J. BOURGET

Théorie mathématique des expériences de Pinaud relatives aux sons rendus par les tubes chauffés

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 87-101

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__87_0>

Théorie mathématique des expériences de Pinaud, relatives aux sons rendus par les tubes chauffés; par M. J. Bourget.

(Séance du 5 février 1873)

INTRODUCTION

En 1835 (*), Pinaud, professeur de physique à Toulouse, a fait connaître et a étudié un phénomène acoustique remarquable qui se produit quand on laisse refroidir un tube thermométrique à l'extrémité duquel est soufflée une boule. Si, après avoir chauffé assez fortement la boule, on la retire de la flamme, l'air extérieur, en rentrant par le tube, produit un son très-pur.

Pinaud a étudié avec soin la liaison qui existe entre la hauteur du son produit et les divers éléments de l'appareil. Dans son mémoire, il formule ainsi les trois lois générales auxquelles il est arrivé :

1re Loi. — Le son produit dans un tube de verre terminé par une boule échauffée est d'autant plus grave que le tube est plus long, toutes choses égales d'ailleurs.

2e Loi. — La longueur et le diamètre du tube restant les mêmes, le son est d'autant plus grave que la boule qui termine le tube a un plus grand diamètre.

3e Loi. — Toutes choses égales d'ailleurs, le son produit est d'autant plus aigu que le tube a un plus grand diamètre.

Il a cherché ensuite une formule empirique donnant le nombre des vibrations sonores en fonction de la longueur du tube, de son rayon et du rayon de la boule. En désignant par n le nombre des vibrations complètes, par l la longueur du tube, par r son rayon, par R celui de la boule, enfin par C un coefficient constant, il a trouvé qu'on pouvait prendre

$$n = C\frac{r^\alpha}{l^\beta R^\gamma},$$

α, β, γ étant des constantes données par l'expérience. Son mémoire n'indique par les valeurs qu'il a trouvées pour ces constantes.

Les expériences de Pinaud ont été répétées, d'abord par C. Marx (**), puis par M. Sondhaus (***). Ce dernier a donné une formule très-simple pour dé-

(*) *L'Institut*, t. III, p. 366; 1835. — J'ai pris la plupart des renseignements historiques qui suivent dans l'excellente analyse des travaux de M. Sondhaus sur ce sujet, faite par M. Bertin (*Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. XXV, p. 207; 1872).

(**) *Erdmann's Journal f. prakt. Chem.*, t. XXII, p. 129; 1841.

(***) *Ann. de Pogg.*, t. LXXIX, p. 1; 1850. — *Ibid.*, t. CXL, p. 53-76 et 219-242.

terminer le nombre n des vibrations doubles. En nommant V le volume de la boule, L la longueur du tube thermométrique, S sa section, on a

$$(1) \qquad n = C\sqrt{\frac{S}{VL}};$$

C est une constante égale à 52,2, si le mètre est pris pour unité de longueur. Cette formule est sensiblement d'accord avec l'expérience, mais M. Sondhaus ne donne aucune raison théorique qui permette de la regarder comme représentant vraiment les lois du phénomène.

M. Sondhaus a été plus loin, il a étudié le cas de plusieurs tubes soudés au même réservoir. Si deux tubes égaux sont soudés à une boule aux extrémités du même diamètre, il suppose qu'il se forme un plan nodal perpendiculaire à la ligne des tubes, et qui divise la boule en deux parties égales de volume $\frac{V}{2}$, de telle sorte qu'on doit avoir

$$(2) \qquad n = C\sqrt{\frac{2S}{VL}}.$$

Cette formule empirique est encore d'accord avec l'expérience.

Dans le cas où plusieurs tubes (S,L), (S',L'), (S'',L'') sont soudés à un même réservoir de volume V, M. Sondhaus, se fondant sur le même principe, écrit pour ce système complexe

$$(3) \qquad n = C\sqrt{\frac{\frac{S}{L}+\frac{S'}{L'}+\frac{S''}{L''}}{V}}.$$

Les expériences qu'il rapporte pour 3 et 4 tubes sont toutefois peu concluantes, l'appareil ne vibrait qu'avec beaucoup de difficultés.

