BULLETIN DE LA S. M. F.

L. GODEAUX

Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genres un, contenant des involutions cycliques

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 65-86 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S65_0>

Réun. intern. Math. (1937, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Suppl. 1939, p. 65 à 86.

SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES A TROIS DIMENSIONS DE GENRES UN CONTENANT DES INVOLUTIONS CYCLIQUES

Par M. L. GODEAUX.

Nous avons étudié, dans des travaux antérieurs, les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis (1). Les points unis d'une telle involution peuvent être de deux sortes, suivant que la transformation birationnelle génératrice de l'involution détermine, dans le faisceau des tangentes à la surface au point uni, l'identité ou non. Dans le premier cas, on a un point uni parfait, dans le second, un point uni non parfait.

Considérons une variété algébrique V à trois dimensions et supposons qu'il existe, sur cette variété, une involution I_p, cyclique, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Dans la gerbe des tangentes à la variété V en un point uni A, la transformation birationnelle T, génératrice de l'involution, détermine, soit l'identité, soit une homologie, soit une homographie non homologique. Nous aurons donc à considérer trois espèces de points unis.

(1) On trouvera un résumé de nos recherches et la bibliographie relative à la question dans notre exposé, *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient. et industr.*). Paris, Hermann, 1935. *Voir* aussi, dans la même collection, nos exposés : *Questions non résolues de géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions* (1933). *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (1934).

Nos premières recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique ont porté sur le cas où la surface support de l'involution est de genres un ($p_a = P_4 = 1$); on trouve alors comme surfaces images des involutions, soit des surfaces de genres un, soit des surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Nous commencerons également nos recherches sur les involutions appartenant à la variété V dans l'hypothèse où celle-ci est de genres un.

Précisons nos hypothèses. Un système linéaire de surfaces, $|F|$, tracées sur la variété V, possède un adjoint $|F'|$, formé des surfaces découpant, sur les surfaces F, les courbes canoniques de celles-ci. $|F'|$ possède à son tour un adjoint $|F''|$, que l'on appelle le biadjoint de $|F|$, et ainsi de suite (¹). Si le $k^{\text{ième}}$ adjoint de $|F|$ coïncide avec ce système, aucun des adjoints précédents ne possédant la même propriété, la même particularité se présente pour tout système linéaire de surfaces tracées sur V et nous dirons que sur cette variété, l'opération d'adjonction a la période k. La variété V est alors dépourvue de surfaces canonique, bicanonique, ..., $(k-1)$-canonique, mais possède une surface k-canonique d'ordre zéro. Et bien, nous supposons que sur la variété V support des involutions étudiées, l'opération d'adjonction a la période un, tandis que sur les variétés images des involutions, l'opération d'adjonction est périodique. On voit du reste aisément que cette période ne peut être que un ou p.

Nous avons déjà étudié antérieurement les cas $p = 2$ et $p = 3$, ce qui nous a permis d'établir l'existence de variétés sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période deux ou trois (²). Dans ce travail,

---

(¹) En ce qui concerne les fondements de la géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions, consulter F. SEVERI, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1909, t. 28, p. 33-87).

(²) *Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, 9 *déc.* 1935, p. 1169-1170); *Sur une variété algébrique à trois dimension de bigenre un* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1937, p. 93-101); *Sur quelques variétés algébriques à trois dimensions ayant des surfaces canonique et pluricanonique d'ordre zéro* (*id*, p. 200-218); *Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois* (*id.*, p. 335-342); *Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1937, p. 82-96); *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1937, p. 55-79).

nous supposons p quelconque (premier) et nous étudions l'influence des points unis de première et de seconde espèce: nous sommes parvenu à déterminer la structure de ces points unis satisfaisant au problème posé.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier p; soit T la transformation birationnelle de V en elle-même génératrice de l'involution. Nous supposerons que l'involution I_p possède au plus un nombre fini de points unis, isolés, simples pour la variété et non fondamentaux pour la transformation T.

Considérons un point uni A de l'involution I_p et soit α l'espace à trois dimensions tangent à V en A. La transformation T détermine, dans le domaine du premier ordre du point A sur la variété V, une certaine opération: en d'autres termes, elle implique l'existence d'une certaine homographie H, de période p, dans la gerbe de rayons de sommet A, appartenant à l'espace α. Cette homographie peut être l'identité, une homologie ou une homographie non homologique. Nous sommes donc conduit à répartir les points unis de l'involution I_p en trois catégories :

1° Points unis de première espèce ou points unis parfaits. En un tel point, l'homographie H est l'identité et tous les points du domaine du premier ordre de ce point sur V sont unis pour T.

2° Points unis de seconde espèce. En un tel point, H est une homologie et dans le domaine du premier ordre de ce point sur V, il y a une ligne de points unis et un point uni isolé.

3° Points unis de troisième espèce. En un tel point, H est une homographie non homologique et dans le domaine du premier ordre de ce point sur V, il y a trois points unis.

Soit V′ une transformée birationnelle de V choisie de telle sorte qu'au point A corresponde une surface exceptionnelle φ' (rationnelle). A T correspond une transformation birationnelle T′ de V′ en elle-même et pour cette transformation T′, la surface φ' est unie. Si A est un point uni de première espèce, tous les points de φ' sont unis pour T′; si c'est un point uni de seconde espèce, il existe sur la surface φ' un point uni isolé et une courbe (rationnelle) de points unis; si enfin A est un point uni de troisième espèce, la surface φ' contient trois points unis isolés pour T′.

Observons d'ailleurs que les points unis isolés de φ' pourront à leur tour être classés en trois catégories comme les points unis de T, et ainsi de suite.

2. Soit $|L_1|$ un système linéaire de surfaces tracées sur la variété V, simple, n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} font correspondre à $|L_1|$ des systèmes linéaires $|L_2|$, $|L_3|$, ..., $|L_p|$, simples, n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, puisque par hypothèse ceux-ci ne sont pas fondamentaux pour la transformation T. Considérons le système linéaire complet

$$|F| = |L_1 + L_2 + \ldots + L_p|.$$

Il est transformé en lui-même par T et cette transformation opère comme une homographie cyclique sur les éléments de $|F|$.

