BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur la transformation des fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 72-78
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__72_0>

Sur la transformation des fonctions elliptiques;
par M. Laguerre.

(Séance du 21 novembre 1877.)

I. — Considérations préliminaires.

1. En désignant par y_1 une quantité égale à l'unité et introduite pour rendre les formules homogènes, soit

$$F(x_1, y_1) = Ax_1^4 + 4Bx_1^3 y_1 + 6Cx_1^2 y_1^2 + 4Dx_1 y_1^3 + Ey_1^4$$

un polynôme du quatrième degré en x_1.

Soit, de plus,

$$x_1 = \frac{X}{Y}$$

une intégrale quelconque de l'équation

$$\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = dv, \tag{1}$$

X et Y désignant des fonctions de v dont l'une peut être choisie arbitrairement.

En dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à la variable v, et en faisant, pour abréger,

$$T = YX' - XY',$$

l'équation précédente devient

$$F(X, Y) = T^2. \tag{2}$$

On a évidemment

$$T' = YX'' - XY'';$$

je poserai, en outre,

$$\Theta = Y'X'' - X'Y'';$$

en sorte que, des relations précédentes, on déduit

$$\left\{\begin{aligned} X'T' &= X\Theta + X''T, \\ Y'T' &= Y\Theta + Y''T. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

En employant une notation bien connue, je poserai

$$F_{11} = \frac{1}{12}\frac{d^2F(X,Y)}{dX^2}, \quad F_{12} = \frac{1}{12}\frac{d^2F(X,Y)}{dX\,dY}, \quad F_{22} = \frac{1}{12}\frac{d^2F(X,Y)}{dY^2};$$

en vertu de la propriété fondamentale des polynômes homogènes, l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$X^2F_{11} + 2XY\,F_{12} + Y^2F_{22} = T^2.$$

A cette relation nous pouvons joindre les deux suivantes, que l'on obtient en prenant ses deux premières dérivées par rapport à ν :

$$\begin{aligned} &X'X.F_{11} + (XY' + YX')F_{12} + Y'Y.F_{22} = \frac{TT'}{2}, \\ &(XX'' + 3X'^2)F_{11} + (XY'' + YX'' + 6X'Y')F_{12} \\ &\qquad + (YY'' + 3Y'^2)F_{22} = \frac{TT'' + T'^2}{2}. \end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à F_{11}, F_{12} et F_{22}, il vient

$$\begin{aligned} 3T^3F_{11} &= Y^2\frac{T^2T''}{2} - 3YY'T^2T' + (3Y'^2T + Y^2\Theta)T^2, \\ 3T^3F_{12} &= -XY\frac{T^2T''}{2} + \frac{3}{2}(YX' + XY')T^2T' - (3X'Y'T' + XY\Theta)T^2, \\ 3T^3F_{22} &= X^2\frac{T^2T''}{2} - 3XX'T^2T' + (3X'^2T + X^2\Theta)T^2. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces équations par ξ^2, la deuxième par $2\xi\eta$, la troisième par η^2, ξ et η désignant des quantités arbitraires, et faisons la somme des résultats obtenus : il viendra

$$\begin{aligned} &3T^3(\xi^2F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2F_{22}) \\ &\quad = T^2\left(\frac{T'' + 2\Theta}{2}\right)(Y\xi - X\eta)^2 \\ &\qquad - 3T^2T'(Y\xi - X\eta)(Y'\xi - X'\eta) + 3T^3(Y'\xi - X'\eta)^2, \end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant $T'(Y'\xi - X'\eta)$ par sa valeur

$$\Theta(Y\xi - X\eta) + T(Y''\xi - X''\eta),$$

que l'on déduit des équations (3),

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22} \\ &\quad = (Y\xi - X\eta)^2 \left(\frac{T'' - 4\Theta}{6T}\right) \\ &\quad + (Y'\xi - X'\eta)^2 - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{aligned}\right.$$

2. Posons, pour abréger,

$$(5)\qquad \frac{T'' - 4\Theta}{6T} = \frac{YX''' - XY''' - 3(Y'X'' - X'Y'')}{6(YX' - XY')} = \varphi.$$

L'équation (4) deviendra

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{12} = \varphi(Y\xi - X\eta)^2 + (Y'\xi - X'\eta)^2 \\ - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{aligned}\right.$$

Comme dans cette formule ξ et η sont arbitraires, elle tient lieu des trois relations suivantes :

$$(6)'\quad \left\{\begin{aligned} F_{11} &= AX^2 + 2BXY + CY^2 = \varphi Y^2 + Y'^2 - YY'', \\ 2F_{12} &= 2BX^2 + 4CXY + 2DY^2 \\ &= -2\varphi XY + YX'' + XY'' - 2X'Y', \\ F_{22} &= CX^2 + 2DXY + EY^2 = \varphi X^2 + X'^2 - XX'' \quad (^1). \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont une conséquence immédiate de la relation (2); réciproquement, si, φ désignant une fonction arbitraire de ν, on détermine des fonctions X et Y satisfaisant aux trois relations (6)′, on voit que $y_1 = \dfrac{X}{Y}$ est une intégrale de l'équation (1).

