BULLETIN DE LA S. M. F.

J. G. VAN DER CORPUT

Sur la démonstration de l'hypothèse de Goldbach pour les nombres impairs, donnée par M. Vinogradow

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 87-99 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S87_0>

Réun. intern. Math. (1937, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Suppl. 1939, p. 87 à 99.

SUR LA DÉMONSTRATION
DE
L'HYPOTHÈSE DE GOLDBACH
POUR LES NOMBRES IMPAIRS
DONNÉE PAR M. VINOGRADOW

Par M. J. G. van der CORPUT.

Le célèbre problème dit de Goldbach vous est sans doute connu à vous tous. En 1742, dans sa correspondance avec Euler, ce mathématicien a prétendu que chaque nombre pair est la somme de deux nombres premiers, par exemple

$$2 = 1 + 1, \qquad 4 = 2 + 2, \qquad 6 = 3 + 3, \qquad 8 = 3 + 5, \qquad \ldots.$$

Du temps d'Euler le nombre 1 était considéré comme nombre premier. A présent on ne considère plus en général le nombre 1 comme nombre premier, de sorte que de nos jours nous formulons l'hypothèse de Goldbach comme suit : tout nombre pair > 2 est la somme de deux nombres premiers.

Beaucoup de mathématiciens éminents se sont efforcés de donner la solution de ce problème, mais, malgré cela, cette hypothèse dans la phase de la science où nous sommes à présent, n'est ni démontrée ni réfutée. Comme vous le savez, M. Schnirelmann a, il y a quelques années, attiré sur lui l'attention en démontrant qu'il y a une constante absolue M telle que tout nombre naturel soit la somme de M nombres premiers tout au plus.

Pour les nombres impairs l'hypothèse de Goldbach peut être formulée ainsi : tout nombre impair supérieur à 5 est la somme de trois nombres premiers. Il va sans dire que dans le problème des nombres pairs se présentent beaucoup plus de difficultés que dans celui des nombres impairs.

Je me réjouis, Mesdames et Messieurs, que devant cet illustre auditoire il m'est donné de pouvoir vous présenter ce que nous devons depuis quelques semaines au génie de M. Vinogradow (1).

Le grand mathématicien qu'est M. Vinogradow nous a démontré d'une manière ingénieuse et pourtant élémentaire que tout nombre impair suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers, c'est-à-dire qu'il existe une certaine borne telle que tout entier impair supérieur à cette borne puisse être écrit comme la somme de trois nombres premiers.

Mon intention est de vous donner ici en grands traits la solution trouvée par M. Vinogradow. Les démonstrations de ce savant russe se caractérisent par un génie extraordinaire, mais cependant il donne ses raisonnements de manière si concise qu'il exige beaucoup d'efforts de ceux qui s'intéressent à son œuvre, des efforts tels, que même des initiés il exige force travail pour se mettre à la hauteur des raisonnements (2). Ce qu'il y a de curieux dans la démonstration en question, c'est qu'elle peut être dite élémentaire, du moins si l'on accepte le théorème de Siegel-Walfisz concernant la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques (3).

Considérons une progression arithmétique

$$k, \quad k+q, \quad k+2q, \quad \ldots,$$

où k et q désignent des nombres naturels, premiers entre eux, tels que $k \leqq q$. La théorie classique nous apprend que pour tout entier $x \geqq 2$ le nombre des nombres premiers $\leqq x$ figurant dans cette progression arithmétique est approximativement égal à

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{g=2}^{x} \frac{1}{\log g},$$

(1) *Representation of an odd number as a sum of three primes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 15, 1937, nos 6-7, p. 169-172).

(2) Après cette conférence une démonstration plus ample et claire de M. Vinogradow a paru : *Some theorems concerning the theory of primes* [*Recueil mathématique*, 2, 1937, (44), n° 2, p. 179-195].