Désignons par $|F_1|$ le système linéaire de surfaces F, composé au moyen de I_p, de dimension maximum, comprenant les surfaces $L_1 + L_2 + \ldots + L_p$. Ce système $|F_1|$, d'après les hypothèses faites, n'a pas pour points-base des points unis de I_p et ne peut être composé au moyen d'une involution distincte de I_p.

En répétant le raisonnement que nous avons eu l'occasion de faire ailleurs, dans le cas $p = 3$ (1), on montre que l'on peut supposer que :

1° Le système $|F|$ est plus ample que le système $|F_1|$ et est donc simple;

2° Le système $|F|$ contient, outre $|F_1|$, $p - 1$ systèmes linéaires partiels $|F_2|$, $|F_3|$, ..., $|F_p|$, composés au moyen de l'involution I_p;

3° La dimension de $|F|$ et celle de $|F_1|$ peuvent être supposées aussi grandes qu'on le veut.

Il suffit de remplacer éventuellement $|F|$ par un de ses multiples convenablement choisi.

Nous désignerons par r la dimension de $|F|$, par r_1, r_2, ..., r_p celles de $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$ respectivement. On a, d'ailleurs, d'après la théorie des homographies cycliques,

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_p + p = r + 1.$$

Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la variété V correspond biration-

(1) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre* (*loc. cit.*).

nellement une variété que nous désignerons toujours par V. A T correspond une transformation birationnelle de la nouvelle variété V en elle-même, échangeant entre elles les sections hyperplanes de cette variété; cette transformation est donc déterminée par une homographie de S_r, homographie que nous désignerons encore par T.

Le système $|F|$ contenant p systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p, l'homographie T possède p axes ponctuels (espaces linéaires lieux de points unis) que nous désignerons par $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(p)}$ et dont les dimensions sont respectivement $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

Soit Σ_i le système des hyperplans de S_r passant par tous les espaces $S^{(1)}, \ldots, S^{(p)}$ sauf par $S^{(i)}$. Les surfaces du système $|F_i|$ sont découpées sur V par les hyperplans de Σ_i.

En particulier, les surfaces du système $|F_1|$ sont découpées par les hyperplans de Σ_1; ce système n'a pas pour points-base des points unis de I_p, par conséquent les points unis de l'involution I_p appartiennent tous à l'axe $S^{(1)}$. L'ensemble des points communs à cet axe et à la variété V est celui des points unis.

Soient A un point uni, α l'espace à trois dimensions tangent à V en ce point. L'espace α est transformé en lui-même par l'homographie T. Les points unis de I_p étant par hypothèse isolés, l'espace α n'a que le point A en commun avec l'axe $S^{(1)}$. Dans α, T détermine une homographie H ayant le point uni isolé A.

Suivant que le point uni A est de première, de seconde ou de troisième espèce, l'homographie H est une homologie de centre A, ou une homographie axiale hyperbolique générale, ou une homographie ayant quatre points unis sommets d'un tétraèdre. Les points unis de H, distincts de A, doivent appartenir aux axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$ de l'homographie T.

Si A est un point uni de première espèce, α rencontre l'un des axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$ suivant un plan (plan d'homologie); si A est un point uni de seconde espèce, α rencontre un de ces axes suivant une droite et un autre suivant un point; enfin si A est un point uni de troisième espèce, α rencontre trois des axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$, chacun suivant un point.

3. Rapportons projectivement les surfaces du système $|F_1|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions, S_{r_1}. Aux groupes de l'involution I_p correspondent les points d'une variété algébrique à trois dimensions Ω, image de l'involution. Nous désignerons par Φ_1 les sections hyperplanes de la variété Ω; ce sont les surfaces qui cor-

respondent aux surfaces F_1. Nous désignerons par $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_p$ les surfaces qui correspondent respectivement sur Ω aux surfaces F_2, $F_3, \ldots, F_p$. Les systèmes $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$ sont complets.

Le système $|F_1|$ n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, à ceux-ci correspondent sur Ω des points isolés, points de diramation pour la correspondance $(1, p)$ existant entre Ω et V. Ces points sont d'ailleurs singuliers pour Ω et sont équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à certains ensembles de surfaces rationnelles infiniment petites.

Entre une surface Φ_1 et la surface F_1 homologue, existe une correspondance $(1, p)$ en général dépourvue de points de diramation. Par conséquent, si l'on désigne par p_a, $p^{(1)}$ le genre arithmétique et le genre linéaire des surfaces F, par π_a, $\pi^{(1)}$ ceux des surfaces Φ_1 on a (¹)

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1), \qquad p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1).$$

4. Nous allons, dans ce qui suit, supposer que la variété V considérée satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle possède une surface canonique d'ordre zéro;
2° Son irrégularité superficielle est nulle.

La première condition équivaut à supposer que tout système linéaire de surfaces tracées sur V est son propre adjoint. On a donc $|F'| = |F|$. Les adjoints successifs de $|F|$ coïncident avec ce système et toutes les surfaces pluricanoniques de V sont d'ordre zéro. Le genre géométrique et les plurigenres de V sont tous égaux à l'unité

$$(P_g = P_2 = \ldots = P_n = \ldots = 1).$$

Le genre arithmétique P_a de la variété V est donné par

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4.$$

Ω_0, Ω_1, Ω_2 étant respectivement le degré, le genre curviligne et le genre arithmétique de la surface canonique de V. En utilisant les formules de M. Severi (²) permettant de calculer ces caractères en fonction de ceux d'un système linéaire $|F|$ et de son adjoint $|F'| = |F|$.

(¹) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1919, p. 1-16).

(²) *Fondamenti*... (*loc. cit.*).

on trouve

$$\Omega_0 = 0, \qquad \Omega_1 = 1, \qquad \Omega_2 = -1,$$

et par suite $P_a = 1$. La variété V est donc complètement régulière.