En faisant, en effet, dans la relation (6),

$$\xi = X \quad \text{et} \quad \eta = Y,$$

il vient

$$F = (Y'X - XY')^2.$$

L'intégration de l'équation (1) est donc ramenée à l'intégration du système d'équations simultané (6)′, dans lequel φ est une fonction

(1) Sur ces formules, voir Eisenstein, *Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln* (*Mathematische Abhandlungen*, p. 167).

arbitraire de v, et à cette équation on peut adjoindre l'équation (5), où, comme on le voit, n'entrent pas les coefficients du polynôme F.

En particulier, si φ est une constante, les fonctions X et Y, satisfaisant aux relations (6)', donnent les fonctions Θ de Jacobi et les fonctions Al de M. Weierstrass.

II. — Formules de Jacobi.

3. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(7)\qquad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où $f(x,y)$ désigne un polynôme quelconque du quatrième degré en x, la variable y étant introduite pour rendre l'expression homogène et étant égale à l'unité.

Soit

$$x_1 = \frac{X}{Y}$$

une intégrale de cette équation, X et Y étant des fonctions entières de x; soit, de plus, dv la valeur commune des deux membres de l'égalité (7).

Si, en vertu de l'égalité

$$(7')\qquad \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}} = dv,$$

on suppose X et Y exprimés en fonction de v, on voit que ces fonctions satisfont au système d'équations (5) et (6).

Je transformerai ces équations, en supposant que X et Y sont exprimés en fonction de x. A cet effet, en introduisant les dérivées prises par rapport à x, nous aurons, en vertu de la relation (7)',

$$X' = \frac{dX}{dx}\sqrt{f},\quad X'' = \frac{d^2X}{dx^2}f + \frac{1}{2}\frac{dX}{dx}\frac{df}{dx},$$

$$X''' = \frac{d^3X}{dx^3}f\sqrt{f} + \frac{3}{2}\frac{d^2X}{dx^2}\frac{df}{dx}\sqrt{f} + \frac{1}{2}\frac{dX}{dx}\frac{d^2f}{dx^2}\sqrt{f},$$

$$Y' = \frac{dY}{dx}\sqrt{f},\quad Y'' = \frac{d^2Y}{dx^2}f + \frac{1}{2}\frac{dY}{dx}\frac{df}{dx},$$

$$Y''' = \frac{d^3Y}{dx^3}f\sqrt{f} + \frac{3}{2}\frac{d^2Y}{dx^2}\frac{df}{dx} \quad + \frac{1}{2}\frac{dY}{dx}\frac{d^2f}{dx^2}\sqrt{f}.$$

En remplaçant X', X'', X''', Y', Y'' et Y''' par ces valeurs dans les équations (5) et (6), il viendra

$$(8)\quad \varphi = \frac{\left[\begin{array}{l}\left(Y\frac{d^3X}{dx^3} - 3\frac{dY}{dx}\frac{d^2X}{dx^2} + 3\frac{d^2Y}{dx^2}\frac{dX}{dx} - X\frac{d^3Y}{dx^3}\right)f \\ \quad + \frac{3}{2}\left(Y\frac{d^2X}{dx^2} - X\frac{d^2Y}{dx^2}\right)\frac{df}{dx}\end{array}\right]}{6\left(Y\frac{dX}{dx} - X\frac{dY}{dx}\right)} + \frac{1}{12}\frac{d^2f}{dx^2}$$

et

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \xi^2F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2F_{22} = \varphi(\xi Y - \eta X)^2 &+ f\left(\xi\frac{dY}{dx} - \eta\frac{dX}{dx}\right)^2 \\ &- f(\xi Y - \eta X)\left(\xi\frac{d^2Y}{dx^2} - \eta\frac{d^2X}{dx^2}\right) \\ &- \frac{1}{2}\frac{df}{dx}(\xi Y - \eta X)\left(\xi\frac{dY}{dx} - \eta\frac{dX}{dx}\right). \end{aligned}\right.$$

Le point important dans la proposition due à Jacobi consiste en ce que φ est un polynôme du second degré en x. Pour l'établir, je remarquerai que la relation précédente a lieu, quelles que soient les quantités ξ et η; d'ailleurs, X et Y étant premiers entre eux, on pourra prendre pour ξ et η des polynômes entiers, tels que

$$\xi Y - \eta X = 1.$$

L'équation (9) montre immédiatement que φ est aussi un polynôme entier, et la formule (8), que ce polynôme est du second degré.

