

# BULLETIN DE LA S. M. F.

N. ARONSZAJN

## **Approximation des fonctions harmoniques et quelques problèmes de transformation conforme**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 67 (1939), p. 137-161

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1939\\_\\_67\\_\\_137\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__137_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**APPROXIMATION DES FONCTIONS HARMONIQUES  
ET QUELQUES PROBLÈMES DE TRANSFORMATION CONFORME;**

PAR M. N. ARONSAJN.

---

**INTRODUCTION GÉNÉRALE.**

Certaines recherches concernant les valeurs propres de la théorie des plaques élastiques <sup>(1)</sup> nous ont amené à étudier un problème concernant l'approximation des fonctions harmoniques dans un domaine plan.

Cette étude, à son tour, nous a conduit à un problème de transformation conforme d'un domaine simplement connexe quelconque sur un domaine étoilé.

Nous avons pu résoudre partiellement ce dernier problème. A cet effet, nous avons eu besoin d'introduire quelques notions qui semblent être nouvelles, telles que le type conforme global et local, la stabilité du type conforme, etc. L'introduction de ces notions nous a conduit à l'étude un peu plus approfondie de leurs propriétés. Ainsi s'est formé, en trois étapes, l'ensemble des recherches que nous allons exposer dans le présent Mémoire. Conformément à ces trois étapes, le Mémoire sera divisé en trois parties :

*PREMIÈRE PARTIE : Approximation en moyenne des fonctions harmoniques.*

*SECONDE PARTIE : Transformations conformes sur des domaines étoilés, conservant le type conforme.*

*TROISIÈME PARTIE : Type et ordre conformes sur des courbes pourvues de tangente continue sauf en points isolés.*

Chacune de ces parties nous semblant présenter un intérêt en

---

<sup>(1)</sup> Voir N. ARONSAJN et A. WEINSTEIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 96. Voir également le mémoire des mêmes auteurs qui paraîtra prochainement dans le *Journal de Mathématiques*.

soi, nous avons cru utile de les rédiger de sorte qu'elles puissent être lues séparément. Toutefois, dans l'introduction à chaque partie, nous indiquons, en plus de son résumé, les liaisons existant entre cette partie et les autres.

Au cours du présent travail, nous indiquerons les formules par le numéro du paragraphe suivi du numéro de la formule dans le paragraphe, par exemple (1, 2) est la formule (2) du paragraphe 1. L'introduction sera notée comme paragraphe 0 et les formules du paragraphe courant seront désignées sans indication du paragraphe.

#### Approximation en moyenne des fonctions harmoniques.

**Introduction.** — Dans les recherches mentionnées sur les plaques élastiques, nous avons été amené à considérer le problème suivant :

**PROBLÈME I.** — *Soit S un domaine borné du plan ayant pour frontière l'ensemble C. Démontrer que la classe  $D_S$  des fonctions harmoniques dans S <sup>(2)</sup>, continues dans  $S + C$  <sup>(3)</sup> et aux dérivées premières bornées dans S est complète par rapport à la classe  $H_S^2$  de toutes les fonctions harmoniques et de carré sommable dans S.*

Rappelons que ceci veut dire que, si pour une fonction  $h(z)$ ,  $z = x + iy$ , de  $H_S^2$ , on a

$$\iint_S h(z) h'(z) dx dy = 0,$$

où  $h'(z)$  parcourt toutes les fonctions de  $D_S$ , la fonction  $h(z)$  est identiquement nulle.

Comme l'on sait, le problème I est équivalent au problème  $II_2$ , cas particulier, pour  $p = 2$ , du problème  $II_p$  suivant :

(<sup>2</sup>) Quand nous disons, *harmonique dans S*, nous sous-entendons : harmonique, régulière et uniforme dans S.

(<sup>3</sup>) Dans la suite nous comprendrons *continue dans  $S + C$*  dans le sens conforme qui sera précisé au paragraphe 3. Remarquons que, pour les applications que nous avons mentionnées plus haut il nous aurait suffi de considérer les fonctions bornées dans S au lieu des fonctions continues dans  $S + C$ .