Représentons par (F, F) la courbe commune à deux surfaces de |F|. Puisque ce système est son propre adjoint, ses surfaces découpent, sur l'une d'entre elles, le système canonique |(F, F)| de celle-ci. Or, le défaut de ce système est, d'après un théorème de M. Severi ([1]), au plus égal à l'irrégularité superficielle de la variété V; cette irrégularité étant nulle, les surfaces F découpent, sur l'une d'entre elles, le système canonique complet.

De plus, d'après un théorème de MM. Castelnuovo et Enriques ([2]), si les courbes (F, F) sont irréductibles, les surfaces F sont régulières. Par conséquent, si p_a est le genre arithmétique des surfaces F, p_g leur genre géométrique, la dimension r du système |F| est égale à

$$r = p_a = p_g.$$

La variété Ω, représentant une involution appartenant à une variété V d'irrégularité superficielle nulle, est elle-même d'irrégularité superficielle nulle, car si Ω possédait des intégrales de différentielles totales de première espèce, il en serait de même de la variété V.

5. Reprenons l'examen de l'involution I_p appartenant à la variété V et observons que les courbes (F, F) sont irréductibles.

Nous supposerons que la variété Ω n'a pas tous ses genre géométrique et plurigenres nuls, c'est-à-dire qu'elle possède, soit une surface canonique, soit une surface pluricanonique.

Envisageons une surface $F_1^\star$ et son homologue $\Phi_1^\star$. Les systèmes linéaires de courbes

$$|(\Phi_1^\star, \Phi_1)|, \quad |(\Phi_2^\star, \Phi_2)|, \quad \ldots, \quad |(\Phi_1^\star, \Phi_p)|$$

tracés sur cette dernière surface ont pour transformés, sur $F_1^\star$, des courbes appartenant totalement au système canonique de cette surface. Par conséquent, d'après un théorème de M. Enriques ([3]), l'un de ces systèmes est le système canonique de $\Phi_1^\star$.

([1]) *Fondamenti...* (*loc. cit.*).

([2]) *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1906, p. 339-366).

([3]) *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (*Memorie della R. Accademia di Torino*, 1893, p. 171-232).

Deux cas peuvent se présenter :

1° Le système canonique de Φ_1^* est découpé, sur cette surface, par les surfaces Φ_1. Le système $|\Phi_1|$ est alors son propre adjoint et la variété Ω possède une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro. Tout système linéaire tracé sur Ω est son propre adjoint.

2° Le système canonique de Φ_1^* est découpé par l'un des systèmes $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_p|$, par exemple par $|\Phi_2|$. On a donc

$$|\Phi'_1| \equiv |\Phi_2|.$$

Si p est supérieur à 2, $|\Phi_1|$ ne peut être l'adjoint de $|\Phi_2|$, car alors la variété Ω serait dépourvue de surface canonique, mais posséderait une surface bicanonique d'ordre zéro; l'adjoint de $|\Phi_3|$ serait distinct de $|\Phi_3|$ et serait l'un des systèmes $|\Phi_4|$, $|\Phi_5|$, ..., $|\Phi_p|$, par exemple $|\Phi_4|$. L'adjoint de $|\Phi_4|$ serait nécessairement $|\Phi_3|$.

En considérant l'adjoint de $|\Phi_5|$ et ainsi de suite, on parviendrait à cette conclusion, p étant premier et supérieur à deux, que le système $|\Phi_p|$ est nécessairement son propre adjoint, ce qui serait contradictoire.

L'adjoint de $|\Phi_2|$ doit donc être distinct de $|\Phi_1|$; supposons que ce soit $|\Phi_3|$. L'adjoint de $|\Phi_3|$ ne peut être $|\Phi_3|$ et d'autre part, si p est supérieur à trois, il ne peut coïncider avec $|\Phi_1|$, car Ω serait dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais posséderait une surface tricanonique d'ordre zéro. p n'étant pas divisible par 3, on parviendrait comme plus haut à une contradiction.

En continuant ce raisonnement, on voit que les adjoints de $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_p|$ sont ces systèmes rangés dans un autre ordre, cyclique, par exemple sont respectivement $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_p|$, $|\Phi_1|$. La variété Φ est dépourvue de surfaces canonique, bicanonique, ..., $(p-1)$-canonique, mais possède une surface p-canonique d'ordre zéro. En d'autres termes, l'opération d'adjonction sur cette variété a la période p.

Si la variété Ω n'a pas tous ses genre geométrique et plurigenres nuls, l'opération d'adjonction, sur cette variété, est l'identité ou a la période p.

6. Supposons en premier lieu que l'involution I_p soit dépourvue de points unis, c'est-à-dire que l'axe $S^{(1)}$ ne rencontre pas la variété V.

Nous avons démontré que si une surface algébrique possède une involution cyclique d'ordre premier, dépourvue de points unis, le transformé du système canonique de la surface image de cette involution, est celui des systèmes composés au moyen de l'involution, compris dans le système canonique de la surface support de l'involution, qui a la dimension minimum.

Cela étant, supposons les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$ rangés dans l'ordre non décroissant

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \ldots \leqq r_p.$$

D'après le théorème que nous venons de rappeler, le système canonique de la surface Φ_1^* a pour transformé sur la surface F_1^* homologue, le système $|(F_1^*, F_1)|$; ce système a en effet la dimension $r_1 - 1$, inférieure aux dimensions $r_2, r_3, \ldots, r_p$ des systèmes $|(F_1^*, F_2)|$, $|(F_1^*, F_3)|, \ldots, |(F_1^*, F_p)|$. On a donc

$$|\Phi_1'| = |\Phi_1|$$

et la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro. Par conséquent, on a

$$|\Phi_2'| = \Phi_2|, \qquad |\Phi_3'| = |\Phi_3|, \qquad \ldots, \qquad |\Phi_p'| = |\Phi_p|.$$

D'après le théorème rappelé, les nombres $r_1 - 1, r_2 - 1, \ldots, r_p - 1$ sont inférieurs à tous les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Par conséquent tous ces nombres doivent être égaux. On a donc

$$p(r_1 + 1) = r + 1.$$

Mais d'autre part, comme nous l'avons vu, $p_a = r$ et, pour la même raison, les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ sont de genre arithmétique $\pi_a = r$. On retrouve donc la relation

$$p(\pi_a + 1) = p_a + 1.$$

Si l'involution I_p est privée de points unis, la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro et un système linéaire de surfaces, tracé sur la variété V, invariant pour l'homographie T, possède en général p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p, ces p systèmes ayant la même dimension.

