BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC KRASNER

Un type d'ensembles semi-ordonnés et ses rapports avec une hypothèse de M. A. Weil

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 162-176
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__162_0>

UN TYPE D'ENSEMBLES SEMI-ORDONNÉS ET SES RAPPORTS AVEC UNE HYPOTHÈSE DE M. A. WEIL;

PAR M. KRASNER.

(Paris).

---

1. Relations ordinatrices. — Soit A un ensemble. Soit (A, A) l'ensemble de tous les couples ordonnés d'éléments de A. Une suite finie (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_m, b_m) d'éléments de (A, A) s'appellera *chaîne dans* A, si, pour tout $i = 1, 2, \ldots, m-1$, on a $b_i = a_{i+1}$. a_1 sera dit *commencement* de cette chaîne, et b_m sera dit sa *fin*. Si l'on a une suite finie de chaînes dans A telles que la fin de chacune d'elles coïncide avec le commencement de la chaîne suivante, la juxtaposition de ces chaînes forme encore une chaîne dans A, dont le commencement est le commencement de la première chaîne de la suite, et dont la fin est la fin de la dernière chaîne de la suite. Une chaîne dans A sera dite *close* si sa fin coïncide avec son commencement.

Un sous-ensemble Ω de (A, A) s'appellera *ensemble ordinateur* de A, si aucune chaîne de Ω (c'est-à-dire chaîne dans A dont tous les éléments sont éléments de Ω) n'est close. Tout sous-ensemble d'un ensemble ordinateur l'est encore. Faisons correspondre à tout ensemble ordinateur Ω de A une relation (désignée par la même lettre) entre les éléments de A, dite *relation ordinatrice dans* A, définie par la condition que $a\Omega b$ $(a, b \in A)$ signifie $(a, b) \in \Omega$. L'ensemble A organisé par la relation ordinatrice Ω sera désigné par $\{A, \Omega\}$. $a\overline{\Omega}b$ signifiera que ou bien $a\Omega b$, ou bien $a = b$.

A′, A″ étant deux ensembles, et Ω', Ω'' étant des relations ordinatrices dans respectivement A′, A″, $\{A', \Omega'\}$ et $\{A'', \Omega''\}$ seront dits *isomorphes* (notation : $\{A', \Omega'\} \simeq \{A'', \Omega''\}$) s'il existe une correspondance biunivoque ε de A′ à A″ (dite *isomorphisme de* A′ à A″) telle que $a\Omega' b$ et $\varepsilon a \Omega'' \varepsilon b$ s'impliquent mutuellement quels que soient $a, b \in A'$.

Un ensemble ordinateur O de A (et aussi la relation ordinatrice correspondante) s'appellera *ordre dans* A si aOb et bOc impliquent aOc. $\{A, O\}$ sera dit *ensemble partiellement ordonné*. O', O'' étant deux ordres dans A, $O' \cap O''$ l'est encore. Un ordre O sera dit *plus faible* qu'un ordre O', si $O \subset O'$.

Ω étant un ensemble ordinateur de A, considérons l'ensemble Ω^* de tous les éléments (a, b) de (A, A) tels qu'il existe une chaîne de Ω dont a soit le commencement et dont b soit la fin. Puisque, quelle que soit la chaîne de Ω^*, on peut trouver une chaîne de Ω ayant les mêmes extrémités, aucune chaîne de Ω^* n'est close. Enfin, si $a\Omega^*b$ et $b\Omega^*c$, c'est-à-dire s'il existe une chaîne de Ω commençant par a et finissant par b, et une autre commençant par b et finissant par c, la juxtaposition de ces chaînes de Ω en forme une qui commence par a et finit par c, c'est-à-dire $a\Omega^*c$. Donc Ω^* est un ordre contenant Ω. C'est d'ailleurs l'ordre le plus faible ayant cette propriété, parce que si O est un ordre et s'il existe une chaîne de O qui commence par a et finit par b, on a aOb. Ω^* s'appellera *fermeture ordinale de* Ω.

Ω_1, Ω_2 étant des relations ordinatrices dans des ensembles respectifs A_1, A_2, ce qui précède montre que si $\{A_1, \Omega_1\} \cong \{A_2, \Omega_2\}$, on a aussi $\{A_1, \Omega_1^*\} \cong \{A_2, \Omega_2^*\}$; et tout isomorphisme de $\{A_1, \Omega_1\}$ à $\{A_2, \Omega_2\}$ en est un de $\{A_1, \Omega_1^*\}$ à $\{A_2, \Omega_2^*\}$ et inversement.

Un ensemble partiellement ordonné $\{A, O\}$ sera dit *semi-ordonné* si, quels que soient a, $b \in A$, il existe un $c \in A$ tel que $a\overline{O}c$ et $b\overline{O}c$. Un ensemble semi-ordonné $\{A, O\}$ sera dit *anti-limité* si dans la définition précédente on peut remplacer le signe $\overline{O}$ par O. Sinon, il sera dit *limité*.

2. Tours. — L'ensemble T de tous les sous-ensembles finis d'un ensemble E organisé par la relation (manifestement ordinatrice) Ω telle que $t_1 \Omega t_2$ $(t_1, t_2 \in T)$ signifie que t_2 s'obtient en ajoutant à t_1 un élément e de $E - t_1$, ainsi que tout ensemble (organisé par une relation ordinatrice) isomorphe à un ensemble $\{T, \Omega\}$ de cette nature, s'appelle *tour*. L'ensemble des éléments de cette tour qui, dans l'isomorphisme précédent, correspondent aux sous-ensembles $\{e\}$ de E d'un seul élément s'appelle *ensemble initial de la tour*. Les éléments t de l'ensemble initial d'une tour T ont la propriété caractéristique suivante : il existe un et un seul $t' \in T$ tel que $t'\Omega t$

(à savoir, celui qui correspond au sous-ensemble vide de E; cet élément de T sera noté o).