PROBLÈME II<sub>p</sub> ( $p \geq 1$ ). — Soit  $S$  un domaine borné. Démontrer que la classe  $D_S$  est fermée par rapport à la classe  $H_S^2$  de toutes les fonctions harmoniques de  $p^{\text{ième}}$  puissance sommable dans  $S$ .

Rappelons que ceci veut dire que pour toute fonction  $h(z)$  de  $H_S^2$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $h'(z)$  de  $D_S$  avec

$$\iint_S |h(z) - h'(z)|^p dx dy < \varepsilon.$$

On ne connaît aucun exemple d'un domaine borné pour lequel le problème II<sub>p</sub> admette une réponse négative, tout au moins si l'on se restreint aux domaines de connexion finie sans points frontières isolés (<sup>4</sup>). Étant donné que l'on n'est pas encore arrivé à résoudre le problème II<sub>p</sub> pour tous les domaines de ce genre, il est intéressant de trouver une classe de domaines, aussi large que possible, pour laquelle ce problème soit résoluble par l'affirmative.

C'est M. S. Zaremba qui a été le premier à s'occuper de ce genre de problèmes (<sup>5</sup>). Il y a été amené par ses recherches sur le problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques ordinaires et les fonctions harmoniques d'ordre 2 (appelées aussi biharmoniques), donc des recherches assez apparentées à celles qui nous ont conduit à ces problèmes.

Depuis les travaux cités de M. Zaremba, il n'y a pas eu, à notre connaissance, d'autres recherches concernant ces problèmes. Toutefois des recherches concernant d'autres problèmes d'approximation avaient été faites par différents auteurs (<sup>6</sup>). Parmi ces recherches, c'est celle de M. Farrel (<sup>7</sup>) qui s'approche le plus de

(<sup>4</sup>) Sans cette restriction la réponse serait négative de manière banale pour les domaines admettant un point frontière isolé (comp. § 3, remarque II); elle le serait de manière un peu moins banale pour les domaines dont la frontière admet une partie isolée discontinue et dense en soi, de capacité nulle.

(<sup>5</sup>) Voir en particulier les mémoires de M. ZAREMBA de *Bull. Acad. de Cracovie*, 1908, et *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1909. Les problèmes en question sont posés et étudiés explicitement dans le premier de ces mémoires et implicitement dans le chapitre V du second mémoire.

(<sup>6</sup>) Voir pour la bibliographie, WALSH, *Bull. Am. Math. Soc.*, t. XXXV, 1929 et *Interpolation and Approximation*, *Am. Math. Soc. Coll. Publ.*, t. XX. Le premier concerne les fonctions harmoniques et le second les fonctions analytiques d'une variable complexe.

(<sup>7</sup>) Voir FARREL, *Bull. Am. Math. Soc.*, t. 40, 1934, p. 908.

notre sujet. M. Farrel a résolu complètement (dans un certain sens) le problème analogue à  $\Pi_p$  concernant les fonctions analytiques d'une variable complexe. Remarquons toutefois que le résultat de M. Farrel ne peut pas être appliqué directement pour résoudre notre problème  $\Pi_p$  <sup>(8)</sup>.

Nous résolvons dans la suite le problème  $\Pi_p$  pour une certaine classe de domaines de connexion finie. A cet effet, nous démontrons d'abord, dans les paragraphes 1 et 2, des lemmes concernant la décomposition d'une fonction harmonique dans un domaine  $S$  en parties principales correspondant aux différentes composantes  $C_i$  de la frontière  $C$  de  $S$ . Ces considérations sont, en partie, bien connues <sup>(9)</sup>, nous croyons pourtant que le lemme 4 du paragraphe 2 est nouveau. Dans le paragraphe 3, nous démontrons le théorème I qui réduit l'étude du problème  $\Pi_p$  pour les domaines multiplement connexes à l'étude du même problème pour les domaines simplement connexes.

Dans le paragraphe 4, nous introduisons la notion de *type conforme* qui sera à la base de toutes nos recherches du présent Mémoire.