Je me propose de faire connaître les lois véritables des phénomènes observés par Pinaud et M. Sondhaus. Le problème à résoudre est, comme on verra, assez facile, en s'appuyant sur les principes donnés par Duhamel, dans son mémoire sur les tuyaux à cheminée.

Les formules auxquelles j'arrive sont compliquées. La détermination de n dépend en réalité d'une équation transcendante, mais en tenant compte de cette circonstance que la section S des tubes thermométriques est très-faible par rapport à celle du réservoir, je retombe précisément sur les formules de M. Sondhaus.

Ces formules pourront donc désormais être regardées, au point de vue physique, comme théoriques, puisqu'elles donnent une valeur suffisamment approchée des nombres fournis par les formules véritables.

ANALYSE

1. Imaginons un réservoir AB cylindrique de longueur l et de section S, et, suivant son axe, un tube thermométrique soudé BC de longueur l' et de section S'. Supposons qu'il s'établisse dans cet appareil un mouvement vibratoire, tel que tous les points d'une même tranche, perpendiculaire à l'axe du tube, aient le même mouvement parallèle à l'axe. Désignons par x la distance au point A d'un point quelconque de AB et par x' la distance au point B d'un point quelconque de BC.

Les équations du mouvement vibratoire sont (voy. Duhamel, *Mécanique*)

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \frac{d^2\varphi'}{dt^2} = a'^2\frac{d^2\varphi'}{dx'^2}.$$

La première se rapporte au mouvement de l'air dans le réservoir, la seconde au mouvement de l'air dans le tube étroit. Dans ces équations, a désigne la vitesse du son dans le réservoir, a' la vitesse du son dans le tube étroit ; on sait que ces nombres sont un peu moindres dans les tuyaux sonores qu'à l'air libre, et que la perte de vitesse est d'autant plus grande que les tubes sont plus étroits, voilà pourquoi nous prenons des nombres différents pour les deux parties de l'appareil.

La vitesse v en un point quelconque et à une époque quelconque s'obtient par la formule

$$(2) \qquad v = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{ou} \quad v' = \frac{d\varphi'}{dx'}.$$

La densité variable ρ est liée à la densité à l'état d'équilibre D par la relation $\rho = D(1+s)$, et s est une fonction de x et de t, nommée *condensation*, que l'on obtient par la formule

$$(3) \qquad s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{ou} \quad s' = -\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt}.$$

2. Cela posé, le problème à résoudre est celui-ci :

Trouver des fonctions φ et φ' satisfaisant aux équations (1), *et en même temps aux conditions aux limites relatives à l'appareil et aux conditions initiales que nous laisserons arbitraires.*

Les conditions aux limites sont :

1° Qu'en A la vitesse de l'air soit nulle ;

2° Qu'en B, point de raccord des deux tubes, les vitesses des deux tranches infiniment minces contiguës soient en raison inverse des sections des tubes auxquels elles appartiennent, afin qu'il y ait continuité dans le fluide;

3° Qu'en C la condensation soit nulle, puisque la dernière tranche du tube est en contact avec l'atmosphère.

3. Nons pouvons satisfaire à toutes ces conditions au moyen des formules suivantes

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi = (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)\,u, \\ \varphi' = (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)\,u', \end{cases}$$

u et u' étant deux fonctions, l'une de x, l'autre de x', telles que

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{\lambda^2}{a^2}u = 0, \\ \dfrac{d^2u'}{dx'^2} + \dfrac{\lambda^2}{a'^2}u' = 0; \end{cases}$$

de telle sorte que l'on a

$$(6)\qquad \begin{cases} u = P\sin\dfrac{\lambda x}{a} + Q\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = P'\sin\dfrac{\lambda x'}{a'} + Q'\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}. \end{cases}$$

Dans ces équations, A, B, P, Q, P′, Q′, λ sont des constantes, qu'il s'agit de déterminer. Or :

1° Au point A, la vitesse $v = \dfrac{d\varphi}{dx}$ est nulle à toute époque du mouvement; donc

$$(7)\qquad P = 0,\quad Q = \text{arbitraire}.$$

2° Au point B, $x = l$ et $x' = 0$, la condensation doit être identique pour les extrémités contiguës des deux colonnes; donc

$$(8)\qquad P\sin\frac{\lambda l}{a} + Q\cos\frac{\lambda l}{a} = Q'.$$

Les deux vitesses sont en raison inverse des sections; donc

$$(9)\qquad \frac{S}{a}\left(P\cos\frac{\lambda l}{a} - Q\sin\frac{\lambda l}{a}\right) = \frac{S'}{a'}P'.$$