$\{T, \Omega\}$ étant une tour, $\{T, \Omega^*\}$ (où Ω^* est la fermeture ordinatrice de Ω) s'appelle *tour fermée* correspondante de $\{T, \Omega\}$. T étant l'ensemble de tous les sous-ensembles finis d'un ensemble E, et $t_1 \Omega t_2$ ($t_1, t_2 \in T$) signifiant que $t_2 = t_1 \bigcup \{e\}$, avec un $e \in E - t_1$, $t_1 \Omega^* t_2$ signifie que $t_1 \subset t_2$. Donc il existe, quels que soient les éléments, en nombre fini, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ de T, un et un seul $t \in T$, à savoir $t = \bigcup_{1 \leq i \leq m} t_i$ tel que, si un $t' \in T$ satisfait aux conditions $t_i \Omega^* t'$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), on ait $t \Omega^* t'$. Et tout $t \in T$ peut se mettre, et d'une seule manière, sous la forme $t = \bigcup_i t_i$, où les t_i appartiennent à l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$. Donc, si $\{T, \Omega\}$ est une tour quelconque, pour tout sous-ensemble fini $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ de T, il existe un élément t de T, qui sera noté $t_1 + t_2 + \ldots + t_m$ ou $\sum_{1 \leq i \leq m} t_i$, tel que si, pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$, $t_i \Omega^* t'$ ($t' \in T$), on ait $t \Omega^* t'$. Et tout $t \in T$ peut se mettre sous la forme $t = \sum_i t_i$, les t_i étant dans l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$.

Manifestement, τ_1 et τ_2 étant deux sous-ensembles finis de l'ensemble initial d'une tour $\{T, \Omega\}$, on a $\sum_{t \in \tau_1} t \Omega^* \sum_{t \in \tau_2} t$ si, et seulement si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Soient $\{T, \Omega\}$ et $\{T_1, \Omega_1\}$ deux tours isomorphes, et soit ε un isomorphisme de $\{T, \Omega^*\}$ à $\{T_1, \Omega_1^*\}$. A un élément de l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$, ε ne peut faire correspondre qu'un élément de l'ensemble initial de $\{T_1, \Omega_1\}$, et inversement (en vertu de la propriété caractéristique de ces éléments). Donc ε induit une correspondance biunivoque des ensembles initiaux des $\{T, \Omega\}$ et $\{T_1, \Omega_1\}$. Inversement, ε étant une telle correspondance, elle ne peut être induite par un isomorphisme de $\{T, \Omega^*\}$ à $\{T_1, \Omega_1^*\}$ que si ce dernier fait correspondre à l'élément $\sum_i t_i$, où les t_i sont dans l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$, l'élément $\sum_i \varepsilon t_i$ de T_1, comme cela résulte de la définition du signe $\sum$. Et la correspondance

$\sum_i t_i \to \sum_i \varepsilon t_i$, les t_i étant dans l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$, est bien un isomorphisme de $\{T, \Omega^*\}$ à $\{T_1, \Omega_1^*\}$ qui induit ε, parce que, τ_1 et τ_2 étant des sous-ensembles finis de l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$, on a $\varepsilon\tau_1 \subset \varepsilon\tau_2$ si, et seulement si $\tau_1 \subset \tau_2$. Donc, puisque les isomorphismes de $\{T, \Omega\}$ à $\{T_1, \Omega_1\}$ coïncident avec ceux de $\{T, \Omega^*\}$ à $\{T_1, \Omega_1^*\}$, tout isomorphisme entre deux tours induit une correspondance biunivoque de leurs ensembles initiaux; et toute correspondance biunivoque des ensembles initiaux de deux tours peut être induite par un et un seul isomorphisme entre les tours.

Une fonction $v(t)$ définie sur l'ensemble T et telle que l'ensemble $v(T)$ de ses valeurs soit l'ensemble de tous les nombres ordinaux plus petits qu'un ordinal ξ s'appelle *ξ-valuation de la tour* $\{T, \Omega\}$ si elle satisfait aux conditions suivantes : 1° si $t_1, t_2 \in T$, on a $v(t_1 + t_2) = \max[v(t_1), v(t_2)]$; 2° si $v(t_1) = v(t_2)$ $(t_1, t_2 \in T)$, il existe un $t \neq 0$ et $\in T$ tel que $t\Omega^* t_1$ et $t\Omega^* t_2$; 3°, $v(0) = 0$. En vertu de 2°, les valeurs de $v(t)$ pour les éléments de l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$ sont toutes différentes; et, puisque tout $t \in T$ se met sous la forme $t = \sum_i t_i$, les t_i étant dans l'ensemble initial, $v(t)$, pour tout $t \in T$, doit être égale à la valeur de la fonction v pour un élément de l'ensemble initial. Donc la correspondance $t \to v(t)$, t parcourant l'ensemble initial, est une correspondance biunivoque de cet ensemble avec l'ensemble $(\ldots, \xi)$ de tous les ordinaux non nuls plus petits que ξ. Inversement, soit $v(t)$ une fonction définie sur l'ensemble initial de $\{T, \Omega\}$ et telle que $t \to v(t)$ soit une correspondance biunivoque de cet ensemble avec $(\ldots, \xi)$. Alors, si l'on prolonge cette fonction sur tout ensemble T en posant $v\left(\sum_i t_i\right) = \max[v(t_i)]$, quels que soient les éléments t_i de l'ensemble initial, $v(t)$ devient manifestement une ξ-valuation de $\{T, \Omega\}$. Et si deux ξ-valuations $v(t)$ et $\bar{v}(t)$, sont égales sur l'ensemble initial, on a pour tout $t \in T$ $\left(\text{donc pouvant se mettre sous la forme } t = \sum_i t_i, \text{ les } t_i \text{ étant dans l'ensemble initial}\right)$,

$$\bar{v}(t) = \max[\bar{v}(t_i)] = \max[v(t_i)] = v(t),$$

et les deux valuations coïncident.

Une tour $\{T, \Omega\}$ munie d'une ξ-valuation $\nu(t)$ s'appellera ***tour valuée de hauteur*** ξ, ou encore ξ-***tour***, et sera désignée par $\{T^{(\nu)}, \Omega\}$. Un isomorphisme ε de deux tours valuées $\{T^{(\nu)}, \Omega\}$ et $\{\widetilde{T}^{(\tilde{\nu})}, \widetilde{\Omega}\}$ sera dit *analytique* s'il conserve la valuation des éléments, c'est-à-dire si, pour tout $t \in T$, on a $\nu(t) = \tilde{\nu}(\varepsilon t)$. ξ et $\tilde{\xi}$ étant les hauteurs des tours $\{T^{(\nu)}, \Omega\}$ et $\{\widetilde{T}^{(\tilde{\nu})}, \widetilde{\Omega}\}$, comme $t \to \nu(t)$ et $\tilde{t} \to \tilde{\nu}(\tilde{t})$ produisent les correspondances biunivoques des ensembles initiaux de $\{T, \Omega\}$, $\{\widetilde{T}, \widetilde{\Omega}\}$ avec respectivement $(\ldots, \xi)$ et $(\ldots, \tilde{\xi})$ et comme ε induit la correspondance de ces ensembles initiaux, la condition $\nu(t) = \tilde{\nu}(\varepsilon t)$ ne peut être satisfaite que si $\xi = \tilde{\xi}$. Et dans ce cas, elle ne peut l'être que d'une seule manière pour les éléments des ensembles initiaux. Mais comme il y a un et un seul isomorphisme entre deux tours isomorphes induisant une correspondance biunivoque donnée entre leurs ensembles initiaux, on voit que deux tours valuées ne sont analytiquement isomorphes que si elles ont la même hauteur, et que dans ce cas il existe un et un seul isomorphisme analytique entre deux tours.

