BULLETIN DE LA S. M. F.

M. RIESZ

L’intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l’équation des ondes

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 153-170 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S153_0>

Réun. intern. Math. (1937, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Suppl. 1939, p. 153 à 170.

L'INTÉGRALE DE RIEMANN-LIOUVILLE

ET

LE PROBLÈME DE CAUCHY

POUR

L'ÉQUATION DES ONDES

Par M. Marcel RIESZ.

C'est la notion de la *partie finie* de certaines intégrales due à M. Hadamard qui forme le point de départ de ces recherches. On connaît les applications brillantes à la théorie des équations aux dérivées partielles que M. Hadamard a données de la notion qu'il a créée ([1]). Chez lui il s'agit surtout d'équations à coefficients variables, tandis que la méthode que nous allons développer ne s'applique qu'à des équations à coefficients constants ([2]). En revanche, elle permet de donner pour ces équations une solution du problème de Cauchy qui est la même pour les dimensions impaires et paires.

Considérons d'abord, comme M. Hadamard, l'intégrale de Riemann-Liouville

$$I f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt \quad ([3]).$$

Elle converge pour $\alpha > 0$ et satisfait aux relations fondamentales

$$(1) \qquad I^\alpha(I^\beta) = I^{\alpha+\beta}, \qquad \frac{d}{dx}(I^{\alpha+1}) = I^\alpha.$$

([1]) *Cf.* (aussi pour la littérature) J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, Hermann, 1932.

([2]) *Voir* pourtant pour l'extension de la méthode la Note additionnelle.

([3]) Le facteur $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ ne figure pas chez M. Hadamard.

Dans des conditions de dérivabilité convenables, il s'agit maintenant d'étendre la définition de cette intégrale à des valeurs de α pour lesquelles elle cesse de converger. M. Hadamard arrive à cette extension pour des indices négatifs non entiers en retranchant de l'intégrale divergente certaines parties infinies d'ordre fractionnaire. Ce qui reste c'est alors la partie finie de l'intégrale. On peut atteindre le même but, et cela aussi pour l'indice zéro et les indices entiers négatifs, par un procédé qui me semble très naturel, celui du prolongement analytique par rapport à l'indice α. En supposant l'existence d'un assez grand nombre de dérivées, on obtient au moyen des intégrations par parties

$$\mathrm{I}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k} + \mathrm{I}^{\alpha+n} f^{(n)}(x).$$

La dernière expression s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{\alpha+n-1}\,dt,$$

l'intégrale étant convergente pour $\alpha > -n$. Le prolongement analytique se trouve donc effectué pour tous ces indices. Bien entendu, le prolongement en question peut être obtenu par bien d'autres procédés. Signalons en particulier la formule suivante qui est très utile dans les applications et par laquelle nous nous approchons beaucoup de l'ordre d'idées de M. Hadamard.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha} f(x) = {} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [f(t) - \mathrm{P}(t)]\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)\,(x-a)^{k+\alpha}}{(k+\alpha)\,k!},\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{P}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k \quad (^1).$$

---

(1) Nos procédés s'étendent facilement à des intégrales qui possèdent plusieurs singularités, par exemple à des intégrales de la forme

$$\mathrm{I}^{\alpha,\beta} f = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_y^x f(t)\,(t-y)^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}\,dt.$$

L'intégrale prolongée satisfait, sauf dans des cas exceptionnels faciles à préciser, aux relations fondamentales (1) dont la seconde pourra aussi servir à effectuer le prolongement en question.

Pour les indices $\alpha = 0$ et entiers négatifs $\alpha = -n$ on trouve, comme il fallait s'y attendre,

$$I^0 f(x) = f(x), \qquad I^{-n} f(x) = f^{(n)}(x).$$

Arrêtons-nous un instant sur les dernières relations. On voit que, pour tout autre indice, $I^\alpha f(x)$ est une fonctionnelle dépendant de toutes les valeurs que $f(t)$ admet entre a et x, tandis que, pour $\alpha = 0$ ou entier négatif, $I^\alpha f(x)$ a une valeur de caractère local; ce ne sont que les valeurs admises au voisinage infinitésimal de x qui interviennent. *Voilà en germe le principe de Huygens* [1]. C'est évidemment au facteur $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$, s'annulant pour les indices en question, que ces indices doivent leur caractère exceptionnel. D'ailleurs, même sans effectuer le prolongement analytique d'une façon explicite, on voit nettement que le prolongement de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt \qquad (\delta > 0),$$

est zéro pour $\alpha = 0$ ou entier négatif, parce que l'intégrale ne cesse jamais de converger. Les valeurs de $f(t)$ qui interviennent dans cette intégrale ne donneront donc aucune contribution à la valeur finale.

