

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

## Sur la multiplication des fonctions elliptiques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 6 (1878), p. 68-71

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1878\\_\\_6\\_\\_68\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__68_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur la multiplication des fonctions elliptiques;*  
par M. LAGUERRE.

(Séance du 4 avril 1877.)

1. Je rappellerai d'abord une formule importante due à M. Hermite (1).

Étant donnée une forme homogène, à deux variables et du degré  $m$ ,  $U(x, y)$ , si l'on pose, suivant l'usage habituel,

$$U_1 = \frac{1}{m} \frac{dU}{dx}, \quad U_2 = \frac{1}{m} \frac{dU}{dy},$$

on a identiquement

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(\lambda x - U_1, \lambda y + U_2) \\ = U \left[ \lambda^n + \frac{n(n-1)}{1.2} A \lambda^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} B \lambda^{n-3} + \dots \right], \end{array} \right.$$

$A, B, \dots$  désignant des covariants de la forme  $U$ .

Je transformerai cette formule en posant

$$\lambda x - U_1 = t\xi, \quad \lambda y + U_2 = t\eta;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\xi U_1 + \eta U_2}{x\eta - y\xi}, \quad t = \frac{U}{x\eta - y\xi},$$

ou, en posant, pour abrégé,  $\xi U_1 + \eta U_2 = \Delta$ ,  $x\eta - y\xi = \omega$ ,

$$\lambda = \frac{\Delta}{\omega}, \quad t = \frac{U}{\omega}.$$

---

(1) *Deuxième Mémoire sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (Journal de Crelle, t. 52, p. 25).

En remplaçant respectivement, dans l'équation (1),  $\lambda x - U_1$ ,  $\lambda x - U_2$ ,  $\lambda$  et  $t$  par leurs valeurs, il viendra

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} U^{n-1}(x, y) U(\xi, \eta) &= \Delta^n + \frac{n(n-1)}{1.2} A \Delta^{n-2} \omega^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-1)}{1.2.3} B \Delta^{n-3} \omega^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose que  $U$  soit une forme du quatrième degré, en désignant par  $H$  son hessien, par  $J$  son covariant cubique du sixième degré, et par  $S$  son invariant quadratique, il viendra

$$(3) \quad U^3(x, y) U(\xi, \eta) = \Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\omega^4.$$

2. En extrayant la racine carrée du premier membre, on obtient la relation suivante :

$$U^3 U(\xi, \eta) = (\Delta^2 + 3H\omega^2)^2 + \omega^3 [4J\Delta + (SU^2 - 12H^2)\omega],$$

et l'on voit, en vertu du théorème fondamental d'Abel, que l'intégrale algébrique entière de l'équation différentielle

$$\frac{3dx}{\sqrt{U(x, y)}} + \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}},$$

où les quantités  $\eta$  et  $\gamma$  doivent, ainsi que dans ce qui suit, être remplacées par l'unité, est fournie par l'équation

$$4J(\xi U_1 + \eta U_2) + (SU^2 - 12H^2)(x\eta - \gamma\xi) = 0.$$

3. On obtient avec une égale facilité la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par 5, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$(4) \quad \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}} + \frac{5dx}{\sqrt{U(x, y)}} = 0.$$

Désignant, en effet, par  $a$  un covariant inconnu de  $U$ , il suffira de déterminer ce covariant, de telle sorte que le reste de l'opération, dans l'extraction de la racine carrée de

$$(\Delta + a\omega)^2 [\Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\omega^4],$$

soit divisible par  $\omega^5$ . On aura, en effet, identiquement

$$U^3(\Delta + a\omega)^2 U(\xi, \eta) = P^2 + (x\eta - y\xi)^5 [Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi)];$$

d'où il suit, en vertu du théorème d'Abel, que l'intégrale cherchée est fournie par la résolution de l'équation

$$Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi) = 0.$$

Pour effectuer le calcul, remplaçons pour un instant  $\Delta$  par  $z$  et  $\omega$  par 1; on trouvera aisément