Étant donné deux tours valuées d'une même hauteur, et ε étant l'isomorphisme analytique de la première d'entre elles à la seconde, on appellera *correspondant* dans la deuxième tour d'un élément t de la première l'élément εt.

$\mathfrak{T} = \{T^{(\nu)}, \Omega\}$ étant une ξ-tour et ξ' étant un ordinal ne dépassant pas ξ, l'ensemble $T_{\xi'}$ des éléments de T tels que $\nu(t) < \xi'$ s'appelle ξ'-section de la tour $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{T}_{\xi'} = \{T_{\xi'}^{(\nu)}, \Omega\}$ est, manifestement, une ξ'-tour et, si $\xi'' \leqq \xi' \leqq \xi$, on a $\mathfrak{T}_{\xi''} = (\mathfrak{T}_{\xi'})_{\xi''}$. Si ξ' est un ordinal de deuxième espèce, il est manifeste que la borne supérieure de $T_{\xi''}$ ($\xi'' < \xi'$ tendant vers ξ') est $\mathfrak{T}_{\xi'} (\xi' \leqq \xi)$. Donc si l'on a une chaîne sans dernier élément

$$\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}'' \subset \ldots, \quad \ldots \subset \mathfrak{T}^{(\alpha)} \subset \ldots,$$

de tours valuées, dont chaque précédente soit une section de chaque suivante, organisée par la même relation ordinatrice et par la même valuation que cette dernière, la borne supérieure de ces tours [organisé par la relation ordinatrice Ω telle que $a \Omega b$ signifie que ceci a lieu dans une $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$ dont a et b sont des éléments; et dont la valuation coïncide dans une $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$ avec celle de $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$] sera une tour valuée dont la hauteur est la borne supérieure de celles des $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$ et dont chacune des $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$ est une section.

Soit $\xi' < \xi$ et soit τ l'élément de l'ensemble initial de la ξ-tour $\mathfrak{T} = \{T^{(\nu)}, \Omega\}$ tel que $\nu(\tau) = \xi'$. $T_{\xi'+1}$ est la somme directe de $T_{\xi'}$ et de l'ensemble $\widetilde{T}_{\xi'}$ de tous les éléments t de T tels que $\nu(t) = \xi'$. Donc la correspondance $t \to t + \tau$ $(t \in T_{\xi'})$ est une correspondance biunivoque de $T_{\xi'}$ à $\widetilde{T}_{\xi'}$. De plus, on a

$$(t_1 + \tau)\Omega(t_2 + \tau) \qquad (t_1,\ t_2 \in T_{\xi'}),$$

si, et seulement si $t_1 \Omega t_2$. Donc $\{\widetilde{T}_{\xi'}, \Omega\}$ est une tour isomorphe à $\{T_{\xi'}, \Omega\}$; si, de plus, on définit dans $\widetilde{T}_{\xi'}$ une valuation $\tilde{\nu}$ par la condition que $\tilde{\nu}(t + \tau) = \nu(t)$ $(t \in T_{\xi'})$, $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\xi'} = \{\widetilde{T}_{\xi'}^{(\tilde{\nu})}, \Omega\}$ devient une ξ'-tour, et l'isomorphisme analytique ε de $\mathfrak{T}_{\xi'}$ à $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\xi'}$ est $t \to t + \tau$ $(t \in T_{\xi'})$. Donc, en particulier, si $t_1 \in T_{\xi'}$, et si $t_2 \in \widetilde{T}_{\xi'}$, on n'a jamais $t_2 \Omega t_1$ et l'on a $t_1 \Omega t_2$ si, et seulement si $t_2 = \varepsilon t_1$. $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\xi'}$ sera désignée par le symbole $\mathfrak{T}_{\xi'}^{-1} \mathfrak{T}_{\xi'+1}$.

Inversement, soient

$$\mathfrak{T} = \{T^{(\nu)}, \Omega\} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathfrak{T}} = \{\widetilde{T}^{(\tilde{\nu})}, \widetilde{\Omega}\}$$

deux ξ'-tours disjointes, et soit ε l'isomorphisme analytique de $\mathfrak{T}$ à $\widetilde{\mathfrak{T}}$. Organisons l'ensemble $T \cup \widetilde{T}$ par la relation Ω' coïncidant avec Ω, $\widetilde{\Omega}$ sur respectivement T, $\widetilde{T}$ et telle que si $t_1 \in T$, $t_2 \in \widetilde{T}$, $t_2 \Omega' t_1$ n'ait jamais lieu, et $t_1 \Omega' t_2$ ait lieu si, et seulement si $t_2 = \varepsilon t_1$. Soit $\mathfrak{T}^0 = \{T^{0(w)}, \Omega^0\}$ une $\xi' + 1$-tour, et soit ε^* l'isomorphisme analytique de $\mathfrak{T}$ à $\mathfrak{T}^0_{\xi'}$. Considérons la correspondance ε' de $T \cup \widetilde{T}$ à T^0 qui coïncide avec ε^* sur T et telle que, τ désignant l'élément de l'ensemble initial de $\mathfrak{T}^0_1$ tel que $w(\tau) = \xi'$, on ait

$$\varepsilon'(\varepsilon t) = \varepsilon^* t + \tau \qquad (t \in T).$$

ε' est, manifestement, un isomorphisme de $\{T \cup \widetilde{T}, \Omega'\}$ à $\{T^0, \Omega^0\}$. Si, de plus, ν' est la fonction dans $T \cup \widetilde{T}$ coïncidant avec $\nu(t)$ sur T et égale à ξ' partout sur $\widetilde{T}$, ν' est une $(\xi' + 1)$-valuation de $\{T \cup T, \widetilde{\Omega'}\}$, parce que

$$\nu'(t) = w(\varepsilon' t) \qquad (t \in T \cup \widetilde{T}).$$

La $(\xi' + 1)$-tour $\{(T \cup \widetilde{T})^{(\nu')}, \Omega'\}$ sera désignée par $\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}}$. $\mathfrak{T}$ est une ξ'-section de $\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}}$, et, manifestement, $\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}}) = \widetilde{\mathfrak{T}}$.