3° Au point C, la condensation est nulle; donc

$$(10)\qquad P'\sin\frac{\lambda l'}{a'} + Q'\cos\frac{\lambda l'}{a'} = 0.$$

De ces équations nous tirons, en faisant $Q = 1$,

$$(11)\qquad \begin{cases} P' = -\dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}, \\ Q' = \cos\dfrac{\lambda l}{a}; \end{cases}$$

par suite

$$-\frac{a'}{a}\frac{S}{S'}\sin\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}+\cos\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}=0,$$

ou enfin

$$(12)\qquad \operatorname{tg}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tg}\frac{\lambda l'}{a'}=\frac{a}{a'}\frac{S'}{S}.$$

On voit que λ est déterminé par l'équation transcendante (12), P' et Q' par les équations (11), P et Q par les équations (7), et que A et B restent complétement arbitraires. Nous aurons donc, pour solution particulière, les équations (4) unies aux équations

$$(13)\qquad \begin{cases} u=\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u'=\cos\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}-\dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}. \end{cases}$$

La solution particulière que nous venons de trouver correspond à un mouvement vibratoire simple et possible, résultant d'un état initial facile à trouver en faisant $t=0$,

$$(14)\qquad \begin{cases} v_0=-B\dfrac{\lambda}{a}\sin\dfrac{\lambda x}{a}, \\ v'_0=-B\dfrac{\lambda}{a'}\left[\cos\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}+\dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}\right], \\ s_0=-\dfrac{A\lambda}{a^2}\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ s'_0=-\dfrac{A\lambda}{a'^2}\left(\cos\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}-\dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}\right). \end{cases}$$

Mais, comme cet état initial particulier serait impossible à réaliser dans la pratique, le mouvement observé est plus complexe que celui que les équations (4) et (13) définissent. Nous allons montrer que le mouvement vibratoire le plus général peut être regardé comme résultant de la superposition d'un nombre fini ou infini de ces mouvements simples. Il nous suffira donc ensuite d'étudier les propriétés de ces mouvements simples pour connaître les lois physiques du phénomène de Pinaud, puisque notre oreille décompose instinctivement le mouvement général en ces mouvements élémentaires qui correspondent chacun à un son.

4. *Intégrale générale.* — Pour arriver rapidement à l'intégrale générale, nous avons besoin d'un lemme préliminaire.

LEMME. — *Nommons u_1 et u_1' les valeurs des fonctions u et u' pour une racine λ_1, autre que λ, de l'équation transcendante* (12); *on a identiquement la relation*

$$(15)\qquad \frac{S}{a^2}\int_0^l uu_1dx+\frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1dx'=0.$$

En effet, des équations (5) auxquelles satisfont u, u_1, u', u_1', on tire

$$u\frac{d^2u_1}{dx^2}-u_1\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\lambda_1^2-\lambda^2}{a^2}uu_1=0;$$

par suite, en multipliant par dx et intégrant de 0 à l,

$$\left(u\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du}{dx}\right)_0^l+\frac{\lambda_1^2-\lambda^2}{a^2}\int_0^l uu_1dx=0;$$

de même

$$\left(u'\frac{du'_1}{dx'}-u'_1\frac{du'}{dx'}\right)_0^{l'}+\frac{\lambda_1^2-\lambda^2}{a'^2}\int_0^{l'}u'u'_1dx'=0;$$

donc

$$\mathrm{S}\left(u\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du}{dx}\right)_l-\mathrm{S}\left(u\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du}{dx}\right)_0+\mathrm{S}'\left(u'\frac{du'_1}{dx'}-u'_1\frac{du'}{dx'}\right)_{l'}-\mathrm{S}'\left(u'\frac{du'_1}{dx'}-u'_1\frac{du'}{dx'}\right)_0$$
$$+(\lambda_1^2-\lambda^2)\left[\frac{\mathrm{S}}{a^2}\int_0^l uu_1dx+\frac{\mathrm{S}'}{a'^2}\int_0^{l'}u'u'_1dx'\right]=0.$$

Or le second et le troisième terme de la première ligne de cette équation sont identiquement nuls, puisqu'en A la vitesse est nulle et qu'en C la condensation est nulle à toute époque; les deux termes extrêmes de la même ligne s'annulent, car au point B

$$u=u',\quad \mathrm{S}\frac{du_1}{dx}=\mathrm{S}'\frac{du'_1}{dx'},\quad u_1=u'_1,\quad \mathrm{S}\frac{du}{dx}=\mathrm{S}'\frac{du'}{dx'};$$

donc le lemme est démontré, car dans la seconde ligne de cette équation $\lambda^2_1-\lambda^2$ est nécessairement différent de zéro.

