

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

## **Sur la transformation des fonctions elliptiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 6 (1878), p. 72-78

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1878\\_\\_6\\_\\_72\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__72_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur la transformation des fonctions elliptiques;*

par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 novembre 1877.)

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. En désignant par  $\gamma_1$  une quantité égale à l'unité et introduite pour rendre les formules homogènes, soit

$$F(x_1, \gamma_1) = Ax_1^4 + 4Bx_1^3\gamma_1 + 6Cx_1^2\gamma_1^2 + 4Dx_1\gamma_1^3 + E\gamma_1^4$$

un polynôme du quatrième degré en  $x_1$ .

Soit, de plus,

$$x_1 = \frac{X}{Y}$$

une intégrale quelconque de l'équation

$$(1) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, \gamma_1)}} = d\nu,$$

$X$  et  $Y$  désignant des fonctions de  $\nu$  dont l'une peut être choisie arbitrairement.

En dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à la variable  $\nu$ , et en faisant, pour abréger,

$$T = YX' - XY',$$

l'équation précédente devient

$$(2) \quad F(X, Y) = T^2.$$

On a évidemment

$$T' = YX'' - XY'';$$

je poserai, en outre,

$$\Theta = Y'X'' - X'Y'';$$

en sorte que, des relations précédentes, on déduit

$$(3) \quad \begin{cases} X'T' = X\Theta + X''T, \\ Y'T' = Y\Theta + Y''T. \end{cases}$$

En employant une notation bien connue, je poserai

$$F_{11} = \frac{1}{12} \frac{d^2 F(X, Y)}{dX^2}, \quad F_{12} = \frac{1}{12} \frac{d^2 F(X, Y)}{dX dY}, \quad F_{22} = \frac{1}{12} \frac{d^2 F(X, Y)}{dY^2};$$

en vertu de la propriété fondamentale des polynômes homogènes, l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$X^2 F_{11} + 2XY F_{12} + Y^2 F_{22} = T^2.$$

A cette relation nous pouvons joindre les deux suivantes, que l'on obtient en prenant ses deux premières dérivées par rapport à  $\nu$  :

$$\begin{aligned} X'X.F_{11} + (XY' + YX')F_{12} + Y'Y.F_{22} &= \frac{TT'}{2}, \\ (XX'' + 3X'^2)F_{11} + (XY'' + YX'' + 6X'Y')F_{12} \\ &+ (YY'' + 3Y'^2)F_{22} = \frac{TT'' + T'^2}{2}. \end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à  $F_{11}$ ,  $F_{12}$  et  $F_{22}$ , il vient

$$\begin{aligned} 3T^2 F_{11} &= Y^2 \frac{T^2 T''}{2} - 3YY'T^2 T' + (3Y'^2 T + Y^2 \Theta) T^2, \\ 3T^2 F_{12} &= -XY \frac{T^2 T''}{2} + \frac{3}{2} (YX' + XY') T^2 T' - (3X'Y'T + XY\Theta) T^2, \\ 3T^2 F_{22} &= X^2 \frac{T^2 T''}{2} - 3XX'T^2 T' + (3X'^2 T + X^2 \Theta) T^2. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces équations par  $\xi^2$ , la deuxième par  $2\xi\eta$ , la troisième par  $\eta^2$ ,  $\xi$  et  $\eta$  désignant des quantités arbitraires, et faisons la somme des résultats obtenus : il viendra

$$\begin{aligned} &3T^2 (\xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22}) \\ &= T^2 \left( \frac{T'' + 2\Theta}{2} \right) (Y\xi - X\eta)^2 \\ &\quad - 3T^2 T' (Y\xi - X\eta) (Y'\xi - X'\eta) + 3T^2 (Y'\xi - X'\eta)^2. \end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant  $T'(Y'\xi - X'\eta)$  par sa valeur

$$\Theta(Y\xi - X\eta) + T(Y''\xi - X''\eta),$$

que l'on déduit des équations (3),

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22} \\ & = (Y\xi - X\eta)^2 \left( \frac{T'' - 4\Theta}{6T} \right) \\ & \quad + (Y'\xi - X'\eta)^2 - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{aligned} \right.$$

2. Posons, pour abréger,

$$(5) \quad \frac{T'' - 4\Theta}{6T} = \frac{YX'' - XY'' - 3(Y'X'' - X'Y'')}{6(YX' - XY')} = \varphi.$$

L'équation (4) deviendra

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22} = \varphi(Y\xi - X\eta)^2 + (Y'\xi - X'\eta)^2 \\ & \quad - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{aligned} \right.$$

Comme dans cette formule  $\xi$  et  $\eta$  sont arbitraires, elle tient lieu des trois relations suivantes :

$$(6)' \quad \left\{ \begin{aligned} & F_{11} = AX^2 + 2BXY + CY^2 = \varphi Y^2 + Y'^2 - YY'', \\ & 2F_{12} = 2BX^2 + 4CXY + 2DY^2 \\ & \quad = -2\varphi XY + YX'' + XY'' - 2X'Y', \\ & F_{22} = CX^2 + 2DXY + EY^2 = \varphi X^2 + X'^2 - XX'' \quad (1). \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont une conséquence immédiate de la relation (2); réciproquement, si,  $\varphi$  désignant une fonction arbitraire de  $v$ , on détermine des fonctions  $X$  et  $Y$  satisfaisant aux trois relations (6)', on voit que  $y_1 = \frac{X}{Y}$  est une intégrale de l'équation (1).