7. Supposons en second lieu que l'involution I_p possède un point uni parfait A. Nous supposerons que l'espace à trois dimensions α

tangent à la variété V au point A, rencontre l'axe $S^{(2)}$ de l'homographie T suivant un plan.

Considérons une surface F_2. Elle est découpée sur V par un hyperplan de Σ_2, ne contenant pas $S^{(2)}$ et coupant par conséquent l'espace α suivant un plan α'; le plan α' est le plan tangent en A à la surface F_2 considérée. Ce plan varie en général avec la surface F_2 et par conséquent la courbe commune à deux surfaces F_2 a en général un point simple en A.

Les ∞^2 groupes de I_p appartenant à une surface F_2 forment sur cette surface une involution ayant en A un point uni parfait, par conséquent les surfaces F_1 passant par A coupent F_2 suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p en A ([1]). Les surfaces $F_3, F_4, \dots, F_p$ passent toutes par A et les courbes suivant lesquelles elles coupent la surface F_2 ont en A des multiplicités toutes différentes, comprises entre 2 et $p-1$ ([2]). Pour fixer les idées, nous supposerons que les courbes (F_2, F_3) ont en A un point double, les courbes (F_2, F_4) un point triple, ..., les courbes (F_2, F_p) un point multiple d'ordre $p-1$.

En faisant varier la surface F_2, on voit que les surfaces F_1 passant par A ont la multiplicité p en ce point, les surfaces F_3 un point double, les surfaces F_4 un point triple, ..., les surfaces F_p un point multiple d'ordre $p-1$. D'ailleurs, les hyperplans découpant sur V les surfaces $F_3, F_4, \dots, F_p$ et les surfaces F_1 passant par A, contiennent l'espace α et doivent donc avoir un point multiple en A.

Soit A' le point de diramation de la variété Ω homologue de A. Deux surfaces F_1 passant par A se coupent suivant une courbe ayant un point multiple d'ordre p^2 en A et les p^2 points de cette courbe infiniment voisins de A sont tous unis pour l'involution I_p. Par conséquent, les espaces à r_1-1 dimensions de S_{r_1} passant par A' coupent Ω suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p^2 en A'. Il en résulte que ce point est multiple d'ordre p^2 pour Ω. Il y a une projectivité entre les hyperplans de Σ_1 passant par A et les hyperplans de S_{r_1} passant par A', donc le cône tangent à Ω en A' est coupé par un hyperplan ne passant pas par A' suivant une surface d'ordre p^2 dont les sections hyperplanes représentent les courbes planes d'ordre p. Nous désignerons par Ψ une telle surface.

---

(1) *Recherches sur les involutions douées...* (*loc. cit.*).

(2) *Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1937, p. 37-40)

Une surface Φ_2 possède en A′ un point multiple d'ordre p, le cône tangent projetant de A′ une courbe rationnelle normale d'ordre p tracée sur la surface Ψ. Une surface Φ_3 possède en A′ un point multiple d'ordre $2p$, le cône tangent projetant de A′ une courbe d'ordre $2p$ tracée sur Ψ.... Enfin une surface Φ_p possède en A′ un point multiple d'ordre $(p-1)p$, le cône tangent projetant de A′ une courbe d'ordre $p(p-1)$ tracée sur Ψ.

Envisageons une surface Φ_2 et la surface F_2 homologue. Nous avons démontré [1] qu'aux courbes canoniques de la surface Φ_2 correspondaient sur F_2 des courbes canoniques ayant la multiplicité $p-2$ en A. Ces courbes étant découpées sur F_2 par les surfaces F_{p-1}, il en résulte que le système adjoint de $|\Phi_2|$ est

$$|\Phi'_2| = |\Phi_{p-1}|.$$

Supposons tout d'abord $p=2$. L'adjoint du système $|\Phi_2|$ est le système $|\Phi_1|$ et l'adjoint de ce dernier est nécessairement $|\Phi_2|$. La variété Ω est dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

Supposons maintenant $p=3$. L'adjoint de $|\Phi_2|$ est ce système lui-même et la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro. Nous avons démontré récemment que ce cas ne pouvait se présenter [2].

Supposons enfin $p>3$. L'adjoint de $|\Phi_2|$ est distinct de ce système et sur la variété Ω, l'opération d'adjonction a la période p. Le système $|\Phi_1|$ ne peut être l'adjoint de l'un des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, c'est donc l'adjoint d'un des systèmes $|\Phi_3|$, $|\Phi_4|$, ..., $|\Phi_p|$. Si nous considérons une surface Φ_i de l'un de ces systèmes ($i=3, 4, \ldots$ ou $p-1$) et la surface F_i homologue, comme cette surface F_i possède un point multiple en A et par conséquent une courbe unie infiniment petite, dans le domaine du premier ordre de ce point, à une courbe canonique de la surface Φ_i correspond, sur la surface F_i, d'après un théorème de M. Enriques, une courbe canonique qui comprend comme partie la courbe unie infiniment petite en question, comptée $p-1$ fois. Mais cela nous montre que le système $|\Phi_1|$ ne peut être l'adjoint de $|\Phi_i|$, car les surfaces F_1 ne passent pas en général par A. On en conclut que, pour $p>3$, l'involution I_3 ne peut posséder de point uni parfait.

---

(1) *Recherches sur les involutions douées...* (*loc. cit.*).

(2) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre...* (*loc. cit.*).