Admettons l'axiome de libre choix de Zermelo. On sait que de cet axiome résulte qu'on peut faire à la fois un nombre transfini quelconque de choix successifs, si l'on peut faire chacun de ces choix séparément; d'une manière plus précise, soit α une propriété et soit R une relation qui peut lier le dernier élément d'un ensemble bien ordonné limité d'objets ayant la propriété α aux autres objets de cet ensemble. Alors si la propriété α et la relation R sont telles que : 1° il existe des objets ayant la propriété α; 2° pour tout ordinal ξ' ne dépassant pas un ordinal ξ, la possibilité de faire correspondre à tout $\xi'' < \xi'$ un objet $\lambda(\xi'')$ ayant la propriété α et lié aux $\lambda(\xi''')$, $\xi''' < \xi''$ par la relation R entraîne la possibilité de faire la même chose pour tous les $\xi'' \leq \xi'$, il est possible de faire correspondre à tout $\xi' \leq \xi$ un objet $\lambda(\xi')$ ayant la propriété α et lié aux $\lambda(\xi'')$, $\xi'' < \xi'$ par la relation R.

Lemme 1. — *Soit α une propriété de tours valuées telle qu'il existe des 1-tours qui la possèdent et telle que la borne supérieure d'une chaîne non limitée quelconque*

$$\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}'' \subset \mathfrak{T}''' \subset \ldots, \qquad \ldots \subset \mathfrak{T}^{(\xi')} \subset \ldots$$

(où 1, 2, ..., ξ', ... est l'ensemble des ordinaux ne dépassant pas un ordinal de deuxième espèce) de tours valuées ayant la propriété α, et telle que tout élément $\mathfrak{T}^{(\xi'')}$ de cette chaîne soit une section de tout élément suivant $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ $(\xi'' < \xi')$ de cette chaîne, possède la propriété α. Supposons qu'on ait prouvé, pour tout $\xi' < \xi$, que l'existence d'une ξ'-tour ayant la propriété α entraîne l'existence d'une $(\xi' + 1)$-tour possédant également cette propriété et dont la ξ'-tour précédente soit ξ'-section. Alors, il existe une ξ-tour ayant la propriété α.

Démonstration. — Soit α' la propriété d'un objet d'être une tour valuée possédant la propriété α.

$$\mathfrak{T}', \quad \mathfrak{T}'', \quad \ldots; \qquad \ldots, \quad \mathfrak{T}^{(\xi'')}, \quad \ldots, \qquad \ldots, \quad \mathfrak{T}^{(\xi')}$$

étant un ensemble bien ordonné et limité de tours valuées et h étant la hauteur de $\mathfrak{T}^{(\xi')}$, soit R la relation suivante de $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ avec les $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$, $\alpha < \xi'$: *a*, si $\xi' \neq 1$ est un ordinal de première espèce, R est satisfaite si et seulement si $\mathfrak{T}^{(\xi'-1)}$ est la $(h-1)$-section de $\mathfrak{T}^{(\xi')}$;

b, si ξ' est un ordinal de seconde espèce, R est satisfaite si et seulement si chaque $\mathfrak{T}^{(\xi'')}$, $\xi'' < \xi'$, est une section de $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ et, $h_{\xi''}$ désignant la hauteur de $\mathfrak{T}^{(\xi'')}$, borne supérieure des $h_{\xi''}$, $\xi'' < \xi'$, est h; c, si $\xi' = 1$, $h = 1$. Supposons qu'il existe pour un $\xi' < \xi$ la correspondance biunivoque $\xi'' \rightarrow \mathfrak{T}^{(\xi'')}$ de l'ensemble $(\ldots, \xi')$ avec un ensemble des tours valuées possédant la propriété α et telle que, pour tout $\xi'' < \xi$, $\mathfrak{T}^{(\xi'')}$ satisfasse à la relation R dans l'ensemble bien ordonné

$$\mathfrak{T}', \quad \mathfrak{T}'', \quad \ldots; \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{T}^{(\xi'')},$$

ξ' étant de deuxième espèce, posons $\mathfrak{T}^{(\xi')} = \text{borne sup.}_{\xi'' < \xi'} \mathfrak{T}^{(\xi'')}$ [ce qui est possible en vertu de la propriété R des $\mathfrak{T}^{(\xi'')}$, $\xi'' < \xi'$]. $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ est encore une tour valuée ayant la propriété α et satisfait, manifestement à la relation R dans l'ensemble bien ordonné

$$\mathfrak{T}', \quad \mathfrak{T}'', \quad \ldots; \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{T}^{(\xi'')}, \quad \ldots; \qquad \ldots, \quad \mathfrak{T}^{(\xi')}.$$

ξ' étant de première espèce, soit $h_{\xi'-1}$ la hauteur de la tour $\mathfrak{T}^{(\xi'-1)}$. En vertu des hypothèses de l'énoncé, il existe une $(h_{\xi'-1} + 1)$-tour possédant la propriété α et dont $\mathfrak{T}^{(\xi'-1)}$ soit la $h_{\xi'-1}$-section. Si l'on fait correspondre à ξ' cette tour, qu'on notera $\mathfrak{T}^{(\xi')}$, on aura $h = h_{\xi'-1} + 1$, et $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ satisfera à la relation R dans l'ensemble bien ordonné

$$\mathfrak{T}', \quad \mathfrak{T}'', \quad \ldots; \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{T}^{(\xi'')}, \quad \ldots; \qquad \ldots, \quad \mathfrak{T}^{(\xi')}.$$

Donc la propriété α' et la relation R satisfont aux conditions 1° et 2° de la page précédente. On peut donc faire correspondre à tout $\xi' \leqq \xi$ un objet possédant la propriété α, c'est-à-dire une tour $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ ayant la propriété α, de manière que $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ satisfasse à la relation R dans l'ensemble bien ordonné

$$\mathfrak{T}', \quad \mathfrak{T}'', \quad \ldots; \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{T}^{(\xi'')}, \quad \ldots; \qquad \ldots, \quad \mathfrak{T}^{(\xi')};$$

ce qui entraîne en particulier que $\mathfrak{T}^{(\xi)}$ possède la propriété α et que a, $h_1 = 1$; b, si $\xi' \leqq \xi$ est de première espèce, $h_{\xi'} = h_{\xi'-1} + 1$; c, si $\xi' \leqq \xi$ est de deuxième espèce, $h_{\xi'} = \text{borne sup.}\ h_{\xi''}$, ξ'' parcourant $(\ldots, \xi')$. De a, b, c, il résulte, par induction complète, que $h = h_{\xi} = \xi$, donc $\mathfrak{T}^{(\xi)}$ est une ξ-tour ayant la propriété α.