Nous dirons que *deux domaines sont du même type conforme*, s'il existe une transformation conforme de l'un des domaines sur l'autre, telle que sa dérivée, dans tout le domaine, soit comprise en valeur absolue entre deux bornes positives et finies.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème II : *Si le problème  $\Pi_p$  admet une solution positive pour un domaine  $S$ , il en est de même pour tout domaine du même type conforme que  $S$ .*

M. Zaremba s'est servi de la notion de type conforme (sans lui donner de nom particulier) et d'un cas particulier du théorème II pour démontrer une proposition que nous pouvons énoncer comme suit : *le problème  $\Pi_2$  admet une solution positive pour tout domaine du même type conforme qu'un cercle* <sup>(10)</sup>. Cette classe

---

<sup>(8)</sup> Ceci tient au fait que la fonction conjuguée d'une fonction harmonique de  $p$ ième puissance sommable dans un domaine  $S$ , n'est pas en général sommable en  $p$ ième puissance (par exemple, quand la frontière  $C$  présente une pointe d'angle intérieur nul).

<sup>(9)</sup> Voir par exemple, au sujet de la décomposition du lemme 1, le mémoire cité de M. WALSH, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1929, n° 5, et pour les formules (2) et (2') du paragraphe 2, le mémoire de M. WALSH, *Ann. of Math.*, t. 38, 1937, lemme 5.

est manifestement insuffisante (par exemple, les rectangles n'en font pas partie); M. Zaremba a défini une autre classe de domaines pour laquelle il a pu démontrer, par des méthodes tout à fait différentes de celles indiquées plus haut que les problèmes I et II<sub>2</sub> y sont également résolubles par l'affirmative <sup>(11)</sup>.

Cette classe, que nous désignerons par  $\mathfrak{S}_0$ , est formée par les domaines limités par un nombre fini de courbes simples fermées deux à deux disjointes, à courbure moyenne uniformément bornée, sauf peut-être en un nombre fini des points anguleux, d'angle intérieur  $> 0$  et  $< 2\pi$ .

Nous avons pu aller plus loin que M. Zaremba grâce au théorème III du paragraphe 3 disant que *tout domaine étoilé admet une solution positive du problème II<sub>p</sub>*. Les théorèmes I, II et III conduisent au théorème IV qui constitue le principal résultat de notre recherche sur l'approximation des fonctions harmoniques. Ce théorème dit essentiellement que *le problème II<sub>p</sub> est résoluble affirmativement dans tout domaine S dont la frontière se décompose en un nombre fini de continus deux à deux disjointes, chacun de ceux-ci déterminant dans le plan un domaine (borné ou non borné) simplement connexe qui contient S et est de même type conforme qu'un domaine étoilé*.

La classe de domaines ainsi définie contient, en particulier, tous les domaines limités par un nombre fini de contours étoilés deux à deux disjointes.

Déjà parmi les domaines étoilés on en trouve qui n'appartiennent pas aux classes définies par M. Zaremba (par exemple, un domaine étoilé qui admet une pointe présentant un angle intérieur  $= 0$  ou  $= 2\pi$ ).

Pourtant la démonstration que notre classe contient la classe  $\mathfrak{S}_0$  n'est pas très simple. Nous la ferons dans la partie II de notre Mémoire, après avoir caractérisé par des propriétés locales et géométriques certaines catégories de domaines de type conforme d'un domaine étoilé. Bien entendu, nous obtiendrons ainsi une

---

<sup>(10)</sup> Voir ZAREMBA, *loc. cit.*, *Bull. Ac. Crac.*, 1908.

<sup>(11)</sup> Voir ZAREMBA, *loc. cit.*, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1909. Comme nous l'avons déjà remarqué, ces problèmes ne sont pas, dans ce mémoire, aussi nettement posés que dans le mémoire précédent.

classe de domaines définie par des propriétés locales et géométriques qui sera beaucoup plus étendue que la classe  $\mathfrak{S}_0$ .

Avant de terminer cette introduction, nous ferons deux remarques pour signaler des faits qui ne seront pas développés dans ce Mémoire.

*Remarque I.* — Le problème  $\Pi_p$  a un sens facile à préciser pour les domaines *multivalents* étendus sur un plan. Pour simplifier, ne considérons que des domaines à un nombre fini de feuillettes et n'admettant pas de points de ramification dans leur intérieur, mais pouvant bien en admettre sur leur frontière. On peut démontrer que le problème  $\Pi_p$  se résout par l'affirmative pour une classe très étendue de tels domaines. Par exemple, ceci a lieu pour les domaines multivalents, satisfaisant aux conditions imposées aux domaines de la classe  $\mathfrak{S}_0$ , si l'on y supprime toute limitation supérieure des angles intérieurs correspondant aux points anguleux.