J'ai insisté sur ces questions élémentaires bien familières à vous tous, parce qu'elles nous permettront de bien saisir la différence qu'on rencontre dans la solution du problème de Cauchy de l'équation des ondes, posé pour un nombre pair ou pour un nombre impair de variables.

Considérons dans l'espace à m dimensions les points P et Q aux coordonnées respectives $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Nous intro-

---

(1) Nous entendons ici et dans tout ce qui suit par principe de Huygens la *mineure* du principe dans la terminologie de M. Hadamard (*loc. cit.*, p. 75). D'après ce principe, une perturbation lumineuse étant localisée à l'instant $t = 0$ au voisinage immédiat du point O, son effet sera localisé, pour $t = t'$, au voisinage immédiat de la surface d'une sphère de centre O et de rayon ct', c désignant la vitesse de la lumière.

duisons la distance lorentzienne de ces points

$$r_{PQ} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2 - \ldots - (x_m - \xi_m)^2},$$

en supposant que l'expression qui figure sous le signe racine carrée soit $\geqq 0$. En considérant le point P comme fixe et le point Q comme variable, $r_{PQ} = 0$ définit la nappe du cône-lumière au sommet P, $r_{PQ}^2 > 0$ définit son intérieur, $x_1 - \xi_1 > 0$ le cône rétrograde et $x_1 - \xi_1 < 0$ le cône direct. C'est le cône rétrograde que nous allons considérer en général, en le désignant par D^P. Soit encore S une surface (c'est-à-dire une variété à $m - 1$ dimensions) que les génératrices des cônes rétrogrades appartenant aux points P considérés ne coupent qu'en un seul point. On admet aussi que la surface soit assez régulière pour que les dérivations qui interviendront plus tard puissent être effectuées. Le domaine limité par la nappe rétrograde et la surface S sera désigné par D_S^P.

Cela étant, nous posons

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha - m}\, dQ, \tag{2}$$

avec

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}}\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right). \tag{3}$$

Cette intégrale converge pour $\alpha > m - 2$ et l'on vérifie facilement qu'elle satisfait aux relations fondamentales

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}, \qquad \Delta I^{\alpha+2} = I^\alpha, \tag{4}$$

où l'on a désigné par Δ l'opérateur des ondes :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}.$$

Ajoutons que ces propriétés de notre intégrale déterminent entièrement le facteur $H_m(\alpha)$.

Pour les indices $\alpha \leqq m - 2$ l'intégrale (2) se définit au moyen de prolongement analytique par rapport à α, bien entendu dans des conditions de régularité convenables portant sur la fonction f et sur la surface S. *On trouve en particulier* $I^0 f(P) = f(P)$. Remarquons que ce fait, qui est d'une importance capitale pour la suite, n'est nullement évident. En effet, I^0 est défini ici comme prolongement analytique de I^α qui ne converge que pour $\alpha > m - 2$, et le prolongement en question n'existe que dans certaines conditions de dérivabilité [1]. Des remarques analogues s'appliquent aux relations $I^{-2k} = \Delta^k$.

Il est clair par ce qui précède que notre procédé d'intégration tire son origine de l'opérateur différentiel du second ordre Δ. On a vu en effet que $\Delta I^2 = 1$, c'est-à-dire que I^2 est dans un certain sens l'inverse de l'opérateur des ondes. Or on peut construire un procédé qui, dans le même sens, forme l'inverse de l'opérateur différentiel du premier ordre *gradient* ou *nabla*, cet opérateur étant pris au sens lorentzien. Il est manifeste que ce procédé devra être de caractère vectoriel [2].

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ les composantes d'un vecteur arbitraire X et définissons *les nombres de Clifford* comme symboles de calcul ou comme vecteurs unités par la relation

$$X^2 = (X_1 e_1 + X_2 e_2 + \ldots + X_m e_m)^2 = X_1^2 - X_2^2 - \ldots - X_m^2.$$

Cette relation met en évidence les règles de calcul

$$e_1^2 = -e_2^2 = \ldots = -e_m^2 = 1$$

et

$$e_j e_k + e_k e_j = 0 \qquad (j \neq k).$$

L'opérateur $\nabla = \sum_{k=1}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ a manifestement la propriété $\nabla^2 = \Delta$ [3]. Nous posons

$$J^\alpha f(P) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \left[\cos\frac{\pi\alpha}{2} I^\alpha f(P) - i \sin\frac{\pi\alpha}{2} \nabla [I^{\alpha+1} f(P)] \right],$$

l'opération ∇ pouvant être exécutée sous le signe $\int$. On a alors

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}, \qquad \nabla J^{\alpha+1} = J^\alpha, \qquad J^{2k} = I^{2k},$$

k étant un nombre entier. En particulier on a $J^0 f(P) = f(P)$ ou plus

(1) Pour m impair ou pair il suffit de supposer l'existence des dérivées d'ordre $\leq \frac{m+1}{2}$ ou $\leq \frac{m}{2}$ respectivement.