C. Q. F. D.

3. Tours des ensembles semi-ordonnés. — Soit $\mathcal{E} = \{E, <\}$ un ensemble semi-ordonné. Si $\mathfrak{T} = \{T, \Omega\}$ est un sous-ensemble T de E organisé en tour respectivement tour fermée par une relation Ω telle que $t_1 \Omega t_2$ $(t_1, t_2 \in T)$ implique $t_1 < t_2$, $\mathfrak{T}$ s'appelle *tour* respectivement *tour fermée de* $\mathfrak{E}$. Si on la munit encore d'une valuation, elle sera dite *tour valuée de* $\mathfrak{E}$. Manifestement, si $\{T, \Omega\}$ est une tour de $\mathfrak{E}$, $\{T, \Omega^*\}$ est une tour fermée de $\mathfrak{E}$ et inversement.

Un sous-ensemble E′ de E sera dit *surpasser* un élément e de E, s'il existe un $e' \in E'$ tel que $e' \geqq e$. Un sous-ensemble E′ de E sera dit *confinal avec* E s'il surpasse tous les éléments de E. $\mathfrak{T} = \{T, \Omega\}$ étant une tour de $\mathfrak{E}$ (éventuellement valuée) on dira que $\mathfrak{T}$ surpasse un $e \in E$, si T le surpasse. Et l'on dira que $\mathfrak{T}$ est *confinale* si T est confinale avec E. On introduira le même langage pour les tours fermées de $\mathfrak{E}$. Pour prouver l'existence d'une tour fermée confinale de $\mathfrak{E}$ il suffit, manifestement, de prouver l'existence d'une tour valuée confinale de $\mathfrak{E}$.

Lemme 2. — *S'il n'existe aucune ξ-tour confinale de* E, *quel que soit l'ensemble fini des ξ-tours de $\mathfrak{E}$, il existe un $e \in$* E *qui n'est surpassé par aucune ξ-tour de cet ensemble.*

Démonstration. — Soit $\{\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots, \mathfrak{T}^{(m)}\}$ un ensemble de de m ξ-tours de $\mathfrak{E}$, où m est un nombre fini. $\mathfrak{T}'$ n'étant pas confinale, il existe un $e_1 \in E$ qui n'est pas surpassé par $\mathfrak{T}'$. Soit qu'on ait prouvé l'existence d'un $e_i \in E$ $(1 \leqq i < m)$ qui n'est surpassé par aucune des ξ-tours $\mathfrak{T}^{(j)}$ $(1 \leqq j \leqq i)$. $\mathfrak{E}$ étant semi-ordonné, on peut faire correspondre à chaque $e \in E$ un élément $\mu(e)$ de E tel que $e \leqq \mu(e)$ et $e_i \leqq \mu(e)$; aucun élément de $\mu(E) \subset E$ ne peut être surpassé par aucune des ξ-tours $\mathfrak{T}^{(j)}$ $(1 \leqq j \leqq i)$, parce que autrement, cette tour surpasserait e_i. Et la tour $\mathfrak{T}^{(i+1)}$ ne peut pas surpasser tous les éléments de $\mu(E)$, parce qu'alors elle surpasserait tous les éléments de E et serait confinale. Donc, il existe un $e_{i+1} \in \mu(E) \subset E$ qui n'est surpassé par aucune des $\mathfrak{T}^{(j)}$ $(1 \leqq j \leqq i+1)$. Donc, par induction, on prouve l'existence d'un $e = e_m \in E$ qui n'est surpassé par aucune des $\mathfrak{T}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$. c. q. f. d.

Étant donné un ensemble fini $M = \{\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots, \mathfrak{T}^{(m)}\}$ de ξ-tours de $\mathfrak{E}$, on dira qu'une ξ-tour $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{E}$ *majore* les tours de M (ou en est une *majorante*) si $\mathfrak{T}$ est disjointe avec toutes les $\mathfrak{T}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ et telle que tout élément t de $\mathfrak{T}$ est plus grand que l'élément t_i de $\mathfrak{T}^{(i)}$ correspondant de t, pour $i = 1, 2, \ldots, m$. S'il existe des

ξ-tours de $\mathcal{E}$, on dira que les ξ-tours de $\mathcal{E}$ sont *majorables*, si, pour tout ensemble fini de ξ-tours de $\mathcal{E}$, il existe une majorante des tours de cet ensemble.

Si $\mathfrak{T}$ et $\tilde{\mathfrak{T}}$ sont deux ξ-tours de $\mathcal{E}$, dont $\tilde{\mathfrak{T}}$ majore $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}\tilde{\mathfrak{T}}$ est encore une $(\xi+1)$-tour de $\mathcal{E}$. En effet, Ω étant la relation ordinatrice de $\mathfrak{T}\tilde{\mathfrak{T}}$, Ω coïncide sur $\mathfrak{T}$ et sur $\tilde{\mathfrak{T}}$ avec les relations ordinatrices de ces tours respectives, donc implique la relation $<$; et si t_1, $t_2 \in \mathfrak{T}\tilde{\mathfrak{T}}$ n'appartiennent pas à une même tour $\mathfrak{T}$ ou $\tilde{\mathfrak{T}}$, $t_1 \Omega t_2$ n'a lieu que si $t_1 \in \mathfrak{T}$ et t_2 est le correspondant dans $\tilde{\mathfrak{T}}$ de t_1. Mais alors, puisque $\tilde{\mathfrak{T}}$ majore $\mathfrak{T}$, on a $t_1 < t_2$.

Il est, d'ailleurs, manifeste que si $\mathfrak{T}$ est une $(\xi+1)$-tour de $\mathcal{E}$, $\mathfrak{T}_\xi^{-1}\mathfrak{T}$ majore $\mathfrak{T}_\xi$. Soient $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$, ..., $\mathfrak{T}^{(m)}$, m (où m est fini), $(\xi+1)$-tours de $\mathcal{E}$. Soit $\mathfrak{T}$ une $(\xi+1)$-tour de $\mathcal{E}$ telle que $\mathfrak{T}_\xi$ majore tous les $\mathfrak{T}_\xi^{(i)} (1 \leqq i \leqq m)$ et que $\mathfrak{T}_\xi^{-1}\mathfrak{T}$ majore tous les $\mathfrak{T}_\xi^{(i)-1}\mathfrak{T}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Supposons que $\mathfrak{T}$ soit disjoint avec tous les $\mathfrak{T}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Alors, manifestement, $\mathfrak{T}$ majore les $\mathfrak{T}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$.