Cela posé, je dis qu'en désignant par Σ la somme des termes tels que (4), correspondant aux diverses racines en nombre infini de l'équation (12), l'intégrale générale des équations (1), satisfaisant non-seulement aux conditions aux limites, mais à des conditions initiales arbitraires, sera donnée par des équations de la forme

$$(16)\qquad \begin{cases}\varphi=\Sigma(\mathrm{A}\sin\lambda t+\mathrm{B}\cos\lambda t)u,\\ \varphi'=\Sigma(\mathrm{A}\sin\lambda t+\mathrm{B}\cos\lambda t)u',\end{cases}$$

A et B variant d'un terme à l'autre avec λ.

Il suffit pour cela de démontrer que l'on peut choisir les constantes A et B de chacun des termes de la série, de manière à avoir les identités

$$(17)\qquad \begin{cases}\Sigma\,\mathrm{B}u=\mathrm{F}(x), & \Sigma\,\mathrm{B}u'=\mathrm{F}_1(x'),\\ \Sigma\,\mathrm{A}\lambda u=f(x), & \Sigma\,\mathrm{A}\lambda u'=f_1(x').\end{cases}$$

Nous désignons par $\mathrm{F}'(x)$ la fonction arbitrairement donnée de x représentant la vitesse, $F(x)$ en est la fonction primitive; $f(x)$ représente la fonction arbitraire de x qui donne la condensation initiale.

Multiplions maintenant par udx, $u'dx$ les deux équations qui renferment B, intégrons et ajoutons après les avoir respectivement multipliées par $\frac{S}{a^2}$, $\frac{S'}{a'^2}$; nous aurons, en séparant les divers termes,

$$B\left[\frac{S}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'\right] + B_1\left[\frac{S}{a^2}\int_0^l uu_1dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'u_1'dx'\right] + \ldots$$
$$= \frac{S}{a^2}\int_0^l uF(x)dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'F_1(x')dx'.$$

Mais, en vertu du lemme démontré, tous les termes du premier membre, autres que le premier, sont identiquement nuls, et l'on a

$$(18)\qquad B = \frac{\frac{S}{a^2}\int_0^l uF(x)dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'F_1(x')dx'}{\frac{S}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'};$$

de même

$$(19)\qquad A\lambda = \frac{\frac{S}{a^2}\int_0^l uf(x)dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'f_1(x')dx'}{\frac{S}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'}.$$

Les équations (18) et (19) déterminent, comme on voit, sans absurdité, les valeurs des coefficients de chacun des termes des séries (16), au moyen des conditions initiales arbitrairement données. Donc le mouvement le plus général résulte bien de la superposition d'une infinité de mouvements simples, définis chacun par les équations (4). Comme, d'ailleurs, notre organe d'audition a la propriété remarquable de percevoir séparément chacun de ces mouvements composants, tout en percevant par le timbre leur ensemble, on voit que l'étude des mouvements simples est seule importante au point de vue physique. Il était néanmoins nécessaire d'étudier l'intégrale complète, afin d'être assuré que les mouvements donnés par les équations (4) sont les seuls qui composent le mouvement général.