(3) *Acta Arithmetica*, 1; *Mathematische Zeitschrift*, 40, 1936.

et que la différence est en valeur absolue inférieure à $c_1 x(\log x)^{-m}$, où m est un nombre quelconque et c_1 un nombre dépendant uniquement de m et de q; partout dans cette conférence $\varphi(q)$ désigne la fonction d'Euler. Du résultat concernant les zéros des séries L de Dirichlet, résultat trouvé par M. Siegel, il résulte immédiatement, comme M. Walfisz l'a fait remarquer, que le nombre c_1 peut être choisi même indépendamment de q; par conséquent c_1 dépend uniquement de m. Dans cette conférence je désignerai par c_1, c_2, c_3 et c_4 des nombres positifs, convenablement choisis, dépendant uniquement de m.

Je distingue dans le raisonnement de M. Vinogradow trois phases. D'abord la phase classique, c'est-à-dire celle où l'on se sert des moyens fournis par MM. Hardy, Littlewood, Landau et d'autres; dans cette phase le théorème de Siegel-Walfisz est indispensable. La dernière est purement Vinogradowienne; cette phase trouve son appui dans la pensée fondamentale qui est à la base de toutes les recherches de M. Vinogradow pendant les dernières années et avec l'aide de laquelle lui, et entre autres son élève M. Tschudakow, ont déjà trouvé des résultats si remarquables dans la théorie des nombres premiers, dans la théorie des approximations diophantiques, dans celles des points à coordonnées entières et dans le problème de Waring.

La dernière phase fournit pour ainsi dire le trait d'union entre les deux autres, un trait d'union qui nous permet de traiter à l'aide de la pensée fondamentale de M. Vinogradow les expressions auxquelles aboutit la méthode classique, appliquée au problème de Goldbach pour les nombres impairs.

Permettez-moi de commencer par la première phase. A nous incombe la tâche de démontrer que tout nombre impair suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers. Quand une charge nous semble trop lourde, nous la remplaçons souvent par une tâche bien plus lourde encore, dans l'espoir que cette tâche nouvelle nous sera plus légère. C'est le cas ici. Le développement de la théorie des nombres pendant les dernières dizaines d'années nous a appris que le problème devient plus facile, si on le rend plus difficile de la manière suivante : on demande le nombre approximatif des manières différentes dont un entier impair suffisamment grand peut être écrit comme la somme de trois nombres premiers. Le nouvel énoncé nous permet de traiter le problème d'une manière analytique, ce qui n'est pas le cas pour le premier énoncé.

Qu'il me soit maintenant permis de vous annoncer sans trop tarder ce que M. Vinogradow a démontré : le nombre des manières différentes dont un nombre impair peut être écrit comme la somme de trois nombres premiers, est égal à

$$I(N) = (1+\varepsilon)\frac{N^2 K P(N)}{2(\log N)^3}, \tag{1}$$

où K est le produit

$$K = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right), \tag{2}$$

étendu à tous les nombres premiers (K est donc une constante absolue) et où P(N) est le produit

$$P(N) = \prod_{p/N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right), \tag{3}$$

étendu à tous les facteurs premiers p de N ; ε est un nombre, dépendant de N et tendant vers zéro, si N croît indéfiniment. Par conséquent, pour les nombres N qui sont impairs et suffisamment grands, ε est supérieur à -1 et I(N) est donc positif, de sorte que N est la la somme de trois nombres premiers.