Lemme 3. — *Si pour tout $\xi' < \xi$ les ξ'-tours de $\mathcal{E}$ sont majorables et s'il n'existe aucune ξ-tour confinale de $\mathcal{E}$, les ξ-tours de $\mathcal{E}$ sont majorables.*

Démonstration. — Soit $M = \{\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots, \mathfrak{T}^{(m)}\}$ un ensemble fini des ξ-tours de $\mathcal{E}$. Soit e un élément de E qu'aucune tour $\mathfrak{T}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ ne surpasse (un tel élément existe en vertu du lemme précédent). Soit α la propriété de tour valuée d'être une ξ'-tour $(\xi' \leqq \xi)$ de $\mathcal{E}$ qui majore les tours $\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ et dont tous les éléments t sont $> e$. L'ensemble $\{\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}''_1, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(m)}, \{e\}\}$ de 1-tours pouvant être majoré si $1 < \xi$, il existe, si $\xi \neq 1$, une 1-tour ayant la propriété α. Et si $\xi = 1$, il existe un élément e' qui n'est surpassé par aucune de 1-tour précédente (parce qu'il n'existe pas de 1-tour confinale de $\mathcal{E}$) et $\{e'\}$ est encore une tour valuée ayant la propriété α.

Soit

$$\tilde{\mathfrak{T}}', \tilde{\mathfrak{T}}'', \ldots; \quad \ldots, \tilde{\mathfrak{T}}^{(\xi'')}, \ldots; \quad \ldots,$$

un ensemble bien ordonné non limité de tours valuées ayant la propriété α et telles que, si $\xi''' < \xi''$, $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\xi''')}$ soit une section de $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\xi'')}$. Soit $\tilde{\mathfrak{T}}$ la borne supérieure des $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\xi'')}$. Il est visible que si ξ' est la hauteur de cette tour, chaque élément $\tilde{t}$ de $\tilde{\mathfrak{T}}$ est $>$ que l'élément correspondant t_i d'une quelconque des tours $\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$. D'autre part, tous les éléments de $\widetilde{\mathfrak{T}}$ sont $> e$. Si un élément $\tilde{t}$ de $\widetilde{\mathfrak{T}}$ en était aussi un d'une tour $\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)}$, donc aussi $\mathfrak{T}^{(i)}$, surpasserait $\tilde{t}$, et aussi $e < \tilde{t}$ contre l'hypothèse sur e. Donc $\widetilde{\mathfrak{T}}$ est une ξ'-tour de $\mathfrak{E}$ qui majore les $\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ et dont les éléments sont $> e$, donc a la propriété α.

Soit $\mathfrak{T}$ une ξ'-tour ayant la propriété α $(\xi' < \xi)$. Considérons l'ensemble de $2m + 1$ ξ'-tours

$$\{\mathfrak{T}'_{\xi'}, \mathfrak{T}''_{\xi'}, \ldots; \ldots, \mathfrak{T}_{\xi'}^{(m)}; \mathfrak{T}_{\xi'}'^{-1}\ \mathfrak{T}'_{\xi'+1}, \mathfrak{T}_{\xi'}''^{-1}\ \mathfrak{T}''_{\xi'+1}, \ldots; \ldots, \mathfrak{T}_{\xi'}^{(m)-1}\ \mathfrak{T}_{\xi'+1}^{(m)}, \mathfrak{T}\}.$$

Les ξ'-tours de $\mathfrak{E}$ étant majorables, il existe une ξ'-tour $\widetilde{\mathfrak{T}}$ de $\mathfrak{E}$ majorant les tours de cet ensemble. Les éléments de $\widetilde{\mathfrak{T}}$ étant $>$ que les éléments correspondants de $\mathfrak{T}$, sont, comme ces derniers, $> e$. Donc, la tour $\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}}$ est disjointe avec les tours $\mathfrak{T}_{\xi'+1}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Puisque $\mathfrak{T}$ majore les $\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$, et puisque $\widetilde{\mathfrak{T}}$ majore, en particulier, $\mathfrak{T}$ et les $\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)-1}\ \mathfrak{T}_{\xi'+1}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}}$ est une tour de $\mathfrak{E}$ et majore les

$$\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)}(\mathfrak{T}_{\xi'}^{(i)-1}\ \mathfrak{T}_{\xi'+1}^{(i)}) = \mathfrak{T}_{\xi'+1}^{(i)} \qquad (1 \leqq i \leqq m).$$

Donc $\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}}$ est une $(\xi' + 1)$-tour ayant la propriété α.

On voit que la propriété α satisfait aux conditions du lemme **1**. Donc, il existe une ξ-tour $\mathfrak{T}$ ayant la propriété α. $\mathfrak{T}$ est, en particulier, une ξ-tour de $\mathfrak{E}$ majorant les $\mathfrak{T}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$. M étant un ensemble fini quelconque de ξ-tours de $\mathfrak{E}$, le lemme est démontré.

Lemme **4**. — *Si pour aucun $\xi' \leqq \xi$ il n'existe pas de ξ'-tour confinale de $\mathfrak{E}$, les ξ-tours de $\mathfrak{E}$ sont majorables.*

Démonstration. — Puisqu'il n'existe, en particulier, de 1-tour confinale de $\mathfrak{E}$, on voit, en appliquant le lemme précédent au cas $\xi = 1$, que les 1-tours de $\mathfrak{E}$ sont majorables. Supposons que, pour un $\xi' \leqq \xi$, on ait prouvé que, pour tout $\xi'' < \xi'$, les ξ''-tours de $\mathfrak{E}$ soient majorables. Puisque $\xi' \leqq \xi$, il n'existe aucune ξ'-tour confinale de $\mathfrak{E}$. Donc, en vertu du lemme précédent, les ξ'-tours de $\mathfrak{E}$ sont majorables. Dès lors, le principe de l'induction complète montre l'exactitude du lemme.