(2) L'intégration vectorielle que j'esquisse ici ne figurait pas dans ma conférence. Je l'ai indiquée succinctement après la conférence en réponse à une question de M. Fréchet qui présidait à la séance.

(3) Depuis les travaux de M. Dirac, ces choses sont certainement bien familières à la plupart des lecteurs.

brièvement $J^0 = 1$. Signalons encore l'opérateur remarquable

$$Of(P) = \nabla[I^1 f(P)]$$

qui satisfait à la relation $O^2 = 1$.

En remarquant que la plupart des considérations qui suivent s'appliquent — *mutatis mutandis* — aussi à nos intégrales vectorielles, retournons aux intégrales scalaires.

Définissons avec M. d'Adhémar *la conormale n* à la surface S au point Q (*la transversale* suivant la terminologie de M. Hadamard) par la relation

$$dx_1\,\delta x_1 - dx_2\,\delta x_2 - \ldots - dx_m\,\delta x_m = 0,$$

où d et δ désignent respectivement un déplacement arbitraire sur la surface et un déplacement sur la conormale. Cela étant, nous choisissons celle des deux directions admissibles QT qui rend le produit scalaire lorentzien des vecteurs QP et QT positif. Il vient alors par la formule de Green

$$\begin{aligned} I^\alpha u(P) = {} & \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int_{D_S^P} \Delta u(Q)\, r_{PQ}^{\alpha+2-m}\, dQ \\ & + \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int_{S^P} \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial n} r_{PQ}^{\alpha+2-m} - u(Q) \frac{\partial r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{\partial n} \right] dS, \end{aligned}$$

tous les éléments géométriques étant mesurés, ici et dans la suite, dans le sens lorentzien. (Il faut prendre quelques précautions aux points de S où le plan tangent est en même temps tangent à un cône-lumière. D'ailleurs ce cas sera exclu plus loin quand il s'agira de l'application de la formule au problème de Cauchy.)

La formule ci-dessus qui contient une intégrale spatiale, une simple couche et une double couche peut se mettre sous une forme plus condensée. En effet, en posant d'une manière générale

$$(5)\quad \begin{aligned} I^{*\alpha} f, g, h(P) = {} & \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ \\ & + \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{S^P} \left[g(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m} - h(Q) \frac{\partial r_{PQ}^{\alpha-m}}{\partial n} \right] dS, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$(6)\qquad I^\alpha u(P) = I^{*\alpha+2} \Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}, u(P).$$

Avant d'aller plus loin, signalons quelques propriétés importantes du symbole I^*. On a

$$(7) \qquad I^{\alpha} I^{*\beta} = I^{*\alpha+\beta}, \qquad \Delta I^{*\alpha+2} = I^{*\alpha},$$

et en outre

$$(8) \qquad I^{*0} f, g, h(P) = f(P).$$

La formule (6) conduit facilement à la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. En effet il s'ensuit pour $\alpha = 0$, grâce à la relation $I^0 u = u$,

$$(9) \qquad u(P) = I^{*2} \Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}, u(P),$$

c'est-à-dire que la valeur de u au point P peut se calculer par une intégrale spatiale portant sur $\Delta(u)$ et étendue à un certain volume D_S^P, par une simple couche et une double couche portant respectivement sur $\frac{\partial u}{\partial n}$ et u et étendues à une certaine portion S^P de la surface S. Malheureusement, d'après ce que nous avons dit plus haut, ces intégrales sont en général divergentes. En effet elles ne convergent toutes que si l'on a $m \leqq 2$ [1], l'une d'elles, l'intégrale de double couche, diverge déjà pour l'équation de M. Volterra ($m = 3$) et elles divergent toutes à partir de $m = 4$, correspondant à l'équation des ondes relative à l'espace ordinaire. Mais on pourra toujours définir ces intégrales par prolongement analytique, ce qui veut dire que $I^{*\alpha} \Delta(u), \frac{\partial u}{\partial n}, u$ étant convergent pour α assez grand ($\alpha > m$), on peut, dans les conditions de dérivabilité admises, obtenir I^{*2} par prolongement analytique.