L'involution I_p ne peut posséder de points unis parfaits que pour $p=2$; dans ce cas, la variété Ω est dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

8. Avant d'aller plus loin, examinons de plus près les cas d'une involution I_2 d'ordre 2. Dans ce cas, l'espace α tangent à V, en un point uni A de I_2, doit nécessairement s'appuyer suivant un plan sur le second axe $S^{(2)}$ de l'homographie T. Tous les points unis de I_2 sont donc des points unis parfaits.

Soit τ le nombre de ces points unis. Les surfaces F_2 passent simplement par ces τ points. Désignons par p_a, $p^{(1)}$ les genre arithmétique et linéaire des surfaces F, par π_2, $\pi^{(1)}$ ceux des surfaces Φ_1, par π'_a, $\pi'^{(1)}$ ceux des surfaces Φ_2. Nous avons entre ces invariants les relations (¹)

$$p_a+1=2(\pi_a+1), \qquad 4(p_a+1)=8(\pi'_a+1)-\tau,$$
$$p^{(1)}-1=2(\pi^{(1)}-1), \qquad p^{(1)}-1=2(\pi'^{(1)}-1);$$

d'où $\pi'^{(1)}=\pi^{(1)}$. D'autre part, nous avons

$$p_a=r, \qquad \pi_a=r_2+1, \qquad \pi'_a=r_1+1, \qquad r_1+r_2+2=r+1.$$

On en conclut $\tau=16$.

Une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro, possède 16 *points unis.*

Un point de diramation de la variété Ω équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle infiniment petite. Désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{16}$ les seize surfaces de cette sorte existant sur Ω.

A une surface F correspond sur Ω une surface Φ appartenant totalement à un système linéaire. Lorsque F varie d'une manière continue dans $|F|$ et tend vers une surface F_1, la surface Φ tend vers une surface $2\Phi_1$. Lorsque F varie de même et tend vers une surface F_2, Φ tend vers une surface

$$2\Phi_2+\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_{16}.$$

(¹) *Recherches sur les involutions douées...* (*loc. cit.*).

On en conclut

$$(1) \qquad |2\Phi_1| = |2\Phi_2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{16}|.$$

Entre $|\Phi_1|$, son adjoint $|\Phi'_1|$, son biadjoint $|\Phi''_1|$, nous avons la relation

$$(2) \qquad |2\Phi'_1| = |\Phi''_1 + \Phi_1|.$$

Nous devons donc poser

$$\Phi'_1 = \Phi_2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{16};$$

d'où

$$\Phi''_1 = \Phi'_2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{16} = \Phi_1 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{16}.$$

Les relations fonctionnelles (1) et (2) sont alors identiques.

9. Appelons surface de Veronese d'indice p la surface obtenue en rapportant projectivement les courbes d'ordre p du plan aux hyperplans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}p(p+3)$ dimensions.

Nous avons montré plus haut que le point de diramation de la variété Ω correspondant à un point uni parfait A de I_p, était un point multiple d'ordre p^2 dont le cône tangent avait pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese d'indice p.

On observera que pour établir cette propriété, nous n'avons pas fait usage du fait que la variété V avait une courbe canonique d'ordre zéro ni qu'elle était d'irrégularité superficielle nulle. Le résultat est donc vrai pour une variété algébrique quelconque.

Si une involution d'ordre premier p, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, possède un point uni parfait isolé, on peut construire une variété image de cette involution pour laquelle le point de diramation correspondant a la multiplicité p^2, le cône tangent en ce point ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese d'indice p.

10. Nous allons maintenant étudier le cas où l'involution I_p possède un point uni de seconde espèce.

Supposons que l'espace à trois dimensions, α, tangent à la variété V au point uni A, s'appuie suivant une droite a_2 sur l'axe $S^{(2)}$ et suivant un point A_3 sur l'axe $S^{(3)}$ de l'homographie T.

Les surfaces F_2, découpées par les hyperplans de Σ_2, ne contenant donc pas $S^{(2)}$, ont un point simple en A, le plan tangent α_2 en ce point passant par la droite AA_3 et coupant le plan Aa_2 suivant une droite. Les groupes de I_3 appartenant à une surface F_2 forment une involution ayant un point uni non parfait en A, les points unis de I_p infiniment voisins de A étant situés l'un sur la droite AA_3, l'autre sur la droite commune aux plans α_2 et Aa_2.

Deux surfaces F_2 ont en commun une courbe ayant un point simple en A, la tangente en ce point étant la droite AA_3.

Les surfaces F_3, découpées sur V par les hyperplans de Σ_3, ne contenant donc pas $S^{(3)}$, ont un point simple en A, le plan tangent étant le plan Aa_2. Les ∞^2 groupes de I_p appartenant à une surface F_3 forment une involution ayant un point uni parfait en A. Les surfaces F_1 passant par A coupent donc les surfaces F_3 suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p en A. Les surfaces F_2 coupent les surfaces F_3 suivant des courbes ayant un point simple en A.

Aux courbes canoniques d'une surface Φ_3 correspondent, sur la surface homologue F_3, des courbes canoniques ayant un point multiple d'ordre $p-2$ en A.

Les surfaces F_4, F_5, ..., F_p sont découpées sur V par des hyperplans contenant l'espace α et ces surfaces ont par suite un point au moins double en A.

Considérons un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A, deux hyperplans de Σ_2 ne coupant pas le plan Aa_2 suivant une même droite, et un hyperplan de Σ_3 ne contenant pas la droite AA_3. Ces quatre hyperplans ont en commun un espace S_{r-4} ne rencontrant pas l'espace α et qui est d'autre part uni pour l'homographie T. Projetons les surfaces F à partir de cet espace S_{r-4} sur l'espace α; nous obtenons un système de surfaces F' (non linéaire), transformé en lui-même par l'homographie H induite par T dans l'espace α. Ce système comprend p systèmes de surfaces transformées en elles-mêmes par H; ce sont les surfaces F'_1, F'_2, ..., F'_p respectivement projections des surfaces F_1, F_2, ..., F_p. Les surfaces F' appartiennent à un système linéaire $|F'|$ comprenant p systèmes linéaires $|F'_1|$, $|F'_2|$, ..., $|F'_p|$ composés au moyen de l'involution I'_p d'ordre p engendrés par l'homographie H dans l'espace α.