Lemme 5. — *Si pour aucun $\xi' \leqq \xi$, il n'existe aucune ξ'-tour confinale de $\mathfrak{S}$, il existe des ξ-tours de $\mathfrak{S}$.*

Démonstration. — Soit α la propriété d'une tour valuée d'être une tour de $\mathfrak{S}$. Si $e \in \mathrm{E}$, $\{e\}$ est une 1-tour de $\mathfrak{S}$. Si

$$\mathfrak{T}', \quad \mathfrak{T}'', \quad \ldots; \qquad \ldots, \quad \mathfrak{T}^{(\xi')}, \quad \ldots$$

est un ensemble bien ordonné non limité de tours valuées de $\mathfrak{S}$ telles que, si $\xi'' < \xi'$, $\mathfrak{T}^{(\xi'')}$ soit une section de $\mathfrak{T}^{(\xi')}$, la limite supérieure $\mathfrak{T}$ des $\mathfrak{T}^{(\xi')}$ est encore une tour valuée de $\mathfrak{S}$. Enfin, soit $\mathfrak{T}$ une ξ'-tour de $\mathfrak{S}$ $(\xi' < \xi)$. En vertu du lemme précédent, où l'on met ξ' au lieu de ξ, les ξ'-tours de $\mathfrak{S}$ sont majorables. Donc, il existe une majorante $\tilde{\mathfrak{T}}$ de $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{T}\tilde{\mathfrak{T}}$ est une $(\xi'+1)$-tour de $\mathfrak{S}$.

Donc, la propriété α satisfait aux conditions du lemme **1**, et il existe une ξ-tour de $\mathfrak{S}$. C. Q. F. D.

Théorème I. — *Il existe des tours fermées confinales de $\mathfrak{S}$.*

Démonstration. — Supposons que la proposition soit fausse. Alors il n'existe pour aucun ξ aucune ξ-tour confinale de $\mathfrak{S}$. Prenons un ordinal ξ dont la puissance $p\xi$ dépasse la puissance $p\mathrm{E}$ de E. Quel que soit $\xi' \leqq \xi$, il n'existe aucune ξ'-tour confinale de $\mathfrak{S}$. Donc, en vertu du lemme précédent, il existe une ξ-tour $\mathfrak{T} = \{\mathrm{T}^{(\nu)}, \Omega\}$ de $\mathfrak{S}$. Mais alors, la puissance $p\mathrm{T}$ de T est $\geqq p\xi > p\mathrm{E}$, ce qui est absurde, puisque $\mathrm{T} \subseteqq \mathrm{E}$. Donc, le théorème est exact.

C. Q. F. D.

4. Systèmes projectifs et la réduction de l'hypothèse de M. A. Weil. — Soit $\mathfrak{S} = \{\mathrm{E}, <\}$ un ensemble semi-ordonné. Attachons à chaque $e \in \mathrm{E}$ un ensemble A_e, et attachons à chaque élément (e_1, e_2) de l'ensemble ordinateur $<$ une fonction $f_{e_1,e_2}(x)$ définie sur A_{e_2} et telle que $f_{e_1,e_2}(\mathrm{A}_{e_2}) = \mathrm{A}_{e_1}$. Le système

$$\mathrm{S} = [\{\mathrm{A}_e\}_{e \in \mathrm{E}};\ \{f_{e,\bar{e}}\}_{(e,\bar{e}) \in <}]$$

s'appellera *système projectif attaché à $\mathfrak{S}$*, si les fonctions $f_{e,\bar{e}}$ satisfont à la condition suivante : *si $e_1 < e_2 < e_3$ $(e_1, e_2, e_3 \in \mathrm{E})$, on a $f_{e_1,e_2}[f_{e_2,e_3}(x)] = f_{e_1,e_3}(x)$.*

Une correspondance univoque $e \to \alpha_e$ de l'ensemble E à l'ensemble d'éléments α_e tels que $\alpha_e \in \mathrm{A}_e$, sera dite *solution* du système projectif S, si les α_e satisfont à la condition : Si $e < \bar{e}$, $\alpha_e = f_{e.\bar{e}}(\alpha_{\bar{e}})$, M. Weil appelle l'ensemble de toutes les solutions d'un système projectif S *limite projective de* S. Dans une séance du séminaire de M. Hadamard de l'année scolaire 1937-1938, M. Weil, après avoir introduit la notion de la limite projective, avait émis l'hypothèse suivante :

Hypothèse de André Weil. — *Quel que soit le système projectif attaché à un ensemble semi-ordonné, sa limite projective n'est pas vide.*

Soit $\widetilde{\mathcal{E}} = \{\widetilde{E}, \Omega\}$ un ensemble semi-ordonné tel que $\widetilde{E} \subseteq E$ et $\Omega \subseteq <$. Alors, le système projectif

$$S(\widetilde{\mathcal{E}}) = [\{A_e\}_{e \in \widetilde{E}}; \{f_{e,\bar{e}}\}_{(e,\bar{e}) \in \Omega}]$$

sera appelé *correspondant de* S sur $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Lemme 6 (de M. Weil). — *Si* $\overline{E}$ *est un sous-ensemble confinal de* E, $\widetilde{\mathcal{E}} = \{\overline{E}, <\}$ *est semi-ordonné et la limite projective de* S *peut être mise en correspondance biunivoque avec celle de* $S(\widetilde{\mathcal{E}})$.

Démonstration. — Soient $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2 \in \overline{E}$. Il existe, puisque E est semi-ordonné, un $e \in E$ tel que $\bar{e}_1 \leqq e$ et $\bar{e}_2 \leqq e$. Puisque $\overline{E}$ est confinal avec E, il existe un $\bar{e} \in \overline{E}$, tel que $e \leqq \bar{e}$. Donc $\bar{e}_1 \leqq \bar{e}$ et $\bar{e}_2 \leqq \bar{e}$, et $\widetilde{\mathcal{E}}$ est semi-ordonné.