La formule fait nettement ressortir la différence qui a lieu entre les cas de m impair et de m pair. Pour m impair, où l'on retrouve la formule de M. Hadamard, le facteur $\frac{1}{H_m(2)}$ ne s'évanouit pas, la solution sera donc fournie par une intégrale spatiale étendue au

---

(1) Néanmoins, même pour $m = 2$, la formule (9) donne une solution erronée, indépendante des valeurs de u sur S, si on l'applique au sens strict, c'est-à-dire en *substituant* $\alpha = 0$ dans le second membre de la formule (6). Par contre, la formule obtenue de (6) par prolongement analytique donne la solution correcte bien connue, où il entre les valeurs de u aux points d'intersection de S et des deux rayons de lumière issus de P.

volume entier D_S^P et des intégrales étendues à la portion de surface entière S^P. Au contraire dans le cas de m pair (> 2), $\frac{1}{H_m(2)}$ s'annule à cause du facteur $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2+2-m}{2}\right)}$, et la formule finale ne sera pas influencée par les valeurs que u et ses dérivées prennent à l'intérieur du cône. L'intégrale spatiale se réduira à une intégrale étendue à la nappe du cône et les intégrales de surface à des intégrales étendues à l'intersection du cône avec la surface S. *Voilà le principe de Huygens : ce ne sont que les points d'univers situés sur la nappe rétrograde du cône au sommet* P *qui agissent sur ce point* (¹). Le principe dérive donc du fait que l'opérateur I^{*2} a pour m pair (> 2) un caractère quasi local, il n'y intervient que des points qui sont à distance zéro du point P (²).

En réalité notre formule n'était jusqu'ici qu'une formule de représentation du même caractère que la formule classique de Cauchy l'est pour les fonctions monogènes. Mais elle donne aussi la solution d'un problème aux limites, notamment celle du problème de Cauchy (³), si l'on admet en plus que la surface S ait, suivant la terminologie de M. Hadamard, une orientation d'espace. Cela veut dire que l'on a pour tout déplacement sur la surface $dx_1^2 - dx_2^2 - \ldots - dx_m^2 < 0$. En effet dans ce cas (et dans ce cas seulement) les domaines d'intégration deviennent infinitésimaux lorsque P s'approche indéfiniment de la surface (⁴).

Je finis cet exposé déjà trop long en donnant *une solution explicite invariante par rapport aux transformations de Lorentz* pour le cas de l'espace ordinaire, c'est-à-dire pour $m = 4$. En écrivant l'équation sous la forme $\Delta(u) = f$, le second membre donne lieu à une intégrale étendue à la nappe du cône qui n'est que le potentiel retardé bien connu. Puisque je ne saurais rien dire de nouveau sur cette partie de la solution, je me restreins ici à l'équation homogène.

(¹) *Cf.* Hadamard, *loc. cit.*, p. 239 et 324.

(²) Il en est de même, pour m pair, des opérateurs I^{*2k}, k entier positif, $2k \leq m - 2$, et pour m impair des opérateurs I^{*2k+1}, k entier, $2k + 1 \leq m - 2$. I^{*-2k} a pour k entier ≥ 0 un caractère strictement local indépendamment de la parité de m. En effet on a (*voir* plus haut) $I^{*0} = u(P)$ et $I^{*-2k} = \Delta^k u(P)$.

(³) C'est le problème de résoudre l'équation $\Delta u = f$, la fonction f étant connue dans l'espace et les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$ étant données sur la surface S.

(⁴) *Cf.* Hadamard, *loc. cit.*, p. 249.

Posons d'une manière générale $R = R_{PQ} = r^2_{PQ}$ et désignons par s^P la variété à deux dimensions formée par l'intersection du cône au sommet P et de la surface S. En remettant à tout à l'heure l'explication des autres notations, nous écrivons ici la solution suivante du problème de Cauchy posé pour l'équation $\Delta(u) = 0$, solution qu'on peut déduire de la solution générale (9).

$$(10) \qquad u(P) = \frac{1}{\pi}\int_{s^P}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u - \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)_{(\nu)}\right]ds.$$

Vous voyez qu'il n'intervient dans la formule qu'une seule dérivée suivant une certaine direction ν qu'il faudra maintenant définir. Cela est très facile dans le cas classique considéré par Poisson où la surface S est le plan $x_1 = 0$. Alors ν n'est que l'image de la génératrice QP par rapport à ce plan. Dans le cas général la chose est un peu plus compliquée.