Qu'est-ce que la méthode classique nous apprend par rapport au nombre I(N)? Comme c'est évident, ce nombre est égal à

$$\int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha, \tag{4}$$

où

$$S(\alpha) = \sum_{p \leqq N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Si α est égal à une fraction à petit dénominateur, $S(\alpha)$ peut avoir le même ordre de grandeur que $\sum_{g=2}^{N} \frac{1}{\log g}$, par exemple

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{p \leqq N} e^{\frac{2\pi i p}{3}} = 1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} \sum_{\substack{p \leqq N \\ p \equiv 1 \pmod 3}} 1 + e^{\frac{4\pi i}{3}} \sum_{\substack{p \leqq N \\ p \equiv 2 \pmod 3}} 1,$$

est, d'après le théorème principal concernant la distribution des nombres premiers, approximativement égal à

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}+e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g}=-\frac{1}{2}\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g},$$

tandis que la valeur absolue de la différence est inférieure à $c_2 N(\log N)^{-m}$. On trouve de la même façon pour $S\left(\frac{a}{q}\right)$, où $\frac{a}{q}$ désigne une fraction irréductible quelconque, la valeur approximative

$$\frac{1}{\varphi(q)}\left(\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{\frac{2\pi i a}{q}}\right)\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g},$$

tandis que l'écart est inférieur à $c_3 q N(\log N)^{-m}$; je désigne par (a, q) le plus grand commun diviseur de a et q, de sorte que $\sum\limits_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$ est étendu à tous les nombres naturels $a \leqq q$, qui sont premiers avec q. Comme on le sait, $\sum\limits_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$ est égal à la fonction $\mu(q)$ de Möbius; cette fonction est zéro, si q est divisible par un carré >1; si, par contre, q n'est pas divisible par un carré >1, elle est égale à $+1$ ou -1, selon que le nombre des facteurs premiers de q est pair ou impair. Ainsi nous obtenons le résultat que $S\left(\frac{a}{q}\right)$ est approximativement égal à

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{g=2}^{N}\frac{1}{\log g},$$

et que la différence est en valeur absolue inférieure à $c_3 q N(\log N)^{-m}$. Moyennant la sommation partielle nous trouvons maintenant pour $S(\alpha)$ la valeur approximative

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\mathcal{Y}\left(\alpha-\frac{a}{q}\right) \qquad \text{où} \quad \mathcal{Y}(\beta)=\sum_{g=2}^{N}\frac{e^{2\pi i\beta g}}{\log g},$$

tandis que l'écart est inférieur à

$$c_4 q \mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{-m}\left(1+\mathrm{N}\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\right).$$

Ce résultat n'est utilisable que lorsque q et $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|$ ne sont pas trop grands. Introduisons un nombre quelconque fixe $h \geqq 4$ et supposons

$$(5) \qquad \left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leqq \mathrm{N}^{-1}(\log \mathrm{N})^{3h} \qquad \text{et} \qquad 0<q \leqq (\log \mathrm{N})^{h}.$$

Si à un nombre réel α correspond une fraction irréductible $\frac{a}{q}$ qui satisfait à (5), je dirai que α est situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur; cette notion dépend donc du choix des nombres N et h.

Dans le voisinage d'une fraction irréductible $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur la valeur approximative de $S(\alpha)$ est, d'après le résultat précédent $\left(\text{où je pose } m=\frac{19}{2}h\right)$, égal à $\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\mathfrak{Y}\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)$, tandis que l'écart est inférieur à $\gamma_1 \mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{-\frac{11}{2}h}$; je désigne par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{12}$ des nombres positifs convenablement choisis, dépendant uniquement de h. Dans le voisinage sus-indiqué $S^3(\alpha)$ est donc approximativement égal à $\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\mathfrak{Y}^3\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)$ et l'écart inférieur à $\gamma_2 \mathrm{N}^3(\log \mathrm{N})^{-\frac{11}{2}h}$.

Dans la première phase de notre raisonnement nous considérons la contribution à (4) des α situés dans le voisinage d'une fraction $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur. Comme nous venons de le voir, cette contribution est approximativement égale à

$$(6) \qquad \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q}\mathrm{N}} \int_{-\mathrm{N}^{-1}(\log \mathrm{N})^{3h}}^{\mathrm{N}^{-1}(\log \mathrm{N})^{3h}} \mathfrak{Y}^3(\beta)\, e^{-2\pi i \beta \mathrm{N}}\, d\beta$$

et la différence absolue inférieure à $2\gamma_2 \mathrm{N}^2(\log \mathrm{N})^{-\frac{5}{2}h}$.