5. *Propriétés des mouvements simples.* — Les équations qui donnent, dans un mouvement simple, la vitesse et la condensation, sont les suivantes

$$(20)\qquad \begin{cases} v = \frac{d\varphi}{dx} = -(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)\frac{\lambda}{a}\sin\frac{\lambda x}{a}, \\ v' = \frac{d\varphi'}{dx'} = -(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)\frac{\lambda}{a'}\left(\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda x'}{a'} + \frac{a'}{a}\frac{S}{S'}\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda x'}{a'}\right), \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} s = -\dfrac{\lambda}{a^2}(\mathrm{A}\cos\lambda t - \mathrm{B}\sin\lambda t)\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ s' = -\dfrac{\lambda}{a^2}(\mathrm{A}\cos\lambda t - \mathrm{B}\sin\lambda t)\left(\cos\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'} - \dfrac{a'}{a}\dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}\right). \end{cases}$$

Ces équations montrent que ce mouvement est périodique, le temps T de la période est

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\lambda};$$

par suite, le nombre de vibrations doubles par seconde est

$$(22)\qquad \mathrm{N} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Pour avoir le son *fondamental* de l'appareil, il faut chercher la plus petite racine de l'équation (12)

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tg}\frac{\lambda l'}{a'} = \frac{a}{a'}\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}.$$

Sans résoudre cette équation, nous voyons que :

1° λ augmente si S′ augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est la troisième loi de Pinaud ;

2° λ diminue si S augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est la seconde loi de Pinaud;

3° λ diminue si l' augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est la première loi de Pinaud;

4° λ diminue si l augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est un résultat conforme à la seconde loi de Pinaud.

Nous pouvons maintenant remarquer que le second membre est petit, parce que $\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}$ est une petite fraction ; donc $\frac{\lambda l}{a}$, $\frac{\lambda l'}{a'}$ sont de petits arcs; donc on peut poser approximativement

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda l}{a} = \frac{\lambda l}{a} + \frac{1}{3}\frac{\lambda^3 l^3}{a^3},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\lambda l'}{a'} = \frac{\lambda l'}{a'} + \frac{1}{3}\frac{\lambda^3 l'^3}{a'^3};$$

par suite

$$\frac{ll'}{aa'}\left[\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\right] = \frac{a}{a'}\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}.$$

Nous avons donc, pour déterminer λ, l'équation

$$\lambda^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\lambda^4 = a^2\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{V}l'},$$

V étant le volume Sl du réservoir. De là on tire approximativement la formule

$$\lambda^2 = a^2 \frac{S'}{Vl'} - \frac{1}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\frac{a^4 S'^2}{V^2 l'^2};$$

d'où enfin

$$N = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S'}{Vl'} - \frac{1}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\frac{a^2 S'^2}{V^2 l'^2}}. \tag{23}$$

Si on néglige encore la seconde partie du radical, on obtient la formule plus simple de M. Sondhaus

$$N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S'}{Vl'}}. \tag{24}$$

Si nous prenons pour a la vitesse 333^m, nous trouvons

$$\frac{a}{2\pi} = 52{,}8.$$

On voit donc que, si nous prenons pour a une vitesse légèrement plus faible que la vitesse à l'air libre, nous retombons précisément sur la constante de M. Sondhaus 52,2. Ce résultat nous semble confirmer d'une manière remarquable la justesse de notre théorie.

D'ailleurs, on voit par la formule (23) que N est plus faible que le résultat $\frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S'}{Vl}}$; donc il n'est pas étonnant que M. Sondhaus, déterminant par expérience la constante C de la formule

$$N = C\sqrt{\frac{S'}{Vl'}}.$$

ait trouvé un nombre plus faible que $\frac{a}{2\pi}$.

En prenant les expériences de M. Sondhaus, j'ai vérifié que le second terme du radical de la formule (23) est insensible; on peut donc, au point de vue physique, s'en tenir à la formule (24).

6. La formule (24) montre que, si l' est réduit à moitié, N est multiplié par $\sqrt{2} = 1{,}414$; donc la note rendue par le tube réduit à moitié serait un *fa* ♯ par rapport à la note primitive considérée comme un *ut*. Pinaud a toujours trouvé la quinte, et par suite le rapport 1,5 à la place du rapport 1,41. Voici le résumé de ses expériences.

EXPÉRIENCES DE PINAUD

Première expérience.

Longueur du tube l'		Notes entendues		Notes données par la formule de Sondhaus
6	pouces	ut	1	1
5	—	ré?	1,122	1,058
4	—	mi	1,259	1,225
3	—	sol	1,498	1,414
2	—	si	1,888	1,732

Deuxième expérience.

8	—	ut	1	1
6	—	mi♭	1,189	1,154
4	—	sol	1,498	1,414

Troisième expérience.