En faisant, en effet, dans la relation (6),

$$\xi = X \quad \text{et} \quad \eta = Y,$$

il vient

$$F = (Y'X - XY')^2.$$

L'intégration de l'équation (1) est donc ramenée à l'intégration du système d'équations simultanées (6)', dans lequel  $\varphi$  est une fonction

---

(1) Sur ces formules, voir EISENSTEIN, *Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln* (*Mathematische Abhandlungen*, p. 167).

arbitraire de  $\nu$ , et à cette équation on peut adjoindre l'équation (5), où, comme on le voit, n'entrent pas les coefficients du polynôme  $F$ .

En particulier, si  $\phi$  est une constante, les fonctions  $X$  et  $Y$ , satisfaisant aux relations (6)', donnent les fonctions  $\Theta$  de Jacobi et les fonctions  $Al$  de M. Weierstrass.

## II. — FORMULES DE JACOBI.

3. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(7) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où  $f(x, y)$  désigne un polynôme quelconque du quatrième degré en  $x$ , la variable  $y$  étant introduite pour rendre l'expression homogène et étant égale à l'unité.

Soit

$$x_1 = \frac{X}{Y}$$

une intégrale de cette équation,  $X$  et  $Y$  étant des fonctions entières de  $x$ ; soit, de plus,  $d\nu$  la valeur commune des deux membres de l'égalité (7).

Si, en vertu de l'égalité

$$(7') \quad \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}} = d\nu,$$

on suppose  $X$  et  $Y$  exprimés en fonction de  $\nu$ , on voit que ces fonctions satisfont au système d'équations (5) et (6).

Je transformerai ces équations, en supposant que  $X$  et  $Y$  sont exprimés en fonction de  $x$ . A cet effet, en introduisant les dérivées prises par rapport à  $x$ , nous aurons, en vertu de la relation (7)',

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dX}{dx} \sqrt{f}, & X'' &= \frac{d^2X}{dx^2} f + \frac{1}{2} \frac{dX}{dx} \frac{df}{dx}, \\ X''' &= \frac{d^3X}{dx^3} f \sqrt{f} + \frac{3}{2} \frac{d^2X}{dx^2} \frac{df}{dx} \sqrt{f} + \frac{1}{2} \frac{dX}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \sqrt{f}, \\ Y' &= \frac{dY}{dx} \sqrt{f}, & Y'' &= \frac{d^2Y}{dx^2} f + \frac{1}{2} \frac{dY}{dx} \frac{df}{dx}, \\ Y''' &= \frac{d^3Y}{dx^3} f \sqrt{f} + \frac{3}{2} \frac{d^2Y}{dx^2} \frac{df}{dx} \sqrt{f} + \frac{1}{2} \frac{dY}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \sqrt{f}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $X', X'', X''', Y', Y''$  et  $Y'''$  par ces valeurs dans les équations (5) et (6), il viendra

$$(8) \quad \varphi = \frac{\left[ \left( Y \frac{d^3 X}{dx^3} - 3 \frac{dY}{dx} \frac{d^2 X}{dx^2} + 3 \frac{d^2 Y}{dx^2} \frac{dX}{dx} - X \frac{d^3 Y}{dx^3} \right) f \right.}{6 \left( Y \frac{d^2 X}{dx^2} - X \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)} + \frac{1}{12} \frac{d^2 f}{dx^2}$$

et

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22} &= \varphi (\xi Y - \eta X)^2 + f \left( \xi \frac{dY}{dx} - \eta \frac{dX}{dx} \right)^2 \\ &\quad - f (\xi Y - \eta X) \left( \xi \frac{d^2 Y}{dx^2} - \eta \frac{d^2 X}{dx^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{df}{dx} (\xi Y - \eta X) \left( \xi \frac{dY}{dx} - \eta \frac{dX}{dx} \right). \end{aligned} \right.$$

Le point important dans la proposition due à Jacobi consiste en ce que  $\varphi$  est un polynôme du second degré en  $x$ . Pour l'établir, je remarquerai que la relation précédente a lieu, quelles que soient les quantités  $\xi$  et  $\eta$ ; d'ailleurs,  $X$  et  $Y$  étant premiers entre eux, on pourra prendre pour  $\xi$  et  $\eta$  des polynômes entiers, tels que

$$\xi Y - \eta X = 1.$$

L'équation (9) montre immédiatement que  $\varphi$  est aussi un polynôme entier, et la formule (8), que ce polynôme est du second degré.