$$\begin{aligned} & (z + a)^2 (z^4 + 6H z^2 + 4J z + SU^2 - 3H^2) \\ & = (z^2 + a z^2 + 3H z + 2J + 3aH)^2 + (SU^2 - 12H^2 + 4aJ) z^3 \\ & \quad + [2a(SU^2 - 12H^2) + 4(a^2 - 3H)J] z \\ & \quad + a^2(SU^2 - 12H^2) - 4J^2 - 12aJH; \end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de  $z^3$ , on a

$$a = \frac{12H^2 - SU^2}{4J},$$

et le reste de l'opération de l'extraction de la racine carrée devient

$$\begin{aligned} & - \frac{[(SU^2 - 12H^2)^2 + 48HJ^2]}{4J} z \\ & + \frac{[(SU^2 - 12H^2)^3 - 48HJ^2(SU^2 - 12H^2) - 64J^3]}{16J^2}. \end{aligned}$$

L'intégrale algébrique de l'équation (5) est donc donnée par l'équation

$$\begin{aligned} & 4J[(SU^2 - 12H^2)^2 + 48HJ^2](\xi U_1 + \eta U_2) \\ & - [(SU^2 - 12H^2)^3 - 48HJ^2(SU^2 - 12H^2) - 64J^3](x\eta - y\xi) = 0. \end{aligned}$$

4. On trouverait de même la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par un nombre impair quelconque  $n$ , ou, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$(5) \quad \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}} + \frac{ndx}{\sqrt{U(x, y)}} = 0.$$

Le problème revient, comme on le voit par ce qui précède, à déterminer deux polynômes entiers  $F(z)$  et  $f(z)$  qui soient respective-

ment du degré  $\frac{n-3}{2}$  et du degré  $\frac{n+1}{2}$ , et tels que l'on ait

$$(6) \quad F^2(z) W(z) = f^2(z) + \alpha z + \beta,$$

où j'ai posé, pour abrégé,

$$W(z) = z^4 + 6Hz^2 + 4Jz + SU^2 - 3H^2,$$

et où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent des covariants de  $U$  indépendants de  $z$ .

La première méthode qui se présente pour résoudre ce problème est celle que j'ai employée dans les exemples précédents; en mettant en évidence les  $\frac{n-3}{2}$  coefficients actuellement indéterminés de  $F(z)$ , et extrayant la racine de  $F^2(z) W(z)$ , on profitera de l'indétermination de ces coefficients pour annuler les coefficients des  $\frac{n-3}{2}$  premiers termes du reste, qui sera nécessairement de la forme

$$\alpha z + \beta,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des fonctions connues des covariants de  $U$ .

L'intégrale cherchée de l'équation (5) sera alors donnée par la relation

$$\alpha(\xi U_1 + \eta U_2) + \beta(x\eta - y\xi) = 0.$$

Mais on peut rattacher la détermination des polynômes  $F(z)$  et  $f(z)$ , et par conséquent du reste  $\alpha z + \beta$ , à la réduction de l'expression  $\sqrt{W(z)}$  en fonction continue.

De l'équation (6) on déduit, en effet,

$$F(z) \sqrt{W(z)} = f(z) + \frac{\alpha z + \beta}{F(z) \sqrt{W(z)} + f(z)};$$

le dénominateur de la fraction  $\frac{\alpha z + \beta}{F(z) \sqrt{W(z)} + f(z)}$  est du degré  $\frac{n+1}{2}$ , d'où il suit que le développement de  $F(z) \sqrt{W(z)} - f(z)$  commence par un terme de l'ordre de  $\frac{1}{x^{\frac{n-3}{2}+1}}$ .

La fraction  $\frac{f(z)}{F(z)}$  est donc une des réduites obtenues en développant  $\sqrt{W(z)}$  en fraction continue, celle dont le dénominateur est du degré  $\left(\frac{n-3}{2}\right)$ .

---