Les surfaces F_1, F_2, ..., F_p auront le même comportement au point A que les surfaces F'_1, F'_2, ..., F'_p et celles-ci auront à leur tour le même comportement que les surfaces d'ordre p de α, unies pour l'homographie H. C'est de ces surfaces que nous allons tout d'abord nous occuper.

11. Dans l'espace α, l'homographie H est, comme nous l'avons observé, une homographie axiale hyperbolique générale dont A est un point uni isolé; elle peut toujours être représentée par les équations

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{\varepsilon x_1} = \frac{x'_2}{\varepsilon x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon^\alpha x_3},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et un entier compris entre 1 et p. Le point A coïncide avec le point $(1, 0, 0, 0)$, la droite a_2 avec la droite $x_1 = x_2 = 0$ et le point A_3 avec le point $(0, 0, 0, 1)$.

Considérons les systèmes linéaires de surfaces d'ordre p composés au moyen de l'involution I'_p engendrée par H. Posons

$$p = \lambda\alpha + h (h < \alpha)$$

et représentons par $\varphi_i(x_1, x_2)$ une forme algébrique de degré i, à coefficients variables.

L'un des systèmes considérés est dépourvu de points-base et est formé des surfaces dont l'équation peut s'écrire

$$(1) \qquad \Sigma x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p} x_3^i \varphi_{kp-i\alpha}(x_1, x_2) = 0,$$

où i et k sont des entiers positifs ou nuls satisfaisant aux inégalités

$$i(\alpha - 1) - (k - 1)p \geqq 0, \qquad kp - i\alpha \geqq 0.$$

Deux des systèmes sont formés de surfaces ayant des points simples en A et ayant pour équations

$$(2) \qquad \Sigma x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p-1} x_3^i \varphi_{kp-i\alpha+1}(x_1, x_2) = 0,$$

où

$$i(\alpha - 1) - (k - 1)p - 1 \geqq 0, \qquad kp - i\alpha + 1 \geqq 0$$

et

$$(3) \qquad \Sigma x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p-\alpha} x_3^i \varphi_{kp-\alpha(i-1)}(x_1, x_2) = 0,$$

où

$$i(\alpha - 1) - (k - 1)p - \alpha \geqq 0, \quad kp - \alpha(i - 1) \geqq 0.$$

Les $p - 3$ autres systèmes sont formés de surfaces ayant la multiplicité 2 au moins en A. Le terme contenant x_0 à la puissance la plus élevée dans l'équation d'une de ces surfaces est de la forme

$$x_0^{p-i-k} x_3^i \varphi_k(x_1, x_2), \qquad i + k \geqq 2.$$

Le plan tangent en A aux surfaces (2) est variable, le terme de degré le plus élevé en x_0 dans cette équation étant $x_0^{p-1}\varphi_1(x, x)$. Par conséquent, ces surfaces se comportent en A comme les surfaces F_2.

Le plan tangent en A aux surfaces (3) est fixe, le terme de degré le plus élevé en x_0 dans cette équation étant $x_0^{p-1}x_3$. Par suite, les surfaces (3) et les surfaces F_3 ont le même comportement en A.

Les surfaces (1) passant par A se comportent comme les surfaces F_1 passant par A.

12. Supposons que la variété Ω ait une surface canonique d'ordre zéro, c'est-à-dire que chacun des systèmes $|\Phi_1|\,|\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$ soit son propre adjoint.

L'involution déterminée par I_p sur une surface F_3 ayant un point uni parfait en A, les surfaces Φ_3 ont un point multiple d'ordre p, à cône tangent rationnel, au point de diramation correspondant A'. Sur une surface Φ_3, un tel point est équivalent à une courbe rationnelle de degré $-p$ et cette courbe est rencontrée en $p-2$ points par les courbes canoniques de la surface. Il en résulte que deux surfaces F_3 doivent se rencontrer suivant une courbe ayant un point multiple d'ordre $p-2$ en A, ou encore que deux surfaces (3) se rencontrent suivant une courbe ayant cette multiplicité en A.

Considérons la section d'une surface (3) par le plan $x_2 = \mu x_1$ et projetons cette section du point (0,1,0,0) sur le plan $x_2 = 0$, ce qui revient à remplacer x_2 par μx_1 dans l'équation (3). Nous obtenons la courbe

$$\sum x_0^{i(\alpha-1)-(k-1)p-\alpha}\, x_3^i x_1^{kp-\alpha(i-1)}\, \varphi_{kp-\alpha(i-1)}(1, \mu) = 0.$$

Pour analyser la singularité de cette courbe au point A, opérons $\beta - 1$ fois de suite la transformation quadratique

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^2 : z_0 z_1 : z_1 z_3,$$

c'est-à-dire la transformation

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^\beta : z_0^{\beta-1} z_1 : z_1^{\beta-1} z_3.$$

Nous obtenons ainsi la courbe

$$\sum z_0^{\beta(p-i)-kp+\alpha(i-1)}\, z_1^{kp-\alpha(i-1)+(\beta-1)i}\, z_3^i\, \varphi_{kp-\alpha(i-1)}(1, \mu) = 0.$$

Pour une valeur déterminée de k et pour $\beta < \alpha$, les exposants de z_0 croissent avec i; pour $\alpha = \beta$, ils sont égaux. D'autre part, la valeur maximum de i pour une valeur de k est $i = k(\lambda + 1)$ et pour $\beta \leqq \alpha$, les valeurs correspondantes des exposants de z_0 décroissent quand k croît. Cela étant, faisons $\beta = \alpha$ dans l'équation précédente et divisons les deux membres $z_1^{\alpha-1}$. Dans l'équation obtenue, les termes de degré le plus élevé en z_0 sont

$$z_0^{\alpha(p-1)}[z_1\varphi_\alpha(1, \mu) + z_3\varphi_0];$$

ils correspondent aux valeurs $k = 0$, $i = 0$ et 1.