*Remarque II.* — La plupart des considérations de la première partie, contrairement au reste du Mémoire, peuvent être généralisées au cas des fonctions harmoniques dans l'espace ordinaire et même dans l'espace euclidien  $n$ -dimensionnel ( $n = 4, 5, \dots$ ). De manière plus précise, à part le lemme 5 et les théorèmes II et IV qui dépendent essentiellement de la théorie de transformation conforme, tous les autres énoncés peuvent être généralisés. En particulier, le corollaire du théorème IV admet une généralisation dans l'espace, ce qui donne l'énoncé suivant : *le problème  $\Pi_p$  est résoluble par l'affirmative pour tout domaine borné de l'espace, limité par un nombre fini de surfaces étoilées deux à deux disjointes.*

1. Soit  $S$  un domaine borné du plan de connexion finie et soient  $C_0, C_1, \dots, C_n$  les continus deux à deux disjoints composant la frontière  $C$  de  $S$

$$(1) \quad C = C_0 + C_1 + \dots + C_n.$$

Comme on sait,  $S$  est l'intersection

$$(2) \quad S = S_0 S_1 \dots S_n$$

des  $n + 1$  domaines simplement connexes  $S_0, S_1, \dots, S_n$  dont chacun est déterminé par la condition de contenir  $S$  et d'avoir le  $C_k$  de même indice pour frontière.

Parmi les  $S_k$ , il n'y a qu'un seul qui soit borné, tous les autres contiennent le point à l'infini.

Il est loisible de supposer que  $S_0$  est le domaine borné ( $C_0$  est alors le contour extérieur de  $S$ ). Cette convention sera maintenue dans tout notre Mémoire (quand il s'agira d'un domaine multiple-ment connexe).

Fixons sur chaque  $C_k$  un point  $a_k$ . On trouve alors le

**LEMME 1.** — *Chaque fonction  $h(z)$  harmonique dans  $S$  admet une décomposition et une seule de la forme suivante*

$$(3) \quad h(z) = h_0(z) + \sum_1^n [h_k(z) + \mu_k \log |z - a_k|],$$

où  $h_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , est harmonique dans  $S_k$ ,  $h_k(\infty) = 0$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ .

La quantité  $2\pi\mu_k$  est égale à la période de la fonction conjuguée à  $h(z)$  le long d'un contour séparant  $C_k$  des autres  $C_i$ .

**Démonstration.** — Considérons un sous-domaine  $S'$  de  $S$  limité par  $n + 1$  courbes  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , simples, fermées, à tangente continue et deux à deux disjointes.

Nous supposons de plus que  $\Gamma_k$  sépare  $C_k$  de tous les autres  $C_i$ .

Les formules classiques de Green permettent d'écrire

$$(4) \quad h(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \int_{\Gamma_k} \left[ \log |z - \zeta| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial n} - \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial n} h(\zeta) \right] |d\zeta|,$$

pour  $z$  dans  $S'$ . Posons

$$(5) \quad \mu_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial h(\zeta)}{\partial n} |d\zeta|, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \left[ \log |z - \zeta| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial n} - \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial n} h(\zeta) \right] |d\zeta|, \\ \text{et pour } k = 1, 2, \dots, n, \\ h_k(z) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \log |z - \zeta| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial n} |d\zeta| - \mu_k \log |z - a_k| \right] \\ \quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial n} h(\zeta) |d\zeta| \\ \quad = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \left[ \log \left| \frac{z - \zeta}{z - a_k} \right| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial n} - \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial n} h(\zeta) \right] |d\zeta|. \end{array} \right.$$