Soit $\alpha = \{e \to \alpha_e\}_{e \in E}$ une solution de S. Posons $\lambda\alpha = \{\bar{e} \to \alpha_{\bar{e}}\}_{\bar{e} \in \overline{E}}$. $\lambda\alpha$ est, manifestement, une solution de $S(\widetilde{\mathcal{E}})$. Soit, inversement, $\beta = \{\bar{e} \to \beta_{\bar{e}}\}$ une solution de $S(\widetilde{\mathcal{E}})$. Soit $e \in E$; il existe des $\bar{e} \in \overline{E}$ tels que $e \leqq \bar{e}$. Soient $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$ deux éléments de $\overline{E}$ (éventuellement égaux) tels que $e \leqq \bar{e}_1$ et $e \leqq \bar{e}_2$. Il existe un $\bar{e} \in \overline{E}$ tel que $\bar{e}_1 \leqq \bar{e}$ et $\bar{e}_2 \leqq \bar{e}$. On a, puisque β est une solution de $S(\widetilde{\mathcal{E}})$,

$$\beta_{\bar{e}_1} = f_{\bar{e}_1,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}}), \qquad \beta_{\bar{e}_2} = f_{\bar{e}_2,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}}),$$

Donc, puisque S est un système projectif attaché à $\mathcal{E}$, on a

$$f_{e,\bar{e}_1}(\beta_{\bar{e}_1}) = f_{e,\bar{e}_1}[f_{\bar{e}_1,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}})] = f_{e,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}}) = f_{e,\bar{e}_2}[f_{\bar{e}_2,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}})] = f_{e,\bar{e}_2}(\beta_{\bar{e}_2}).$$

Donc, si $\bar{e} \geqq e$ est un élément de $\overline{E}$, $f_{e,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}})$ est un élément β_e de A_e

dépendant seulement de $e \in E$, mais non du choix de $\bar{e} \geqq e$, $\bar{e} \in \overline{E}$. Désignons par $\bigwedge\beta$ la correspondance $\{e \to \beta_e\}_{e \in E}$. Soient $e_1, e_2 \in E$ tels que $e_1 < e_2$. Il existe un $\bar{e} \in \overline{E}$, tel que $e_2 \leqq \bar{e}$, donc aussi $e_1 \leqq \bar{e}$. Donc

$$\beta_{e_1} = f_{e_1,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}}), \qquad \beta_{e_2} = f_{e_2,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}}),$$

et l'on a

$$f_{e_1,e_2}(\beta_{e_2}) = f_{e_1,e_2}[f_{e_2,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}})] = f_{e_1,\bar{e}}(\beta_{\bar{e}}) = \beta_{e_1}.$$

Donc $\bigwedge\beta$ est une solution de S.

Or, manifestement, $\lambda(\bigwedge\beta) = \beta$. Et si α est une solution de S, on a, pour tout $e \in E$ et pour tout $\bar{e} \in \overline{E}$ et tel que $e \leqq \bar{e}$, $\alpha_e = f_{e,\bar{e}}(\alpha_{\bar{e}})$. Donc $\bigwedge(\lambda\alpha) = \alpha$. Donc la correspondance $\alpha \to \lambda\alpha$ est bien une correspondance biunivoque de la limite projective de S à celle de $S(\overline{\mathcal{E}})$. C. Q. F. D.

Lemme 7. — *$\mathcal{E} = \{E, <\}$ étant un ensemble semi-ordonné, et O étant un ordre dans E plus faible que $<$, mais tel que $\widetilde{\mathcal{E}} = \{E, O\}$ soit semi-ordonné, la limite projective de S coïncide avec celle de $S(\widetilde{\mathcal{E}})$.*

Démonstration. — Il est évident que toute solution de S en est une de $S(\widetilde{\mathcal{E}})$. Soit, inversement, $\alpha = \{e \to \alpha_e\}_{e \in E}$ une solution de $S(\widetilde{\mathcal{E}})$. Soient e, $\bar{e} \in E$ tels que $e < \bar{e}$. Puisque $\widetilde{\mathcal{E}}$ est semi-ordonné, il existe un $\bar{\bar{e}} \in E$ tel que $e O \bar{\bar{e}}$ et $\bar{e} O \bar{\bar{e}}$. On a donc

$$\alpha_e = f_{e,\bar{\bar{e}}}(\alpha_{\bar{\bar{e}}}), \qquad \alpha_{\bar{e}} = f_{\bar{e},\bar{\bar{e}}}(\alpha_{\bar{\bar{e}}}).$$

Donc, puisque S est un système projectif attaché à $\mathcal{E}$, on a

$$\alpha_e = f_{e,\bar{\bar{e}}}(\alpha_{\bar{\bar{e}}}) = f_{e,\bar{e}}[f_{\bar{e},\bar{\bar{e}}}(\alpha_{\bar{\bar{e}}})] = f_{e,\bar{e}}(\alpha_{\bar{e}})$$

et α est une solution de S. Le lemme est démontré.

Conséquence 1. — *Si $\widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{E}, \Omega)$ est un ensemble semi-ordonné tel que $\widetilde{E} \subseteqq E$ soit confinal avec E, et que $\Omega \subseteqq <$, la limite projective de S peut être mise en correspondance biunivoque avec celle de $S(\widetilde{\mathcal{E}})$.*

Démonstration. — On n'a qu'à appliquer le lemme 6 aux ensembles semi-ordonnés

$$\mathcal{E} = \{E, <\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}^* = \{\widetilde{E}, <\},$$

et ensuite le lemme 7 aux ensembles semi-ordonnés

$$\mathcal{E}^* = \{\widetilde{\mathrm{E}}, <\} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathcal{E}} = \{\widetilde{\mathrm{E}}, \Omega\}.$$

Conséquence 2. — *Si* $\mathfrak{T}$ *est une tour fermée confinale d'un ensemble semi-ordonné* $\widetilde{\mathcal{E}}$, *la limite projective d'un système projectif* S *attaché à* $\mathcal{E}$ *peut être mise en correspondance biunivoque avec celle de* $S(\mathfrak{T})$.

Théorème II. — *L'hypothèse de A. Weil est vraie pour tout système projectif si, et seulement si elle est vraie pour tout système projectif attaché à une tour fermée* (1).

Démonstration. — Si l'hypothèse de M. Weil est vraie en général, elle est vraie, en particulier, pour les systèmes projectifs attachés aux tours fermées. Soit S un système projectif attaché à un ensemble semi-ordonné arbitraire $\mathcal{E}$. En vertu du théorème I il existe une tour fermée confinale $\mathfrak{T}$ de $\mathcal{E}$. Si l'hypothèse de M. Weil est vraie pour les systèmes projectifs attachés aux tours fermées, la limite projective de $S(\mathfrak{T})$ n'est pas vide. En vertu de la conséquence 2, il en est de même pour celle de S et tout est prouvé.

(1) Dans une séance de la Société mathématique de France, j'avais donné aussi une démonstration de l'hypothèse de M. Weil pour les systèmes projectifs attachés aux tours fermées. Mais j'avais vu après que cette démonstration n'était pas exacte, et la question de l'exactitude de l'hypothèse de M. Weil reste ouverte (*).

(*) M. Aronszajn me signale qu'il existe des contre-exemples de l'hypothèse de M. Weil, connus déjà depuis 1935, c'est-à-dire avant que la notion de la limite *projective* ait été formulée explicitement. Je remercie M. Aronszajn.