D'autre part, à l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_3 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_3$$

correspond l'homographie

$$z'_0 : z'_1 : z'_3 = z_0 : \varepsilon z_1 : \varepsilon z_3.$$

Par conséquent, sur la courbe section d'une surface (3) par le plan $x_2 = \mu x_1$, il existe $\alpha - 1$ points simples infiniment voisins successifs de A, dont le dernier est uni parfait pour l'involution I'_p engendrée par H dans l'espace α.

Rapportons projectivement les surfaces (3) aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions que le système (3); aux groupes de I'_p correspondent les points d'une variété Ω' et au point A une surface tracée sur cette variété. Posons

$$\rho X_{ikj} = x_0^{\,i(\alpha-1)-(k-1)p-\alpha} x_3^i x_2^{\,kp-\alpha(i-1)j} x_2^j.$$

D'après ce qui précède, la surface qui correspond au point A sur Ω' sera située dans l'espace $S_{\alpha+1}$ donné par

$$X_{ikj} = 0 \qquad (k > 0).$$

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$X_{00j} = X_j, \qquad X_{100} = X_{\alpha+1}.$$

Au point uni parfait infiniment voisin de A situé sur la section de la surface (3) par le plan $x_2 = \mu x_1$ correspond dans $S_{\alpha+1}$ la droite d'équations

$$X_1 = \mu X_0, \qquad X_2 = \mu X_1, \qquad \ldots, \qquad X_\alpha = \mu X_{\alpha-1}.$$

Le lieu de cette droite, lorsque μ varie, est la surface

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{\alpha-1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_\alpha \end{matrix} \right\| = 0.$$

Au domaine du point A dans le plan $x_3 = 0$ correspond donc sur la variété Ω' une surface d'ordre α. Par conséquent, deux surfaces (3) ont en commun une courbe ayant un point multiple d'ordre α en A. Il en est de même de deux surfaces F_3 et par conséquent, on doit avoir $\alpha = p - 2$. Par suite, $p \geq 5$.

De ce qui précède, retenons que sur une surface F_3, les domaines des premier, second, ..., $(p-3)$ — ième ordres du point A sont formés de points unis pour I_p, les points du domaine d'ordre $p-3$ étant unis parfaits pour cette involution. Deux surfaces F_3 ont un contact d'ordre $p-3$ en A.

13. Nous allons rechercher la singularité de la variété Ω au point A'. D'après ce qui précède, cette singularité sera de la même nature que la singularité de la variété image de l'involution I'_p de α, obtenue en rapportant projectivement les surfaces (1) aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions que le système (1).

Observons que l'équation des surfaces (1) passant par le point A peut s'écrire sous la forme

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{2\nu} x_0^{p-3i} x_3^i \varphi_{2i}(x_1, x_2) + \sum_{i=0}^{\nu-1} x_0^{3i+2} x_3^{4\nu-i} \varphi_{2(\nu-i)-1}(x_1, x_2) + \varphi_p(x_1, x_2) + x_3^p = 0$$

si $p = 6\nu + 1$, et sous la forme

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{2\nu+1} x_0^{p-3i} x_3^i \varphi_{2i}(x_1, x_2) + \sum_{i=0}^{\nu} x_0^{3i+1} x_3^{4\nu+3-i} \varphi_{2(\nu-i)+1}(x_1, x_2) + \varphi_p(x_1, x_2) + x_3^p = 0$$

si $p = 6\nu + 5$.

Ces surfaces possèdent un point triple en A, le cône tangent étant

$$x_3\varphi_2(x_1, x_2) = 0.$$

Coupons la surface (4) par le plan $x_2 = \mu x_1$. La section est une courbe ayant un point triple en A, une des tangentes en ce point appartenant au plan $x_3 = 0$, les deux autres étant confondues avec la droite $x_1 = x_2 = 0$.

Rapportons projectivement les surfaces (4) aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions que le système (4). A cet effet, posons

$$\rho X_{ikjl} = x_0^i x_3^k x_1^j x_2^l.$$

Nous obtenons, en éliminant les x, les équations d'une variété image de I'_p sur laquelle, aux points infiniment voisins de A, correspondent les points d'une surface. Celle-ci appartient à un espace S_{p+6}, à $p+6$ dimensions, dont les coordonnées ponctuelles seront

$$X_{p-3.1.2-j.j} = X_j, \quad X_{0.0p-j.j} = X'_j, \quad X_{3\nu-1.3\nu+1.1-j.j} = X''_j, \quad X_{0p00} = X.$$

Après avoir posé dans l'équation (4), $x_2 = \mu x_1$, opérons la transformation

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^{p-2} : z_0^{p-3} z_1 : z_1^{p-3} z_3,$$

de manière à mettre en évidence, comme plus haut, le point uni parfait qui termine la suite des $p-3$ points infiniment voisins successifs de A situés sur la branche de la courbe considérée tangente en A au plan $x_3 = 0$. On constate ainsi qu'au domaine de ce point correspond sur la variété image de I'_p la droite d'équations

$$X_1 = \mu X_0, \qquad X_2 = \mu X_1, \qquad X'_1 = \mu X'_0,$$
$$X'_2, = \mu X'_1, \qquad \ldots, \qquad X'_p = \mu X'_{p-1}, \qquad X''_0 = X''_1 = X = 0,$$

située dans l'espace S_{p+6}. Le lieu de cette droite lorsque μ varie est la surface V_2^{p+2} d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X'_0 & X'_1 & \ldots & X'_{p-1} \\ X_1 & X_2 & X'_1 & X'_2 & \ldots & X'_p \end{matrix} \right\| = 0, \quad X''_0 = X''_1 = X = 0.$$

Elle représente les points du domaine du $(p-2)$ — ième ordre du point A sur les surfaces (3).