L'identité

$$\begin{aligned}(1-e^{2\pi i\beta})\,\mathfrak{Y}(\beta) \\ = -\frac{e^{2\pi i\beta(\mathrm{N}+1)}}{\log \mathrm{N}}+\frac{e^{4\pi i\beta}}{\log 2}-\sum_{g=3}^{\mathrm{N}} e^{2\pi i\beta g}\left(\frac{1}{\log(g-1)}-\frac{1}{\log g}\right)\end{aligned}$$

nous apprend pour tout nombre positif $\beta \leqq \frac{1}{2}$

$$2\sin\pi\beta\,|\mathcal{Y}(\beta)| \leqq \frac{1}{\log N} + \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log N} = \frac{2}{\log 2},$$

donc

$$|\mathcal{Y}(\beta)| \leqq \frac{1}{(\log 2)\sin\pi\beta} \leqq \frac{1}{2\beta\log 2} < \frac{1}{\beta},$$

d'où suit

$$\int_{N^{-1}(\log N)^{3h}}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{Y}(\beta)|^3\,d\beta < \int_{N^{-1}(\log N)^{3h}}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta^3} = \frac{1}{2}N^2(\log N)^{-6h}.$$

L'inégalité analogue vaut pour l'intégrale, dont l'intervalle d'intégration est $\left(-\frac{1}{2},\ -N^{-1}(\log N)^{3h}\right)$.

Par conséquent, l'intégrale figurant dans (6) est approximativement égale à

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}^3(\beta)e^{-2\pi i\beta N}\,d\beta, \tag{7}$$

et l'écart inférieur à $N^2(\log N)^{-6h}$.

Or, (7) est égal à

$$\sum_{g_1=2}^{N}\sum_{g_2=2}^{N}\sum_{g_3=2}^{N} \frac{1}{(\log g_1)(\log g_2)(\log g_3)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i\beta(g_1+g_2+g_3-N)}\,d\beta = \mathcal{G}(N),$$

où

$$\mathcal{G}(N) = \sum_{\substack{g_1=2\\ g_1+g_2+g_3=N}}^{N}\ \sum_{g_2=2}^{N}\ \sum_{g_3=2}^{N} \frac{1}{(\log g_1)(\log g_2)(\log g_3)}.$$

Ainsi nous trouvons que la contribution à (4) des α situés dans le voisinage d'une fraction $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur est à peu près

$$\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\mathcal{G}(N),$$

et que l'écart est inférieur à $\gamma_3 N^2(\log N)^{-\frac{5}{2}h}$.

Le nombre des fractions à petit dénominateur, situées dans l'intervalle $0 \leqq \alpha < 1$, est tout au plus $(\log N)^{2h}$. La contribution approximative à (4) des α situés dans le voisinage d'au moins une fraction à petit dénominateur est donc

$$\mathcal{G}(N) \sum_{1 \leqq q \leqq (\log N)^h} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}$$

et l'écart inférieur à $\gamma_3 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}$.

En vertu de

$$\mathcal{G}(N) \leqq N^2 \qquad \text{et} \qquad \varphi(q) \geqq \frac{1}{2} q^{\frac{3}{4}},$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(N) \sum_{q > (\log N)^h} \frac{1}{\varphi^2(q)} &\leqq 4N^2 \sum_{q > (\log N)^h} q^{-\frac{3}{2}} \\ &< 4N^2 \left\{ (\log N)^{-\frac{3}{2}h} + \int_{(\log N)^h}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}} du \right\} \\ &< 12 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}; \end{aligned}$$

d'où il résulte que la contribution approximative à (4) des α situés dans le voisinage d'au moins une fraction à petit dénominateur est égale à

$$(8) \qquad \mathcal{G}(N) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}.$$

et que l'écart est inférieur à $\gamma_4 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}$. Comme on le sait (¹) (8) est pour tout nombre impair N égal à $\mathcal{G}(N)\, K P(N)$, où K et P(N) sont définis par (2) et (3).