D'après (6) il est clair que  $h_k(z)$  est harmonique dans la partie  $S'_k$  de  $S_k$  limitée par le contour  $\Gamma_k$ . De plus, pour  $k \geq 1$ , on trouve immédiatement  $h_k(\infty) = 0$ . La formule (4) se transforme, d'après (5) et (6), en formule (3), mais pour l'instant, uniquement pour  $z$  dans  $S'$ . Elle sera démontrée pour  $z$  dans le domaine  $S$  entier, si nous prouvons que toutes les  $h_k(z)$  sont harmoniques dans  $S$ . A cet effet remarquons d'abord que  $h_k(z)$  est harmonique dans tout  $S$  sauf peut-être sur  $\Gamma_k$  et dans le domaine  $S''_k$  limité par  $\Gamma_k$  et  $C_k$ . Tous les autres  $h_i(z)$ ,  $i \neq k$ , ainsi que  $h(z)$  et les  $\mu_i \log|z - a_i|$  sont harmoniques sur  $\Gamma_k$  et  $S''_k$ . Ceci permet d'appliquer la formule (3) pour prolonger  $h_k(z)$  dans  $\Gamma_k + S''_k$ , à partir de  $S'$ . Par conséquent  $h_k$  est harmonique dans  $S$  donc aussi dans  $S + S'_k = S_k$ . La formule se montre ainsi valable dans  $S$  entier.

Montrons maintenant que la décomposition (3) est unique. Prouvons d'abord que pour toute décomposition (3),  $2\pi\mu_k$  est la période de la fonction conjuguée à  $h(z)$  le long d'un contour séparant  $C_k$  des autres  $C_i$  (par exemple le contour  $\Gamma_k$ ). En effet, prenons les conjuguées de toutes les fonctions figurant dans (3) et leurs périodes sur le contour considéré. Les fonctions  $h_i(z)$ , comme harmoniques dans les domaines simplement connexes  $S_i \supset S$ , possèdent des conjuguées uniformes dans  $S_i$ ; leurs périodes sont donc nulles. Les  $\mu_i \log|z - a_i|$  pour  $i \neq k$ , possèdent une période nulle sur le contour considéré, tandis que  $\mu_k \log|z - a_k|$  y possède pour période  $2\pi\mu_k$ . Donc la période de la conjuguée de  $h(z)$  est  $2\pi\mu_k$ .

Si l'on avait maintenant pour une fonction  $h(z)$  deux décompositions (3) données par les fonctions  $h_k(z)$  et  $h'_k(z)$ , on aurait

$$(7) \quad 0 = \sum_{k=0}^n [h_k(z) - h'_k(z)].$$

Il en résulterait pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$ ,

$$h_k(z) - h'_k(z) = - \sum_{i \neq k} [h_i(z) - h'_i(z)].$$

Le membre gauche est régulier dans  $S_k$  tandis que le membre droit l'est sur l'ensemble complémentaire de  $S_k$  (par rapport au plan complété par le point à l'infini).  $h_k - h'_k$  est donc harmonique

dans tout le plan, le point  $\infty$  y inclus. C'est donc une constante. Elle est nécessairement nulle, car pour  $k \geq 1$ ,  $h_k(\infty) - h'_k(\infty) = 0$  et, pour  $k = 0$ , on voit, d'après (7),

$$h_0 - h'_0 = - \sum_{k=1}^n (h_k - h'_k) = 0.$$

Ainsi le lemme est complètement démontré.

*Remarque I.* — Le lemme 1 reste valable avec des petits changements pour des domaines  $S$  non bornés de connexion finie. Parmi les domaines  $S_k$  de la formule (2) il n'y aura plus de domaine borné. Pourtant, si le point  $\infty$  est sur la frontière de  $S$ , on pourra encore distinguer parmi les  $S_k$  un domaine que nous pourrions désigner par  $S_0$ , qui ne contient pas  $\infty$  (sa frontière  $C_0$  est le seul continu parmi les  $C_k$ , qui contienne  $\infty$ ).

Dans ce cas le lemme 1 reste encore valable sans changement.

Si le point  $\infty$  est situé dans  $S$ , il n'y aura plus parmi les  $S_k$  de domaine privilégié et la formule (3) devra changer en

$$(3') \quad h(z) = A + \sum_{k=0}^n [h_k(z) + \mu_k \log |z - \alpha_k|],$$

où  $A$  est une constante et les  $h_k(z)$  sont harmoniques dans  $S_k$  avec  $h_k(\infty) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$ . L'énoncé du lemme reste

valable; on trouve  $A = h(\infty)$  et  $\sum_0^n \mu_k = 0$ .