Par un élément infinitésimal à deux dimensions du bord s^P contenant le point Q il passe ∞^1 plans à trois dimensions. Formons l'image de la génératrice QP, indéfiniment prolongée au delà de P, par rapport à l'un quelconque de ces plans, par exemple le plan tangent à S en Q, l'image étant prise dans la direction transversale au plan. Cette image, *indépendante du plan choisi*, donne la demi-droite ν appartenant au point Q du bord. Les lignes ν, qui évidemment sont des rayons-lumière, engendrent une surface caractéristique Σ de l'équation des ondes, qui dans un certain sens peut être considérée comme l'image du cône au sommet P par rapport à la surface S. La surface Σ peut aussi être obtenue de la manière suivante. On fait décrire au point d'intégration Q le bord s^P et l'on considère les cônes rétrogrades qui ont leur sommet au point variable Q. Ces cônes enveloppent une surface à deux nappes. La nappe extérieure fait évidemment partie du cône original au sommet P, tandis que la nappe intérieure est identique à la surface Σ.

La dérivée figurant dans notre formule est prise suivant la direction ν. La longueur lorentzienne des segments d'une telle droite étant nulle, on introduit R comme paramètre et forme la dérivée de u par rapport à R suivant ladite direction. Observons que $R = R_{PT}$ varie d'une manière linéaire sur une telle droite. En effet, T désignant un point quelconque de la droite ν appartenant à Q, R_{PT} est égal au double du produit scalaire lorentzien des vecteurs PQ et QT.

Il faut encore définir les valeurs R_1 et R_2 figurant dans notre formule. Remarquons à cet effet que les droites ν, qui sont en nombre ∞^2, forment évidemment une congruence de droites, qui est d'ailleurs d'un caractère bien particulier. En nous trouvant dans quatre dimensions, ce n'est que grâce à cette dernière circonstance que, pour chaque droite fixe ν appartenant à un certain point Q, il existe en général deux directions de déplacements infinitésimaux, $\delta_1 Q$ et $\delta_2 Q$ telles que les droites correspondantes coupent la droite ν. Cela veut dire que la congruence admet en général *deux foyers* Q_1 et Q_2 sur chacune de ses droites. Dans la formule ci-dessus on a posé pour abréger,

$$R_{PQ_1} = R_1, \qquad R_{PQ_2} = R_2.$$

Le lieu géométrique des foyers est la surface focale, *la caustique*, de la congruence, qui dans un certain sens peut être interprétée comme l'image du point P par rapport à la surface S. Dans le cas classique de Poisson elle se réduit à l'image *distincte* de ce point par rapport au plan $x_1 = 0$, et notre solution se réduit immédiatement à celle de Poisson.

En résumé, le principe de Huygens dit que la valeur de u au point P est déterminée par les valeurs que u et ses dérivées premières admettent en des points Q appartenant au passé-lumière du point P. Notre formule y apporte un complément qui doit présenter un certain intérêt, c'est que la seule dérivée qui y entre est prise suivant un certain rayon de lumière, c'est-à-dire que seul le passé-lumière infinitésimal de la fonction u au point Q y intervient. L'intervention de la surface (congruence) Σ et de sa caustique dans notre solution jette un jour nouveau sur les rapports entre l'optique physique et l'optique géométrique.

NOTE ADDITIONNELLE.

Tout récemment j'ai réussi à étendre la méthode d'intégration exposée dans la conférence qui précède aux équations linéaires du type hyperbolique normal *à coefficients variables*. Je me restreins ici à indiquer le procédé pour le cas où le premier membre de l'équation en question est fourni par le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami attaché à une certaine forme quadratique. L'extension au cas général est immédiate.

Soit donc

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad (^1)$$

la forme métrique attachée à un espace de Riemann à m dimensions. Nous dirons avec M. Hadamard qu'on se trouve dans le cas hyperbolique normal, si cette forme, transformée en somme de carrés, admet un carré positif et $m - 1$ carrés négatifs. En désignant par g la valeur absolue du déterminant $|g_{ik}| \neq 0$ et par g^{ik} les coefficients de la forme réciproque, le paramètre différentiel correspondant $\Delta_2 u = \Delta u$ s'écrit

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

La difficulté nouvelle qui se présente ici c'est la formation de la solution élémentaire de l'équation, problème que M. Hadamard a résolu d'une manière ingénieuse. Or le dualisme fatal entre les espaces à dimensions impaires et paires se manifeste dans le cas actuel d'une manière encore plus fâcheuse que dans le cas de l'équation des ondes. Les solutions élémentaires obtenues sont de caractère tout à fait différent, la méthode de la partie finie n'est applicable que pour les dimensions impaires, et pour les dimensions paires il faut recourir à la méthode de la descente. Nous allons montrer que l'introduction d'un paramètre convenable permet encore de donner la solution du problème de Cauchy sous une forme qui est indépendante de la parité de la dimension de l'espace. Chemin faisant nous allons développer un procédé d'intégration fractionnaire tout analogue à celui que nous avons donné dans notre conférence pour le cas de l'équation des ondes.