Longueur du tube l'		Notes entendues		Notes données par la formule de Sondhaus
12	pouces	ut	1	1
10	—	ré?	1,122	1,058
9	—	mi♭	1,189	1,154

Sixième expérience.

9	—	ut	1	1
8	—	ut# haut	1,080	1,060
6	—	mi	1,259	1,225
4,5	—	sol	1,498	1,414
3	—	si	1,888	1,732

Ces expériences montrent nettement que la formule de M. Sondhaus n'est encore qu'une formule approximative, et il y a ceci de remarquable que l'intervalle théorique est toujours plus faible que l'intervalle observé. On explique cette anomalie comme nous avons expliqué les perturbations observées par Wertheim dans les tuyaux sonores (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXIII, p. 1203).

L'équation aux dérivées partielles que nous avons intégrée doit être corrigée d'un terme, et tout se passe alors comme si *les carrés des nombres de vibrations étaient diminués d'une quantité constante*. De cette loi résulte que l'intervalle de deux sons est plus grand que celui qui est donné par la théorie, où n'intervient pas ce terme perturbateur.

TUYAUX A RENFLEMENT PORTANT DEUX TUBES

7. Imaginons un premier tube étroit de section S et de longueur l, désignons-le par AB. A la suite, sur le même axe, se trouve un tube plus large BC de section S' et de longueur l'. Enfin, à la suite, sur le même axe, se trouve un tube CD de section S'' et de longueur l''. L'appareil est ouvert aux deux extrémités. Après avoir chauffé le réservoir, on le laisse refroidir, l'air rentre par les deux tubes étroits, un mouvement vibratoire s'établit dans l'appareil, on demande les lois de ce mouvement.

Nous désignerons par x la distance au point A d'un point quelconque de AB, par x' la distance au point B d'un point quelconque de BC, par x'' la distance au point C d'un point quelconque de CD.

Les équations différentielles du mouvement sont

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt} &= a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \\ \frac{d^2\varphi'}{dt^2} &= a'^2\frac{d^2\varphi'}{dx'^2}, \\ \frac{a^2\varphi''}{dt^2} &= a''^2\frac{d^2\varphi''}{dx''^2}. \end{aligned}\right.$$

Il faut intégrer ces équations en satisfaisant à des conditions initiales arbitraires et aux conditions aux limites suivantes pour les extrémités et les deux points intérieurs B et C, où il ne doit pas y avoir discontinuité.

8. *Conditions aux limites :*

1° Au point A, où $x=0$, on doit avoir

$$\frac{d\varphi}{dt}=0. \tag{26}$$

2° Au point B, où $x=l$ et $x'=0$, on doit avoir

$$\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt} \quad \text{et} \quad S\frac{d\varphi}{dx}=S'\frac{d\varphi'}{dx'}. \tag{27}$$

3° Au point C, où $x'=l'$ et $x''=0$, on doit avoir

$$\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt}=\frac{1}{a''^2} \quad \text{et} \quad S'\frac{d\varphi'}{dx'}=S''\frac{d\varphi''}{dx''}. \tag{28}$$

4° Au point D, où $x''=l''$, on doit avoir

$$\frac{d\varphi''}{dt}=0. \tag{29}$$

9. *Intégrales particulières.* — On peut satisfaire aux équations (25) et aux conditions aux limites précédentes, en posant.

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= (A\sin\lambda t+B\cos\lambda t)\,u, \\ \varphi' &= (A\sin\lambda t+B\cos\lambda t)\,u' \\ \varphi'' &= (A\sin\lambda t+B\cos\lambda t)\,u''. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Les fonctions u, u', u'' satisfont aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\lambda^2}{a^2}u=0, \\ &\frac{d^2u'}{dx'^2}+\frac{\lambda^2}{a'^2}u'=0, \\ &\frac{d^2u''}{dx''^2}+\frac{\lambda^2}{a''^2}u''=0\,; \end{aligned}\right. \tag{31}$$

par suite, elles sont de la forme

$$\left\{\begin{aligned} u &= P\sin\frac{\lambda x}{a}+Q\cos\frac{\lambda x}{a}, \\ u' &= P'\sin\frac{\lambda x'}{a'}+Q'\cos\frac{\lambda x'}{a'}, \\ u'' &= P''\sin\frac{\lambda x''}{a''}+Q''\cos\frac{\lambda x''}{a''}. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

A, B, P, Q, P′, Q′, P″, Q″, λ sont des constantes arbitraires.