*Remarque II.* — D'après le lemme 1, la formule (3) établit une correspondance biunivoque entre les fonctions  $h(z)$  harmoniques dans  $S$  d'une part et tous les systèmes des  $n+1$  fonctions  $h_0, h_1, \dots, h_n$  et des  $n$  nombres réels  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Les fonctions  $h_k$  sont soumises aux seules conditions d'être harmoniques dans les  $S_k$  correspondants et, pour  $k \geq 1$ , de satisfaire à  $h_k(\infty) = 0$ .

Les formules (5) et (6) montrent que cette correspondance est linéaire, c'est-à-dire, que à  $h = \alpha' h' + \alpha'' h''$  correspondent le système de fonctions  $\{\alpha' h'_k + \alpha'' h''_k\}$  et le système de nombres  $\{\alpha' \mu'_k + \alpha'' \mu''_k\}$ , pour des constantes  $\alpha'$  et  $\alpha''$  quelconques.

De plus, cette correspondance est continue, c'est-à-dire que, si

une suite  $h^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , converge uniformément vers  $h$  dans tout domaine  $S'$  complètement intérieur à  $S$ , les fonctions  $h_k^{(m)}$ , pour  $m \rightarrow \infty$  convergent uniformément vers  $h_k$  dans tout domaine  $S'_k$  complètement intérieur à  $S_k$  et les nombres  $\mu_k^{(m)}$  convergent vers  $\mu_k$ .

Cette propriété peut être précisée de manière suivante : soient  $S^{(q)}$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , une suite croissante de domaines tendant vers  $S$ , chaque  $S^{(q)}$  étant complètement intérieur à  $S^{(q+1)}$ .

Nous supposons que les  $S^{(q)}$  sont du même genre que le domaine  $S'$  utilisé dans la démonstration de notre lemme. Par conséquent on peut leur faire correspondre de manière unique des domaines simplement connexes  $S_k^{(q)}$  tels que  $S^{(q)} = S_0^{(q)} S_1^{(q)}, \dots, S_n^{(q)}$  et que les ensembles  $S_k^{(1)}, S_k^{(2)}, \dots, S_k^{(q)}, \dots$ , tendent en croissant vers  $S_k$ . Il existe alors des constantes  $A_k$  et  $B_k$  qui ne dépendent que de  $S^{(1)}$  et  $S$ , tels que pour toute fonction  $h(z)$  harmonique dans  $S$  on ait

$$\max_{S_k^{(q)}} |h_k(z)| \leq A_k \max_{S^{(q)}} |h(z)|, \quad \mu_k \leq B_k \max_{S^{(q)}} |h(z)|.$$

La continuité de la correspondance entre  $h$  et les  $h_k$  et  $\mu_k$  en résulte immédiatement.

**2.** Soit  $S$  un domaine borné. Nous dirons que la fonction  $h(z)$  définie dans  $S$ , appartient à la classe  $H_S^p (p \geq 1)$ , si  $h(z)$  est harmonique dans  $S$  et  $y$  est sommable, avec sa  $p^{\text{ième}}$  puissance, c'est-à-dire que, en posant  $z = x + iy$ ,

$$\iint_S |h(z)|^p dx dy < \infty.$$

Le nombre  $p \geq 1$  restera fixe dans tout ce qui va suivre, sauf avis contraire. Pour une fonction  $h(z)$  de  $H_S^p$  nous désignerons par  $\|h\|_S$  — la norme de  $h$  dans  $S$  — la quantité

$$(1) \quad \|h\|_S = \left[ \iint_S |h|^p dx dy \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Il nous sera utile de considérer les classes  $H_S^p$  également pour des domaines non bornés à frontière bornée, donc des domaines  $S$  contenant le point à l'infini.

A cet effet, nous allons changer un peu la définition primitive de  $H_g$ . On considérera d'abord un *voisinage ouvert*  $V$  dans  $S$  de la frontière  $C$  de  $S$ . L'ensemble  $V$  est donc la partie d'un voisinage ouvert de  $C$  dans le plan, contenue dans  $S$  (un tel voisinage  $V$  est formé par exemple par la partie de  $S$  comprise entre la frontière  $C$  et les contours  $\Gamma_k$  considérés dans la démonstration du lemme 1). On dira que  $h(z)$  appartient à  $H_g$ , si  $h(z)$  est harmonique dans  $S$  entier et appartient à  $H_V$  pour au moins un voisinage borné  $V$ .