Nous supposons que dans la région considérée de l'espace les coefficients g_{ik} sont assez réguliers pour que le problème des géodésiques soit résoluble. Nous admettons aussi que deux points quelconques intérieurs à la région peuvent être joints par une géodésique d'une manière univoque. Les géodésiques de longueur nulle issues d'un point P donnent le conoïde caractéristique ayant pour sommet le point P. Ce conoïde divise l'espace (voisin de P) en trois régions dont l'une est extérieure au conoïde et les deux autres intérieures. Certaines conventions faites, on pourra, tout comme dans le cas de l'équation des ondes, sans ambiguïté parler de la nappe rétrograde et de la nappe directe de ce conoïde.

Soit P un point fixe et Q un point variable intérieur au conoïde qui a son sommet en P. Désignons par $s_{PQ} = s_{QP} = s$ la distance géodésique

(1) Nous appliquons dans tout ce qui suit l'écriture tensorielle.

entre P et Q. Nous nous proposons de construire une fonction $V^\alpha(P, Q)$ dépendant d'un paramètre α qui satisfait à l'équation

$$\Delta_Q V^{\alpha+2}(P, Q) = V^\alpha(P, Q), \tag{1}$$

et qui devient singulier sur le conoïde comme $s^{\alpha-m}$. A l'exemple de M. Hadamard nous admettons d'abord que les coefficients g_{ik} sont des fonctions holomorphes des variables x^i. Il en sera alors de même de s sauf sur le conoïde et de s^2 partout. Nous posons

$$V^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k s^{\alpha+2k-m}}{K_m(\alpha) L_m(\alpha+2k)}, \tag{2}$$

les coefficients V_k ne dépendant que de P et de Q, tandis que $K_m(\alpha)$ et $L_m(\alpha)$ ne dépendent que de α (et de la dimension m).

Introduisons maintenant un système de coordonnées normales, admettant le point P comme origine, en gardant la notation g pour la valeur absolue du déterminant des coefficients g_{ik} correspondants. On a alors les formules suivantes faciles à vérifier [1]

$$\Delta_Q s^{\alpha-m} = (\alpha - m) s^{\alpha-m-2}\left(\alpha - 2 + s\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial s}\right),$$

et plus généralement, U étant une fonction arbitraire,

$$\Delta_Q(s^{\alpha-m} U) = (\alpha - m) s^{\alpha-m-2}\left[\left(\alpha - 2 + s\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial s}\right) U + 2s\frac{\partial U}{\partial s}\right] + s^{\alpha-m}\Delta_Q U,$$

la notation $\dfrac{\partial}{\partial s}$ désignant une dérivation suivant la géodésique qui va de P à Q. Cela posé, il vient

$$\Delta V^{\alpha+2} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{\alpha+2k-m}\left\{\frac{\alpha+2+2k-m}{K_m(\alpha+2) L_m(\alpha+2+2k)} \times \left[\left(\alpha+2k+s\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial s}\right) V_k + 2s\frac{\partial V_k}{\partial s}\right] + \frac{\Delta V_{k-1}}{K_m(\alpha+2) L_m(\alpha+2k)}\right\}.$$

---

[1] *Cf.* Hadamard, *loc. cit.*, p. 117 et W. Feller, *Über die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus* (*Math. Annalen*, t. 102, 1930, p. 633-649, *voir* p. 639).

On choisit maintenant $L_m(\alpha)$ de sorte qu'on ait

$$\frac{\alpha+2-m}{L_m(\alpha+2)}=\frac{1}{L_m(\alpha)},$$

et l'on détermine V_k par l'équation différentielle récurrente

$$2s\frac{\partial V_k}{\partial s}+\left(2k+s\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial s}\right)V_k+\Delta V_{k-1}=0;$$
$$V_{-1}\equiv 0,\qquad V_0(P,P)=1.$$

Comme chez M. Hadamard, la solution est uniquement déterminée par le postulat que les $V_k(P, Q)$ soient des fonctions régulières de Q. En effet pour $s=0$, correspondant à $Q=P$, l'équation ci-dessus n'admet qu'une seule solution régulière. Notons que l'on trouve en particulier

$$V_0(P,Q)=\left(\frac{g(Q)}{g(P)}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Les formules de récurrence posées étant satisfaites, il vient

$$\Delta V^{\alpha+2}=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{V_k s^{\alpha+2k-m}}{K_m(\alpha+2)L_m(\alpha+2k)}.$$

En choisissant encore $K_m(\alpha)$ en sorte que

$$\frac{\alpha}{K_m(\alpha+2)}=\frac{1}{K_m(\alpha)},$$

l'équation (1) se trouvera résolue.