Voilà le résultat de la première phase de notre raisonnement. Mais, c'est maintenant seulement que commencent les difficultés, car il faut encore démontrer que les α qui ne sont pas situés dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur ne fournissent pas une trop grande contribution. Afin d'atteindre ce but, il suffit de démontrer que tout α

(¹) Comparez, par exemple, E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, S. Hirzel (Leipzig), 1927, vol. I, p. 210; proposition 247.

qui n'est pas situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur satisfait à l'inégalité

$$(9) \qquad |S(\alpha)| < \gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h}.$$

En effet, la contribution à (4) de tous ces α est alors tout au plus

$$\begin{aligned} &\gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h} \int_0^1 |S(\alpha)|^2 \, d\alpha \\ &= \gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h} \sum_{p \leqq N} \sum_{p' \leqq N} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha (p-p')} \, d\alpha \\ &= \gamma_5 N(\log N)^{-\frac{1}{2}h} \sum_{p \leqq N} \sum_{\substack{p' \leqq N \\ p = p'}} 1 \\ &\leqq \gamma_5 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}. \end{aligned}$$

Par conséquent (9) entraîne le résultat que $I(N) - \mathfrak{G}(N) K P(N)$ est en valeur absolue inférieur à $\gamma_6 N^2 (\log N)^{-\frac{1}{2}h}$. Ce résultat dans lequel h désigne un nombre $\geqq 4$, est même considérablement meilleur que la relation (1), qui en suit immédiatement, parce que

$$\mathfrak{G}(N) : \frac{N^2}{2(\log N)^3}$$

tend vers 1, si N croît indéfiniment.

Il n'est pas possible d'appliquer directement la pensée fondamentale de M. Vinogradow à la somme $S(\alpha)$, ce qui rend nécessaire la deuxième phase dans laquelle nous mettons cette somme sous une forme plus convenable.

En examinant les α situés dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur, il suffit, comme nous l'avons vu, de faire usage de la régularité de la distribution des nombres premiers, régularité exprimée par le théorème de Siegel-Walfisz.

D'autre part, cette régularité ne nous suffit pas, si nous voulons déduire une borne supérieure de $|S(\alpha)|$ pour un nombre α qui n'est pas situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur. Maintenant, il faut caractériser les nombres premiers par une autre propriété. Il est remarquable que M. Vinogradow se serve d'une propriété négative, savoir la suivante : si l'on supprime dans la suite des nombres naturels les nombres composés, on retient les nombres premiers (crible d'Eratosthène). Cette propriété conduit à l'identité

$$(10) \qquad e^{2\pi i\alpha} + \sum_{\sqrt{N}<p\leqq N} e^{2\pi i\alpha p} = \sum{}' \mu(d) e^{2\pi i\alpha md},$$

où Σ' est étendu à tous les nombres naturels $m \leqq N$ et à tous les nombres naturels $d \leqq \frac{N}{m}$ dont chaque facteur premier est $\leqq \sqrt{N}$. Le nombre des nombres premiers $\leqq \sqrt{N}$ étant moins grand que $\sqrt{N}$, donc d'un ordre de grandeur beaucoup moins élevé que $N(\log N)^{-\frac{1}{2}h}$, il suffit de démontrer que le membre de droite de (10) possède pour les α en question un ordre de grandeur tout au plus égal à $N(\log)^{-\frac{1}{2}h}$. Nous pouvons même démontrer que ce membre possède pour tout α qui n'est pas situé dans le voisinage d'une fraction à petit dénominateur un ordre de grandeur tout au plus égal à $N(\log N)^{2-h}$, ce qui est meilleur en vertu de $h \geqq 4$.