Quand  $S$  est borné, on peut prendre pour  $V$  le domaine  $S$  entier. Le lemme 3 (*voir* plus loin) montre qu'alors la nouvelle définition de  $H_g$  est équivalente à la définition primitive.

Rappelons maintenant les formules bien connues concernant les fonctions harmoniques et sommables dans un cercle  $|z| < r$

$$(2) \quad h(0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z| < r} h(z) dx dy;$$

$$(3) \quad h'_x(0) = \frac{\partial h(0)}{\partial x} = \frac{4}{\pi r^4} \iint_{|z| < r} h(z) x dx dy;$$

$$(4) \quad h'_y(0) = \frac{\partial h(0)}{\partial y} = \frac{4}{\pi r^4} \iint_{|z| < r} h(z) y dx dy.$$

On déduit de là immédiatement, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$(2') \quad |h(0)| \leq \frac{1}{(\pi r^2)^{\frac{1}{p}}} \left[ \iint_{|z| < r} |h(z)|^p dx dy \right]^{\frac{1}{p}};$$

$$(3') \quad |h'_x(0)| \leq \frac{4}{r(\pi r^2)^{\frac{1}{p}}} \left[ \iint_{|z| < r} |h(z)|^p dx dy \right]^{\frac{1}{p}};$$

$$(4') \quad |h'_y(0)| \leq \frac{4}{r(\pi r^2)^{\frac{1}{p}}} \left[ \iint_{|z| < r} |h(z)|^p dx dy \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Il s'ensuit le lemme suivant :

**LEMME 2.** — Soient  $S$  un domaine borné et  $h(z)$  une fonction de  $H_g$ . En désignant par  $\rho_s = \rho_s(z)$  la plus courte distance de  $z$

à la frontière  $C$  de  $S$ , on a, pour tout  $z$  de  $S$ ,

$$(5) \quad |h(z)| \leq \frac{1}{(\pi \rho^2)^p} \|h\|_S;$$

$$(6) \quad |h'_x(z)| \leq \frac{4}{\rho_S(\pi \rho^2)^p} \|h\|_S, \quad h'_j(z) \leq \frac{4}{\rho_S(\pi \rho^2)^p} \|h\|_S.$$

*Remarque I.* — Dans le cas d'un domaine  $S$  borné, la norme  $\|h\|_S$ , fait de la classe  $H^p_S$  un espace vectoriel normé. Le lemme 2 permet de démontrer que cet espace est complet. En effet, une suite infinie :  $h_1, h_2, \dots$ , avec  $\|h_i - h_j\|_S \rightarrow 0$  pour  $i$  et  $j$  tendant indépendamment vers  $\infty$ , converge, d'après (5), uniformément dans tout domaine complètement intérieur à  $S$ . La fonction-limite  $h$  est harmonique dans  $S$  et l'on a

$$\lim \|h - h_k\|_S = 0.$$

La formule (5) nous permet de démontrer le

LEMME 3. — Soient  $S$  un domaine à frontière  $C$  bornée (donc ou bien  $S$  est borné, ou bien  $S$  contient le point  $\infty$ ),  $V$  et  $V'$  deux voisinages bornés de la frontière  $C$ , dans  $S$ . Il existe alors un nombre  $M > 0$  qui ne dépend que de  $S$ ,  $V$  et  $V'$  tel que pour toute fonction  $h(z)$  harmonique dans  $S$ , on ait

$$(7) \quad \|h\|_{V'} \leq M \|h\|_V \quad (12).$$

*Démonstration.* — Vu que  $V$  est un voisinage de  $C$  dans  $S$ , il existe un  $\alpha > 0$  suffisamment petit tel que tous les  $z$  de  $S$  avec  $\rho_S(z) < 2\alpha$ , appartiennent à  $V$ . Considérons le domaine  $S^\alpha$  de tous les  $z$  de  $S$  avec  $\rho_S(z) > \alpha$ . La frontière de  $S^\alpha$  est composée des points  $z$  avec  $\rho_S(z) = \alpha$ . D'après la définition du nombre  $\alpha$ , ces derniers points ont de la frontière de  $V$  une distance  $\rho_V(z) = \alpha = \rho_S(z)$ . D'après (5) (ou l'on aura mis  $V$  au lieu de  $S$ ) on a sur la frontière de  $S^\alpha$ , donc aussi dans tout  $S^\alpha$ , l'inégalité