$K_m(\alpha)$ et $L_m(\alpha)$ auront les propriétés désirées si l'on pose

$$K_m(\alpha)=K\,2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

et

$$L_m(\alpha)=L.2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right),$$

K et L étant indépendants de α. Nous écrivons encore

$$H_m(\alpha,k)=K_m(\alpha)L_m(\alpha+2k),$$

et nous déterminons le produit KL en sorte qu'on ait

$$(3)\qquad H_m(\alpha,\, 0) = H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}}\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right),$$

la fonction $H_m(\alpha)$ étant le facteur adapté à l'équation des ondes qui figure dans notre conférence. Il vient en définitive

$$\begin{aligned} H_m(\alpha,\, k) &= K_m(\alpha)\, L_m(\alpha+2k) \\ &= \pi^{\frac{m-2}{2}}\, 2^{\alpha+k-1}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2k+2-m}{2}\right). \end{aligned}$$

Signalons encore la formule de récurrence

$$(4)\qquad H_m(\alpha,\, k) = (\alpha + 2k - m)\, H_m(\alpha,\, k-1),$$

et observons que cette formule associée à la formule (3) détermine entièrement la fonction $H_m(\alpha,\, k)$ [1].

La solution élémentaire

$$s^{2-m}\, U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k\, s^{2-m+2k}$$

que M. Hadamard forme dans le cas impair est à un facteur constant près identique à notre fonction V^2. Il est instructif de comparer les coefficients U_k à nos coefficients V_k. En normant U par la condition $U(P,P) = 1$, c'est-à-dire $U_0(P,\, P) = 1$, on a

$$(5)\qquad U_k = \frac{\Gamma\left(2-\frac{m}{2}\right)}{2^k\,\Gamma\left(2-\frac{m}{2}+k\right)}\, V_k,$$

---

[1] Dans le cas elliptique la fonction correspondante $H_m(\alpha,\, k)$ se détermine par la formule de récurrence (4) combinée avec la relation

$$H_m(\alpha,\, 0) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}\, 2^{\alpha}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)},$$

cette dernière fonction étant le facteur adapté à l'opérateur de Laplace [*cf.* MARCEL RIESZ, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels* (*Acta de Szeged*, t. 9, 1938, p. 1-42)].

ce qui met en évidence les difficultés qui surgiraient dans le cas où m est un nombre pair, si l'on se bornait à considérer la solution élémentaire V^2 sans introduire un paramètre auxiliaire. En effet $H_m(2, k)$ devient infini pour $2k \leqq m - 4$, ce qui entraîne que V^2 reste fini sur le conoïde. M. Hadamard donne de son côté dans le cas pair une solution élémentaire de la forme

$$s^{2-m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-2} U_k s^{2k} + w - 2\mathfrak{U} \log s,$$

où w n'est déterminé qu'à une solution régulière près de l'équation $\Delta u = 0$. Il ne manque pas d'intérêt d'observer que cette solution élémentaire est à un facteur constant et à une fonction régulière additive près identique à

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial \alpha} \quad (\alpha = 2).$$

Soient maintenant P et Q deux points de l'espace de Riemann tels que le conoïde rétrograde appartenant à l'un d'eux et le conoïde direct appartenant à l'autre délimitent un certain domaine B_Q^P. Dès lors on a pour $\alpha > m - 2$ et $\beta > m - 2$

$$(6) \qquad \int_{B_Q^P} V^\alpha(P, T) V^\beta(Q, T)\, dT = V^{\alpha+\beta}(P, Q);$$

où dT signifie l'élément de volume de l'espace de Riemann. Pour la démonstration, qui est facile, on met en jeu la propriété (1), la formule de Green et le principe du prolongement analytique par rapport à l'un des indices. On obtient par les mêmes moyens *la propriété d'échange* $V^\alpha(P, Q) = V^\alpha(Q, P)$. De là on tire immédiatement la propriété d'échange des coefficients V_k, démontrée par M. Hadamard au moyen de la méthode de la descente.

Il faut encore dire un mot sur la convergence de nos séries. Or, grâce aux relations (5), on voit immédiatement du résultat correspondant de M. Hadamard que nos séries convergent, dès que la distance géodésique des points P et Q est assez petite.