III. — Transformation des formules de Jacobi.

4. Pour transformer les relations précédemment obtenues, je remarquerai que, si α, β, γ et δ sont des constantes arbitraires reliées par la relation

$$(10)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

l'équation (9) doit encore être identiquement satisfaite, pour une détermination convenable du polynôme φ, par les polynômes que l'on obtient en remplaçant, dans X, Y, F et f, x par $\alpha x_0 + \gamma y_0$ et y par $\beta x_0 + \delta y_0$, pourvu qu'on rétablisse l'homogénéité de la formule, en multipliant le premier membre par y_0^2.

Désignons, en général, par (W) ce que devient une fonction quelconque W de x et de y, quand on y effectue la substitution indiquée; il est clair que l'on aura

$$\frac{d(\mathrm{X})}{dx_0} = \alpha\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}\right),$$

$$\frac{d^2(\mathrm{X})}{dx_0^2} = \alpha^2\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) + 2\alpha\beta\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx\,dy}\right) + \beta^2\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2}\right),$$

et des relations analogues relativement à $\dfrac{d(\mathrm{Y})}{dx_0}$, $\dfrac{d^2(\mathrm{Y})}{dx_0}$ et $\dfrac{d(f)}{dx_0}$.

Imaginons maintenant que, cette substitution effectuée dans la relation (9), on remplace de nouveau $\alpha x_0 + \gamma y_0$ par x et $\beta x_0 + \delta y_0$ par y; on a alors, en vertu de l'équation (10),

$$y_0 = \alpha y - \beta x;$$

φ se change en un polynôme Φ homogène et du second degré par rapport à x et y, homogène et du second degré par rapport à α et β.

Si, de plus, on pose, pour abréger,

$$\mathrm{X}^{(1)} = \alpha\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \beta\frac{d\mathrm{X}}{dy},$$

$$\mathrm{Y}^{(1)} = \alpha\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \beta\frac{d\mathrm{Y}}{dy},$$

$$f^{(1)} = \alpha\frac{df}{dx} + \beta\frac{df}{dy};$$

$$\mathrm{X}^{(2)} = \alpha^2\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} + 2\alpha\beta\frac{d^2\mathrm{X}}{dx\,dy} + \beta^2\frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2},$$

$$\mathrm{Y}^{(2)} = \alpha^2\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + 2\alpha\beta\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx\,dy} + \beta^2\frac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2}, \quad \ldots,$$

l'équation (9) deviendra

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha y - \beta x)^2(\xi^2\mathrm{F}_{11} + 2\xi\eta\mathrm{F}_{12} + \eta^2\mathrm{F}_{22}) \\ &\quad = \Phi(\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X})^2 + f[\xi\mathrm{Y}^{(1)} - \eta\mathrm{X}^{(1)}]^2 \\ &\quad\quad - f(\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X})[\xi\mathrm{Y}^{(2)} - \eta\mathrm{X}^{(2)}] \\ &\quad\quad - \frac{1}{2}f^{(1)}(\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{Y})[\xi\mathrm{Y}^{(1)} - \eta\mathrm{X}^{(1)}], \end{aligned}\right.$$

équation qui doit être identiquement satisfaite, quels que soient α, β, ξ et η, si $x_1 = \frac{X}{Y}$ est une intégrale rationnelle de l'équation différentielle

$$(7) \qquad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

5. Pour déterminer la forme du polynôme Φ, je remarque que, ce polynôme étant homogène et du second degré par rapport à x et y et par rapport à α et β, on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \alpha^2 W_{11} + 2\alpha\beta W_{12} + \beta^2 W_{22} \\ & + (\alpha y - \beta x)(\alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2) + k(\alpha y - \beta x)^2,\end{aligned}$$

W désignant un polynôme inconnu, homogène et du quatrième degré en x et y, Ω un polynôme inconnu homogène et du second degré par rapport aux mêmes variables, et k une quantité constante.

Faisons maintenant, dans l'identité (11),

$$\alpha = x + \rho\alpha' \quad \text{et} \quad \beta = y + \rho\beta' ;$$

le premier membre de cette identité devient divisible par ρ^2; le terme constant et le terme en ρ doivent donc manquer dans le développement du second membre. En faisant ce développement, on trouve facilement

$$W = mf,$$

m désignant le degré de la transformation, c'est-à-dire le degré des deux polynômes X et Y, puis $\Omega = 0$.

Le polynôme Φ est donc complétement déterminé, sauf le facteur constant k, et l'on a

$$(12) \qquad \Phi = m(\alpha^2 f_{11} + 2\alpha\beta f_{12} + \beta^2 f_{22}) + k(\alpha y - \beta x)^2.$$