Des considérations élémentaires nous fournissent les deux résultats suivants : la contribution absolue au membre de droite de (10) des termes tels que $d \leqq N(\log N)^{-h}$ est inférieure à $\gamma_7 N(\log N)^{2-h}$; le nombre des termes ayant la propriété que $d > N(\log N)^{-h}$ et que chaque facteur premier de d soit $\leqq (\log N)^{3h}$ est inférieur à $\gamma_8 N(\log N)^{2-h}$. Il suffit donc de considérer les termes dans lesquels d est supérieur à $N(\log N)^{-h}$ et possède au moins un facteur premier $> (\log N)^{3h}$. Désignons par T_+ la somme de ces termes, possédant en outre la propriété $\mu(d) = +1$, et par T_- la somme de ces termes, possédant en outre la propriété $\mu(d) = -1$.

Nous pouvons donc nous contenter de démontrer que T_+ et T_- sont en valeurs absolues inférieurs à $\gamma_9 N(\log N)^{2-h}$. Traitons T_+ (on peut traiter T_- d'une manière analogue). Si nous désignons par T_k la somme des termes de T_+ tels que d possède k facteurs premiers $> (\log N)^{3h}$, on a

$$T_+ = \sum_k T_k,$$

où k parcourt un système formé de nombres naturels $< \log N$. En outre on a

$$T_k = \sum_{1\leqq m<(\log N)^h} T_k(m) \qquad \text{où} \quad T_k(m) = \sum_d{}'' e^{2\pi i\alpha md};$$

$\sum\limits_{d}''$ est étendu aux nombres naturels d jouissant des propriétés suivantes :

$$\mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{-h} < d \leqq \mathrm{N}\, m^{-1} \qquad \mu(d) = 1\,;$$

chaque facteur premier de d est $\leqq \sqrt{\mathrm{N}}$;

d possède k facteurs premiers $> (\log \mathrm{N})^{3h}$.

Comme il est aisé de voir, $k\mathrm{T}_k(m)$ possède la valeur approximative

$$\mathfrak{U} = \sum_{x} \sum_{y} e^{2\pi i \alpha m . xy},$$

de telle façon que l'écart est inférieur à $\gamma_{10}\mathrm{N}\, m^{-1}(\log \mathrm{N})^{-3h}$; $\sum\limits_{x}$ est étendu aux nombres premiers $x > (\log \mathrm{N})^{3h}$ et $\leqq \sqrt{\mathrm{N}}$, tandis que $\sum\limits_{y}$ est étendu aux nombres naturels y jouissant des propriétés suivantes :

$$\mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{-h} < xy \leqq \mathrm{N}\, m^{-1}\,; \qquad \mu(y) = -1\,;$$

chaque facteur premier de y est $\leqq \sqrt{\mathrm{N}}$;

y possède $k-1$ facteurs premiers $> (\log \mathrm{N})^{3h}$.

Nous serons prêts dès que nous aurons démontré

$$(11) \qquad |\mathfrak{U}| < \gamma_{11}\mathrm{N}\, m^{-\frac{1}{2}}(\log \mathrm{N})^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}h}.$$

Nous obtenons alors en effet

$$k\,|\mathrm{T}_k| < \gamma_{12}\mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{\frac{3}{2}-h},$$

donc,

$$|\mathrm{T}_+| < \gamma_9\,\mathrm{N}(\log \mathrm{N})^{2-h}.$$

La deuxième phase du raisonnement nous apprend par conséquent qu'il suffit de déduire l'inégalité (11). La dernière phase est consacrée à l'étude de la somme $\mathfrak{U}$; à cette somme peut être appliquée l'idée fondamentale de M. Vinogradow. On peut même appliquer cette idée à la somme plus générale