Exprimons maintenant que les intégrales (30) satisfont aux conditions aux limites (26), (27), (28), (29), nous obtiendrons les relations suivantes

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{P quelconque,} \qquad Q=0, \\ \dfrac{1}{a^2}\left(P \sin\dfrac{\lambda l}{a}+Q \cos\dfrac{\lambda l}{a}\right)=\dfrac{1}{a'^2}Q', \\ \dfrac{S}{a}\left(P \cos\dfrac{\lambda l}{a}-Q \sin\dfrac{\lambda l}{a}\right)=\dfrac{S'}{a'}P', \\ \dfrac{1}{a'^2}\left(P' \sin\dfrac{\lambda l'}{a'}+Q' \cos\dfrac{\lambda l'}{a'}\right)=\dfrac{1}{a''^2}Q'', \\ \dfrac{S'}{a'}\left(P' \cos\dfrac{\lambda l'}{a'}-Q' \sin\dfrac{\lambda l'}{a'}\right)=\dfrac{S''}{a''}P'', \\ P'' \sin\dfrac{\lambda l''}{a''}+Q'' \cos\dfrac{\lambda l''}{a''}=0. \end{array}\right.$$

Nous en déduisons

$$(34)\qquad P=1, \qquad Q=0,$$

$$(35)\qquad P'=\frac{a'}{a}\frac{S}{S'}\cos\frac{\lambda l}{a}, \quad Q'=\frac{a'^2}{a^2}\sin\frac{\lambda l}{a},$$

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} P''=\dfrac{a''}{a}\dfrac{S}{S''}\cos\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda l'}{a'}-\dfrac{a'a''}{a^2}\dfrac{S'}{S''}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}, \\ Q''=\dfrac{a''^2}{aa'}\dfrac{S}{S'}\cos\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}+\dfrac{a''^2}{a^2}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda l'}{a'}, \end{array}\right.$$

$$(37)\quad \frac{1}{aS}\operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a}+\frac{1}{a'S'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'}+\frac{1}{a''S''}\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''}-\frac{a'}{aa''}\frac{S'}{SS''}\operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''}=0.$$

L'équation (37) fait connaître λ, et les équations précédentes donnent P, Q, P', Q', P'', Q''. Il ne reste d'arbitraires que les constantes A et B.

10. *Son fondamental de l'appareil.* — Le son fondamental de l'appareil, d'après les formules (30), sera donné par la formule

$$(38)\qquad N=\frac{\lambda}{2\pi},$$

N désignant le nombre des vibrations doubles et λ la plus petite racine de l'équation (37).

Dans l'équation (37) remplaçons les tangentes par les arcs, elle donnera, après quelques réductions faciles,

$$\lambda^2=\frac{\dfrac{a^2S}{l}+\dfrac{a''^2S''}{l''}+\dfrac{a^2a''^2}{a'^2}\dfrac{l'^2}{l^2l''^2}\dfrac{VV''}{V'}}{V'}.$$

Mais les valeurs de a, a', a'' sont peu différentes, supposons-les égales, la formule donnera

$$\frac{\lambda^2}{a^2} = \frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''} + \frac{l^2}{l^2 l''^2}\frac{VV''}{V'}}{V'}.$$

Mais le dernier terme du numérateur est très-petit, et peut encore être négligé ; nous obtenons donc enfin

$$\lambda = a\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'}};$$

par suite

$$\text{(39)} \qquad N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'}}.$$

Or cette formule est précisément celle de M. Sondhaus; et la constante $\frac{a}{2\pi}$ est à peu près égale à 52,2, en prenant 332^{m} pour vitesse du son.

11. Nous démontrerons aisément, en suivant une marche analogue à celle que nous avons déjà suivie pour le cas des tubes de Pinaud, que l'intégrale générale peut être regardée comme la somme d'un nombre fini ou infini d'intégrales simples, de la forme (30). D'ailleurs cette question de pure analyse est sans importance pour la question physique que nous traitons, puisque nous cherchons les lois du son fondamental qui correspond à un mouvement simple.

