Bulletin de la S. M. F.

S. Zaremba

# Sur une propriété générale des fonctions harmoniques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 67 (1939), p. 171-176 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S171_0>

Journée du 10 Juillet 1937.

Réun. intern. Math. (1937, Paris)
*Bull. Soc. math. France*,
Suppl. 1939, p. 171 à 176.

# SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE
## DES
# FONCTIONS HARMONIQUES

Par M. S. ZAREMBA.

L'expression « fonction harmonique » n'est pas toujours employée dans un même sens; aussi, pour éviter tout malentendu, je préciserai le sens que je vais lui attribuer dans cette conférence en adoptant la convention suivante :

*L'assertion qu'une fonction $u$ de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une fonction harmonique, définie dans un certain domaine* (D), *exprime qu'en tout point intérieur à ce domaine, chacune des dérivées qui entre dans l'expression* $\Delta(u)$, *définie par la formule*

$$\Delta(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

*a une valeur déterminée et que l'on a*

$$\Delta(u) = 0 \tag{2}$$

*en tout point intérieur au domaine* (D).

Notons dès maintenant que, dans la suite, nous n'envisagerons que des fonctions harmoniques de variables réelles.

On sait depuis longtemps que, sous certaines conditions de régularité, toute fonction harmonique dans un certain domaine est, dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur de ce domaine, une fonction régulièrement analytique des variables dont elle dépend.

La démonstration donnée ordinairement de ce théorème repose sur le théorème de Green et implique, en dehors de l'hypothèse que la fonction considérée $u$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est continue, encore celle que les dérivées qui entrent dans l'équation (2) satisfont à quelque condition de régularité; le plus souvent on admet que ces dérivées sont continues à l'intérieur d'un domaine où la fonction considérée est définie.

Pour atteindre le but que nous avons en vue et qui consiste à déterminer les conditions de régularité les moins restrictives assurant l'analyticité d'une fonction harmonique, définie dans un certain domaine, à l'intérieur de celui-ci, commençons par remarquer que le simple fait que l'équation (2) est satisfaite à l'intérieur d'un certain domaine n'assure nullement la continuité de la fonction $u$ à l'intérieur de ce domaine; c'est ce que prouve l'exemple très simple suivant : soit $u$ une fonction des deux variables réelles $x_1$ et $x_2$ définie, pour tout système de valeurs de ces variables vérifiant l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 > 0,$$

au moyen de la formule suivante :

$$u = \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

et se réduisant à zéro pour

$$x_1 = x_2 = 0.$$

On aura alors dans tout le plan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

et pourtant, pour $x_1 = x_2 = 0$, la fonction $u$ sera discontinue.

Il résulte de ce qui précède que, pour être assuré qu'une fonction $u$, harmonique à l'intérieur d'un certain domaine (D), est régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur de ce domaine, il faut admettre avec nous qu'elle est continue à l'intérieur du domaine considéré ou adopter quelque hypothèse équivalente.

Cela étant, il suffira, pour atteindre le but formulé plus haut, d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Toute fonction u des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, harmonique et continue à l'intérieur d'un certain domaine, est régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine considéré.*

Ce théorème est, comme l'a fait voir M. Wilkosz (1), un corollaire immédiat d'un théorème que j'avais démontré dès 1904 (2).

Les résultats que je vais exposer ne sont donc pas inédits, mais il m'a semblé qu'ils méritaient d'être rappelés.

Voici d'abord la définition d'un symbole qui nous sera très utile :

L'expression $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ représentant une fonction définie sans ambiguïté des variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous définirons le symbole $\Delta[f(x_1, x_2, \ldots, x_n), h]$ que nous avons en vue au moyen de la formule suivante :

$$(3)\quad \Delta[f(x_1, x_2, \ldots, x_n), h] = \frac{\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{ f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_k - h, \ldots, x_n) \} \\ \quad - 2n f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{array}\right\}}{h^2}.$$

L'expression

$$(4)\qquad \lim_{h \to 0} [u(x_1, x_2, \ldots, x_n), h]$$

peut représenter une fonction continue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sans que les dérivées secondes de la fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ existent.

En effet, dans le mémoire cité il y a un instant, j'ai démontré le théorème suivant :

L'espace euclidien étant rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $(x_1, x_2, x_3)$, désignons par $u(x_1, x_2, x_3)$ le potentiel newtonien dérivant d'une masse de densité $\mu(x_1, x_2, x_3)$ remplissant un domaine borné et mesurable (D). Si, en un point $(a_1, a_2, a_3)$, situé à l'intérieur du domaine (D), la fonction $\mu((x_1, x_2, x_3)$ est continue, alors on a

$$\lim_{n \to 0} [u(a_1, a_2, a_3), h] = -4\pi\mu(x_1, x_2, x_3).$$

---

(1) *C. R. des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 174, 1922, p. 435.

(2) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XIX, 1905, p. 140.

Or, on sait que la simple continuité de la densité de la masse de laquelle dérive le potentiel newtonien que l'on considère, n'assure pas l'existence des dérivées secondes de ce potentiel. Donc l'assertion énoncée plus haut au sujet de l'expression (4) est bien exacte. Mais lorsqu'une fonction $u(x_1, x_2, x_3)$ admet des dérivées secondes, on a le théorème suivant, dû à M. Wilkosz.