$$\mathfrak{U} = \sum_{\substack{x \text{ dans } \mathfrak{X} \\ (x,y) \text{ dans E}}} \sum_{y \text{ dans } \mathfrak{Y}} e^{2\pi i \beta . xy}\,;$$

l'entier x parcourt un ensemble $\mathfrak{X}$ (indépendant de y) et l'entier y parcourt un ensemble $\mathfrak{Y}$ (indépendant de x), mais seules les paires x, y entrent en considération, telles que le point (x, y) appartienne à un ensemble donné E. Supposons que toute paire de points ayant la même ordonnée et appartenant à E, possède la propriété que E contient tous les points à coordonnées entières situées entre ces deux points. Dans le problème de Goldbach pour les nombres impairs E est l'ensemble des points (x, y) à coordonnées entières tels que

$$N(\log N)^{-h} < xy \leqq N\, m^{-1}.$$

Si l'on désigne par j le plus petit intervalle contenant $\mathfrak{X}$, on a

$$|\mathfrak{U}| \leqq \sum_{x \text{ dans } j} \left| \sum_{\substack{y \text{ dans } \mathfrak{Y} \\ (x,\, y) \text{ dans E.}}} e^{2\pi i\beta xy} \right|.$$

$\mathfrak{Z}$ désignant le nombre des entiers appartenant à j, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous apprend donc

$$\begin{aligned} |\mathfrak{U}|^2 &\leqq \mathfrak{Z} \sum_{x \text{ dans } j} \left| \sum_{\substack{y \text{ dans } \mathfrak{Y} \\ (x,\, y) \text{ dans E}}} e^{2\pi i\beta xy} \right|^2 \\ &= \mathfrak{Z} \sum_{x \text{ dans } j} \sum_{y \text{ dans } \mathfrak{Y}} \sum_{\substack{y' \text{ dans } \mathfrak{Y} \\ (x,\, y) \text{ et } (x,\, y') \text{ dans E}}} e^{2\pi i\beta x(y-y')} \\ &= \mathfrak{Z} \sum_{y \text{ dans } \mathfrak{Y}} \sum_{y' \text{ dans } \mathfrak{Y}} \sum_{x}{}''' e^{2\pi i\beta x(y-y')}; \end{aligned}$$

$\sum_{x}'''$ est étendu à toutes les valeurs entières x appartenant à j, telles que (x, y) et (x, y') appartiennent à E, de sorte que x parcourt un système de nombres entiers consécutifs. $\sum_{x}'''$ étant la somme d'une progression arithmétique, peut être mis sous une forme simple, de sorte qu'on trouve ainsi une borne supérieure pour la valeur absolue de $\mathfrak{U}$. L'application de cette idée nous fournit en effet l'inégalité demandée (11).

Dans ce que je viens de vous dire, j'ai tâché de vous exposer en grands traits la méthode ingénieuse et pourtant élémentaire de notre grand savant. Ce qui n'est pas encore démontré, c'est cette question-ci : est-ce que l'hypothèse de Goldbach est vraie ou non pour les nombres pairs ? Du résultat de M. Vinogradow il suit immédiatement que tout nombre pair suffisamment grand Q est la somme de quatre nombres premiers, car $Q - 3$ est alors impair.

Nous devons savoir gré à l'éminent mathématicien russe de nous avoir fourni une méthode par laquelle il a non seulement pu résoudre l'hypothèse de Goldbach pour les nombres impairs, mais qui nous fournit également une grande perspective pour des découvertes futures.

Et maintenant, Mesdames et Messieurs, finissant ma tâche devant vous, une tâche qui m'a été rendue bien facile vu votre attention et votre honorable présence, il ne me reste qu'à vous remercier de tout cœur de votre bienveillance et à témoigner ma gratitude à la Société mathématique de France pour l'invitation flatteuse qu'elle m'a fait parvenir.

J. G. VAN DER CORPUT
(Groningue).