12. On peut imaginer un appareil plus compliqué, qui serait formé d'une suite de tubes étroits, séparés par un renflement; notre analyse s'étendrait facilement à l'étude des lois du son donné par un pareil ensemble. Admettons, par exemple, que nous ayons trois tubes et deux réservoirs; appelons

$$l,\ l',\ l'',\ l''',\ l^{\text{iv}}$$

les longueurs successives de ces tubes ou réservoirs,

$$S,\ S',\ S'',\ S''',\ S^{\text{iv}}$$

leurs sections,

$$V',\ V'''$$

les volumes des réservoirs; nous trouverions, pour l'équation transcendante donnant λ,

$$\begin{aligned}
&\frac{T}{S} + \frac{T'}{S'} + \frac{T''}{S''} + \frac{T'''}{S'''} + \frac{T^{\text{iv}}}{S^{\text{iv}}} - \frac{S'}{SS^{\text{iv}}}TT'T^{\text{iv}} - \frac{S''}{S'S^{\text{iv}}}TT''T^{\text{iv}} - \frac{S''}{SS^{\text{iv}}}TT''T^{\text{iv}} \\
&- \frac{S'''}{S''S^{\text{iv}}}T''T'''T^{\text{iv}} - \frac{S'''}{S'S^{\text{iv}}}T'T'''T^{\text{iv}} - \frac{S'''}{SS^{\text{iv}}}TT'''T^{\text{iv}} - \frac{S'}{SS'''}TT'T''' \\
&- \frac{S''}{S'S'''}T'T''T''' - \frac{S''}{SS'''}TT''T''' - \frac{S'}{SS''}TT'T'' + \frac{S'S'''}{SS''S^{\text{iv}}}TT'T''T'''T^{\text{iv}} = 0,
\end{aligned}$$

en admettant, pour plus de simplicité, que

$$a = a' = a'' = a''' = a^{\text{iv}},$$

et en appelant, pour abréger,

$$\text{T, T', T'', T''', T}^{\text{iv}}$$

les tangentes des arcs

$$\frac{\lambda l}{a},\ \frac{\lambda l'}{a},\ \frac{\lambda l''}{a},\ \frac{\lambda l'''}{a},\ \frac{\lambda l^{\text{iv}}}{a}.$$

Remplaçons maintenant les tangentes par les arcs, et négligeons les quantités petites. En supposant S, S″, S^{iv} petits par rapport à S′ et S‴; l, l'', l^{iv} grands par rapport à l' et l''', nous aurons simplement

$$\frac{\lambda^2}{a^2} = \frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'} + \frac{\frac{S''}{l''} + \frac{S^{\text{iv}}}{l^{\text{iv}}}}{V'''},$$

d'où

$$\text{(40)} \qquad N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'} + \frac{\frac{S''}{l''} + \frac{S^{\text{iv}}}{l^{\text{iv}}}}{V'''}}.$$

Cette formule est une généralisation de celle de M. Sondhaus, et la comprend comme cas particulier.

12. Si l'on suppose, en particulier,

$$\frac{S}{l} = \frac{S^{\text{iv}}}{l^{\text{iv}}} \quad \text{et} \quad V' = V''',$$

on trouve

$$N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V}};$$

donc le son rendu par ce nouvel appareil sera un *fa* # relativement à celui que rend l'appareil de M. Sondhaus.

Si nous supposons

$$\frac{S}{l} = \frac{S'}{l'} = \frac{S''}{l''} = \frac{S'''}{l'''} \quad \text{et} \quad V' = V''',$$

nous trouvons

$$N = 2\frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{Vl}}.$$

donc *le son rendu par notre nouvel appareil serait l'octave de celui que rendrait un tube fixé à l'extrémité d'une boule de l'appareil.*

13. Nous ne croyons pas que l'appareil à trois ou quatre tubes fixés à un même réservoir soit une généralisation de celui que nous avons étudié, et l'incertitude des expériences de M. Sondhaus sur cet appareil compliqué semble confirmer notre opinion.

14. Dans un autre mémoire, nous étudierons les formules qu'il a données pour les tuyaux cubiques, c'est-à-dire pour les tuyaux dont le diamètre est comparable à la longueur, de telle sorte qu'il est impossible d'admettre, sans erreur, que les divers points d'une même tranche perpendiculaire à l'axe aient le même mouvement vibratoire.