Soit maintenant S une surface (à $m - 1$ dimensions) dans notre espace de Riemann, et admettons que les conoïdes rétrogrades, par exemple, ayant comme sommet un point arbitraire P situé d'un certain côté de S et assez voisin de S, délimitent avec S certains domaines D_S^P. Nous admettons aussi jusqu'à nouvel ordre que nos séries convergent dans ces domaines. Cela étant, on pose

$$(7) \qquad I^\alpha f(P) = \int_{D_S^P} f(Q) V^\alpha(P, Q)\, dQ.$$

Cette intégrale ne converge en général que pour $\alpha > m - 2$. On a, en supposant aussi $\beta > m - 2$,

$$(8) \qquad I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$$

et

$$(9) \qquad \Delta I^{\alpha+2} = I^\alpha.$$

Or, dans des conditions de dérivabilité convenables portant sur la fonction f et la surface S, on peut étendre la définition (7) et les relations (8) et (9) à tous les indices positifs, par exemple. On peut aussi définir l'intégrale

$$(10) \quad I^{*\alpha} f, g, h(P) = \int_{D_S^P} f(Q) V^\alpha(P, Q)\, dQ + \int_{S^P} \left[g(Q) V^\alpha(P, Q) - h(Q) \frac{\partial V^\alpha(P, Q)}{\partial n} \right] dS,$$

tous les éléments géométriques étant mesurés au sens riemannien, S^P étant la portion de surface découpée de S par le conoïde et n étant la transversale (conormale) à la surface S au point Q. Cette direction est déterminée au sens près par l'égalité $g_{ik} dx^i \delta x^k = 0$, qui doit avoir lieu pour tout déplacement d sur la surface S au point Q et pour le déplacement transversal δ. Le sens est donné par l'inégalité $g_{ik} dx^i \delta x^k > 0$, où d est un déplacement sur la géodésique allant de Q à P. L'intégrale (10) donne lieu aux relations

$$I^\alpha I^{*\beta} = I^{*\alpha+\beta}$$

et

$$\Delta I^{*\alpha+2} = I^{*\alpha}.$$

On a encore les formules capitales

$$I^0 f(P) = I^{*0} f, g, h(P) = f(P)$$

qui, par l'introduction de coordonnées normales, se réduisent facilement aux formules correspondantes données dans notre conférence.

Ces points acquis, la formule de Green donne

$$I^{\alpha} u(P) = I^{*\alpha+2} \Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}, u(P),$$

et en particulier

$$u(P) = I^{*2} \Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}, u(P). \tag{11}$$

Dans le cas où S a une orientation d'espace, c'est-à-dire que $g_{ik} dx^i dx^k < 0$ pour tout déplacement sur la surface, cette formule de représentation devient une formule de solution pour le problème de Cauchy.

Il s'agit maintenant d'étendre la validité de nos résultats sous deux rapports. L'application de la série (2) donnant V^{α} exigeait en effet d'une part que les coefficients g_{ik} fussent holomorphes et d'autre part que la distance géodésique des points P et Q fût assez petite. Au lieu de supposer que les coefficients sont holomorphes, on n'admettra que l'existence des dérivées jusqu'à un certain ordre. Dans ce cas on ne pourra former la série donnant V^{α}, mais on pourra toujours former un certain nombre des quantités V_k. Dès lors, on pourra, tout comme le fait M. Hadamard, appliquer la méthode de la *parametrix*. Or par cette méthode nous n'obtenons que V^2 [1] qui ne suffit pas pour donner à la formule (11) la validité générale à laquelle nous tenons. On peut remédier à cet inconvénient de la manière suivante.

Admettons de nouveau un instant que les coefficients g_{ik} soient holomorphes et formons une fonction W^{α} qui joue le même rôle par rapport à l'opérateur $\Delta u + \lambda^2 u$, le nombre λ désignant un nouveau paramètre, que V^{α} joue par rapport à Δu. Posons

$$\begin{aligned} W^{\alpha} &= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{h} \lambda^{2h} V^{\alpha+2h} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\frac{\alpha+m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cdot \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-m}{2}+k} J_{\frac{\alpha-m}{2}+k}(\lambda s), \end{aligned}$$

où les J sont des fonctions de Bessel. Il est manifeste que W^{α} devient

---

[1] Cela tient au fait qu'on connaît $\Delta V^2 (\Delta V^2 = 0)$, mais on ne connaît pas ΔV^{α} d'une manière explicite.

singulier sur le conoïde de la même manière que V^{α} et l'on vérifie facilement la relation

$$\Delta W^{\alpha+2} + \lambda^2 W^{\alpha+2} = W^{\alpha}.$$

Dans le cas où les g_{ik} ne sont pas holomorphes mais suffisamment dérivables, on pourra encore par la méthode de la *parametrix* déterminer W^2 et alors V^{α} s'obtient facilement au moyen d'une intégration complexe par rapport au paramètre λ.

Lund, Institut Mathématique
de l'Université, le 26 juin 1938.