Opérons maintenant la transformation

$$x_0 : x_1 : x_3 = z_0^{3\nu} : z_0^{3\nu-1} z_1 : z_1^{3\nu-1} z_3.$$

On constate aisément qu'au point A sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles, dont le premier est sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ et dont le dernier est uni parfait pour I'_p. Aux points infiniment voisins de ce dernier point correspondent, sur la variété image de I'_p, les points de la conique

$$X_1 = \mu X_0, \qquad X_2 = \mu X_1,$$
$$X''_1 = \mu X''_0, \qquad X''^2_0 - X X_0 = 0, \qquad X'_0 = X'_1 = \ldots = X'_p = 0.$$

Le lieu de cette conique lorsque μ varie est la surface V_2^4 d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X''_0 \\ X_1 & X_2 & X''_1 \end{matrix} \right\| = 0, \qquad X''^2_0 - X X_0 = 0, \qquad X'_0 = X'_1 = \ldots = X'_p = 0,$$

appartenant à S_{p+6}.

Les surfaces V_2^{p+3}, V_2^4 ont en commun la conique

$$X_0 X_2 - X_1^2 = 0, \qquad X'_0 = X'_1 = \ldots = X'_p = 0, \qquad X''_0 = X''_1 = 0, \qquad X = 0.$$

De tout ceci on conclut que le point A′ est multiple d'ordre $p+6$ pour la variété Ω'. Le cône tangent à cette variété en ce point se compose d'un cône d'ordre $p+2$ et d'un cône d'ordre quatre, ayant en commun un cône du second ordre.

On arrive aux mêmes conclusions en partant des surfaces (5), le raisonnement étant le même.

On voit de plus qu'au point A′, les surfaces Φ_2 possèdent un point triple dont le cône tangent est formé d'un plan, appartenant au cône d'ordre $p+2$, et d'un cône du second ordre, appartenant au cône du quatrième ordre. Ce plan et ce cône se rencontrent suivant une droite.

Sur une surface Φ_2, le domaine du point A′ est donc équivalent à l'ensemble d'une droite et d'une conique se rencontrant en un point. Il est aisé de voir que la droite est de degré -2 et la conique de degré -3. Par conséquent, les courbes canoniques d'une surface Φ_2 ne rencontrent pas la droite, mais rencontrent la conique en un point. Il en résulte que deux surfaces F_2 doivent avoir en commun une courbe ayant un point simple en A, la tangente en ce point à cette courbe étant la droite AA_3 (ou $x_1 = x_2 = 0$). C'est bien ce qui a lieu comme nous l'avons fait remarquer plus haut.

Si la variété image de l'involution I_p *possède une surface canonique d'ordre zéro et si l'involution possède un point uni de seconde espèce, l'ordre de l'involution est au moins égal à cinq. Dans le voisinage du point uni se trouvent :*

a. Un élément de surface sur lequel les domaines d'ordre un, deux, ..., $p-3$ du point uni sont formés de points unis, les points du domaine d'ordre $p-3$ étant unis parfaits.

b. Un élément de courbe, non tangent à l'élément de surface précédent, sur lequel se trouve une suite de $\frac{1}{2}(p-3)$ points unis dont le dernier est uni parfait.

14. Supposons maintenant que sur la variété Ω, l'opération d'adjonction ait la période p. Le système $|\Phi_1|$ est l'adjoint de l'un des systèmes $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_p|$, par exemple de $|\Phi_i|$ $(i \geqq 2)$. Comme les surfaces Φ_1 ne passent par aucun des points de diramation de Ω, les surfaces Φ_i doivent avoir en ces points des singularités sans influence sur leurs courbes canoniques, c'est-à-dire des points doubles non tacnodaux (ces points de diramation sont, comme on sait, nécessairement singuliers pour les surfaces Φ_i).

Comme nous l'avons vu, les surfaces F_3 ont un point uni parfait en A, par conséquent les surfaces Φ_3 ont un point multiple d'ordre p équivalent à une courbe rationnelle de degré $-p$, rencontrée en $p-2$ points par les courbes canoniques de ces surfaces. Il en résulte que les surfaces Φ_3 ne peuvent avoir comme adjointes les surfaces Φ_1.

Nous avons observé plus haut que les surfaces F_4, F_5, ..., F_p ont en A un point double au moins. D'autre part, les surfaces F_1 passant par A ont la multiplicité deux au moins en ce point, puisqu'elles sont découpées sur V par des hyperplans contenant l'espace tangent α. Il en résulte que les surfaces Φ_4, Φ_5, ..., Φ_p ont en A' un point de multiplicité supérieure à deux. Par conséquent, les courbes canoniques de ces surfaces passent par A' et elles ne peuvent avoir comme adjointes les surfaces Φ_1.

De tout ceci, il résulte que les surfaces Φ_1 doivent être les adjointes des surfaces Φ_2 et que celles-ci ne peuvent avoir en A' une multiplicité supérieure à deux. Mais alors, comme nous l'avons établi (1)

(1) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1931, p. 1131-1150).

les surfaces Φ_2 ont en A' des points doubles biplanaires auxquels sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Les surfaces F_1 passant par A coupent une surface F_2 suivant des courbes ayant un point double à tangentes fixes en A. L'une de ces tangentes coïncide avec la droite AA_3, l'autre est située dans le plan Aa_2. Sur chacune des branches d'une telle courbe, il existe $p-2$ points infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution, le dernier point de chaque suite étant uni parfait.

Dans le cas actuel, pour l'homographie H de l'espace α, on a $\alpha = p - 1$.

Si, sur une variété image de l'involution I_p, l'opération d'adjonction a la période p et si l'involution possède un point uni de seconde espèce, dans le voisinage de ce point se trouvent :

a. Un élément de surface sur lequel les domaines d'ordre un, deux, ..., $p-2$ du point considéré sont formés de points unis, les points du domaine d'ordre $p-2$ étant unis parfaits.

b. Un élément de courbe, non tangent à l'élément de surface précédent, sur lequel se trouve une suite de $p-2$ points unis dont le dernier est uni parfait.

Nous avons montré ([1]) que le cas $p = 3$ se présente effectivement.

LUCIEN GODEAUX.

([1]) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre...* (*loc. cit.*)