1 > m_i E + m_i cE,$$

ce qui est évident, E étant non mesurable.

Lorsque $f(P)$ est une fonction uniforme, $v(P) = 0$, donc *toute fonction uniforme est verticalement mesurable*. De plus, puisque $\int v(P) dP = 0$, il résulte aussi $m_i I = 0$. Donc, *la mesure intérieure de l'image d'une fonction uniforme est nulle*, même lorsqu'elle n'est pas mesurable.

D'autre part, *si l'image I d'une fonction bornée $f(P)$ multiforme ou uniforme est mesurable, tandis que $f(P)$ est verticalement mesurable, il y a*

$$\text{mes } I = \int v(P) dP.$$

Il est clair d'ailleurs que I peut être mesurable, tandis que, du moins sur un ensemble-support de mesure nulle, l'on puisse avoir des points-supports P , où $v_e(P) > v_i(P)$, car il n'y a qu'à modifier un I , donné comme image d'une fonction $f(P)$ verticalement mesurable, sur un ensemble-support de mesure nulle, ce qui n'altère pas la mesurabilité de I , $f(P)$ cessant toutefois d'être verticalement mesurable.

Appelons *verticalement quasi mesurable* une fonction multiforme ou uniforme $f(P)$, telle que les deux fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale $v_e(P)$ et $v_i(P)$ soient mesurables (en support).

Il y a

$$m_e I \geq \int v_e(P) dP \geq \int v_i(P) dP \geq m_i I.$$

On voit aisément que si l'image I d'une fonction bornée $f(P)$ multiforme ou uniforme est mesurable, tandis que $f(P)$ est verticalement quasi mesurable, il y a, sauf au plus sur un ensemble de mesure nulle de points-supports P ,

$$v_e(P) = v_i(P) \quad \text{et donc} \quad \text{mes } I = \int_E v_e(P) dP = \int_E v_i(P) dP.$$

En effet, on a, en particulier,

$$\int [v_e(P) - v_i(P)] dP \leq m_e I - m_i I,$$

et, comme $[v_e(P) - v_i(P)] \geq 0$, l'on voit que la fonction $[v_e(P) - v_i(P)]$ ne peut être différente de zéro que sur un ensemble de mesure nulle, au plus. On pourrait appeler une telle fonction *verticalement presque mesurable*, puisqu'elle possède un ensemble vertical, mesurable presque partout.

Enfin, une fonction $f(P)$ pourrait être telle que l'on ait simplement $v_e(P) = v_i(P) = v(P)$ en chaque point P , $v(P)$ étant non mesurable. Elle pourrait être appelée *également non mesurable verticalement*.

Tel serait le cas de $f(P)$ égale verticalement à $[0, 1]$ en chaque point d'un ensemble non mesurable E , nulle en cE . La fonction $v(P)$ est égale à 1 sur E ; à zéro sur cE , elle est non mesurable.