Théorème II. — *Si en un point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ situé à l'intérieur du domaine où une fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est définie, l'expression $\Delta(u)$, définie par la formule* (1), *a une valeur finie, bien déterminée, on a*

$$(5) \qquad \lim_{h \to 0} [u(a_1, a_2, \ldots, a_n), h] = \{\Delta(u)\}_{[x_i = a_i, \ (i=1,2,\ldots,n)]}.$$

Au cas où l'on admettrait la continuité des dérivées qui entrent dans l'expression (1) la démonstration de l'égalité précédente résulterait des propositions qui se trouvent dans tous les manuels d'Analyse mathématique, mais si l'on veut se borner à admettre, comme nous allons le faire, la simple existence des dérivées qui entrent dans l'expression $\Delta(u)$, on est obligé de s'appuyer sur un théorème dû à Peano et qui, ordinairement, n'est malheureusement pas mentionné dans les traités d'Analyse. Voici ce théorème :

Soit $f(x)$ une fonction bien déterminée dans un intervalle $(a, b)$, admettant à l'intérieur de cet intervalle des dérivées déterminées jusqu'à un certain ordre $p$.

S'il arrive que, pour une valeur particulière $x_0$ de $x$, située à l'intérieur de l'intervalle $(a, b)$ la dérivée $f^{(p+1)}(x_0)$ d'ordre $p+1$ de la fonction $f(x)$ ait une valeur finie, bien déterminée, on a la formule suivante :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{k}(x_0)}{\Gamma(k+1)} h^k + \left\{ \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{\Gamma(p+2)} + \varepsilon \right\} h^{p+1},$$

où $\varepsilon$ est un nombre qui tend vers zéro avec $h$.

En s'appuyant sur le théorème précédent, on retrouve avec la plus grande facilité la démonstration de M. Wilkosz du théorème II.

Considérons maintenant une fonction continue $u(x_1, x_2, x_n)$, définie à l'intérieur d'un domaine (D) et vérifiant en tout point $(x_1, x_2, x_n)$ situé à l'intérieur de ce domaine, l'équation suivante :

$$\lim_{h \to 0} [u(x_1, x_2, \ldots, x_n), h] = 0.$$

Théorème III. — *L'hypothèse précédente étant vérifiée, la fonction* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est une fonction régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine* (D) *et y satisfait à l'équation*

$$\Delta(u) = 0.$$

En effet [1], les hypothèses du théorème étant admises, soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point quelconque situé à l'intérieur du domaine (D). Désignons par R un nombre positif assez petit pour que toute l'hypersphère (S), définie par la relation

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \leqq R^2,$$

soit située, avec tous ses points frontières, à l'intérieur du domaine (D). Il existera une fonction $v$ continue à l'intérieur et sur la frontière de l'hypersphère (S), prenant sur la frontière de cette hypersphère les mêmes valeurs que la fonction $u$ et étant harmonique et régulièrement analytique à l'intérieur de l'hypersphère considérée.

D'autre part, il existera une fonction continue $w$ s'annulant sur la frontière de l'hypersphère considérée, régulièrement analytique à l'intérieur de cette hypersphère et y vérifiant l'équation

$$\Delta w = 1.$$

Désignons par $\eta$ un nombre vérifiant l'équation

$$\eta^2 = 1,$$

par $t$ une indéterminée réelle et posons

$$\psi = \eta(u - v) + t^2 w.$$

En vertu du théorème II, nous aurons

$$\lim_{h \to 0} \Delta(\psi, h) = t^2,$$

en tout point intérieur à l'hypersphère (S), quel que soit le signe du nombre $\eta$.

---

[1] Je reproduis la démonstration que j'ai donnée dans le mémoire cité plus haut.

Par conséquent, que l'on ait $\eta = +1$ ou $\eta = -1$, la fonction $\psi$ ne pourra pas avoir un maximum à l'intérieur de l'hypersphère (S), et comme d'autre part la fonction continue $u - v$ s'annule sur la frontière de cette hypersphère elle satisfera à l'intérieur de celle-ci à la relation

$$|u - v| \leqq t^2.$$

Mais cette relation aura lieu si petite que soit la valeur réelle attribuée au nombre $t$.

Par conséquent, dans toute l'hypersphère (S), on aura

$$u - v = 0.$$

Notre théorème est donc démontré. Actuellement, comme l'a remarqué M. Wilkosz, il est très aisé d'établir le théorème I. En effet, les notations et l'hypothèse de ce théorème étant conservées, on aura, en vertu du théorème II,

$$\lim_{n \to 0} [u(x_1, x_2, \ldots, x_n), h] = \Delta(u),$$

et comme, par hypothèse, on a en tout point situé à l'intérieur du domaine considéré

$$\Delta(u) = 0,$$

il résulte du théorèmel II, que la fonction $u$ sera, comme il s'agissait de l'établir, régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur de ce domaine.

Pour terminer, remarquons qu'en s'appuyant sur le théorème précédent on démontre aisément qu'il existe, en dehors de l'équation des fonctions harmoniques, d'autres équations aux dérivées partielles telles que la simple continuité d'une intégrale d'une de ces équations suffise à en assurer l'analyticité régulière dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine où elle satisfait à l'équation considérée. Telles sont par exemple les équations de la formule suivante :

$$\Delta(u) + f(x, y, z)\, u = 0,$$

où $f(x, y, z)$ est une fonction régulièrement analytique dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine où l'on considère cette équation.

S. Zaremba.