### III. — TRANSFORMATION DES FORMULES DE JACOBI.

4. Pour transformer les relations précédemment obtenues, je remarquerai que, si  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des constantes arbitraires reliées par la relation

$$(10) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

l'équation (9) doit encore être identiquement satisfaite, pour une détermination convenable du polynôme  $\varphi$ , par les polynômes que l'on obtient en remplaçant, dans  $X, Y, F$  et  $f$ ,  $x$  par  $\alpha x_0 + \gamma y_0$  et  $y$  par  $\beta x_0 + \delta y_0$ , pourvu qu'on rétablisse l'homogénéité de la formule, en multipliant le premier membre par  $\gamma^2$ .

Désignons, en général, par (W) ce que devient une fonction quelconque W de  $x$  et de  $y$ , quand on y effectue la substitution indiquée; il est clair que l'on aura

$$\begin{aligned}\frac{d(X)}{dx_0} &= \alpha \left( \frac{dX}{dx} \right) + \beta \left( \frac{dX}{dy} \right), \\ \frac{d^2(X)}{dx_0^2} &= \alpha^2 \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right) + 2\alpha\beta \left( \frac{d^2 X}{dx dy} \right) + \beta^2 \left( \frac{d^2 X}{dy^2} \right),\end{aligned}$$

et des relations analogues relativement à  $\frac{d(Y)}{dx_0}$ ,  $\frac{d^2(Y)}{dx_0^2}$  et  $\frac{d(f)}{dx_0}$ .

Imaginons maintenant que, cette substitution effectuée dans la relation (9), on remplace de nouveau  $\alpha x_0 + \gamma y_0$  par  $x$  et  $\beta x_0 + \delta y_0$  par  $y$ ; on a alors, en vertu de l'équation (10),

$$y_0 = \alpha y - \beta x;$$

$\varphi$  se change en un polynôme  $\Phi$  homogène et du second degré par rapport à  $x$  et  $y$ , homogène et du second degré par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ .

Si, de plus, on pose, pour abrégé,

$$\begin{aligned}X^{(1)} &= \alpha \frac{dX}{dx} + \beta \frac{dX}{dy}, \\ Y^{(1)} &= \alpha \frac{dY}{dx} + \beta \frac{dY}{dy}, \\ f^{(1)} &= \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy}; \\ X^{(2)} &= \alpha^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2 X}{dx dy} + \beta^2 \frac{d^2 X}{dy^2}, \\ Y^{(2)} &= \alpha^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2 Y}{dx dy} + \beta^2 \frac{d^2 Y}{dy^2}, \quad \dots,\end{aligned}$$

l'équation (9) deviendra

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha y - \beta x)^2 (\xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22}) \\ &= \Phi(\xi Y - \eta X)^2 + f[\xi Y^{(1)} - \eta X^{(1)}]^2 \\ &\quad - f(\xi Y - \eta X) [\xi Y^{(2)} - \eta X^{(2)}] \\ &\quad - \frac{1}{2} f^{(1)}(\xi Y - \eta Y) [\xi Y^{(1)} - \eta X^{(1)}], \end{aligned} \right.$$

équation qui doit être identiquement satisfaite, quels que soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\xi$  et  $\eta$ , si  $x_1 = \frac{X}{Y}$  est une intégrale rationnelle de l'équation différentielle

$$(7) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

5. Pour déterminer la forme du polynôme  $\Phi$ , je remarque que, ce polynôme étant homogène et du second degré par rapport à  $x$  et  $y$  et par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi = & \alpha^2 W_{11} + 2\alpha\beta W_{12} + \beta^2 W_{22} \\ & + (\alpha y - \beta x)(\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2) + k(\alpha y - \beta x)^2, \end{aligned}$$

$W$  désignant un polynôme inconnu, homogène et du quatrième degré en  $x$  et  $y$ ,  $\Omega$  un polynôme inconnu homogène et du second degré par rapport aux mêmes variables, et  $k$  une quantité constante.

Faisons maintenant, dans l'identité (11),

$$\alpha = x + \rho\alpha' \quad \text{et} \quad \beta = y + \rho\beta';$$

le premier membre de cette identité devient divisible par  $\rho^2$ ; le terme constant et le terme en  $\rho$  doivent donc manquer dans le développement du second membre. En faisant ce développement, on trouve facilement

$$W = mf,$$

$m$  désignant le degré de la transformation, c'est-à-dire le degré des deux polynômes  $X$  et  $Y$ , puis  $\Omega = 0$ .

Le polynôme  $\Phi$  est donc complètement déterminé, sauf le facteur constant  $k$ , et l'on a

$$(12) \quad \Phi = m(x^2 f_{11} + 2\alpha\beta f_{12} + \beta^2 f_{22}) + k(\alpha y - \beta x)^2.$$