$$|h(z)| \leq \frac{1}{(\pi \alpha^2)^p} \|h\|_V.$$

---

(12) Bien entendu, si  $h(z)$  n'appartient pas à  $H^p_V$ , on pose  $\|h\|_V = +\infty$  et (7) est certainement rempli.

Vu que  $S = V + S^z$ , on a

$$V' \subset V + S^z V'.$$

En désignant par  $\Delta$  l'aire du domaine  $V'$  on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{V'} |h|^p dx dy &\leq \iint_V |h|^p dx dy + \iint_{S^z V'} |h|^p dx dy \\ &\leq \|h\|_V^p + \frac{\Delta}{\pi \alpha^2} \|h\|_V^p = \left(1 + \frac{\Delta}{\pi \alpha^2}\right) \|h\|_V^p. \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$M = \left(1 + \frac{\Delta}{\pi \alpha^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**LEMME 4.** — *Soit  $S$  un domaine borné multiplément connexe, du genre considéré au paragraphe 1. Il existe un nombre  $N > 0$  qui ne dépend que du domaine  $S$  (et du nombre  $p$ ) tel que, pour toute fonction  $h(z)$  de  $H_S^p$ , les fonctions  $h_k(z)$  et les nombres  $\mu_k$  déterminés par la décomposition (1, 3) du lemme 1 satisfont aux inégalités*

$$(8) \quad \|h_k\|_S \leq N \|h\|_S \quad (k = 0, 1, \dots, n);$$

$$(9) \quad |\mu_k| \leq N \|h\|_S \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

*Démonstration.* — Posons

$$(10) \quad \alpha = \min \left[ \frac{1}{8} \min_{i \neq j} \rho(C_i, C_j), 1 \right],$$

où  $\rho(C_i, C_j)$  désigne la plus courte distance entre  $C_i$  et  $C_j$ .

Les  $C_j$  étant deux à deux disjoints, on a

$$\alpha > 0.$$

Formons, comme dans la démonstration du lemme 1, un domaine  $S' \subset S$  limité par  $(n+1)$  contours  $\Gamma_k$ , séparant chaque  $C_k$  de tous les autres  $C_i$ . Il est clair que nous pouvons construire le domaine  $S'$  de sorte que

$$(11) \quad \rho(z, C_k) \leq \alpha, \quad \text{pour tout } z \text{ de } \Gamma_k \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Posons encore

$$(12) \quad \beta = \min_{k=0,1,\dots,n} \rho(\Gamma_k, C_k).$$

Les  $\Gamma_k$  se trouvant dans  $S$ , on a

$$\beta > 0.$$

De (11) et (12), on tire  $\beta \leq \alpha$ . D'après (10) et (11), on trouve, pour  $z$  de  $\Gamma_k$  et  $i \neq k$ ,

$$\rho(z, C_i) \geq \rho(C_i, C_k) - \rho(z, C_k) \geq 8\alpha - \alpha = 7\alpha > \alpha \geq \beta.$$

Ceci donne avec (12) que

$$(13) \quad \rho_S(z) = \rho(z, C) = \min \rho(z, C_i) \geq \beta, \quad \text{pour } z \text{ sur } \Gamma_k.$$

Dans la suite, nous désignerons par  $N_1, N_2, N_3$ , etc., des constantes ne dépendant pas de la fonction  $h(z)$ .

Appliquons maintenant la majoration (6) à la formule (1, 5). En désignant par  $l_k$  la longueur de  $\Gamma_k$  et en remarquant que

$$\left| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial n} \right| \leq \left| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial y} \right|,$$

on trouve pour  $\zeta$  sur  $\Gamma_k$

$$\left| \frac{\partial h(\zeta)}{\partial n} \right| \leq \frac{8}{\rho_S(\pi \rho_S^2)^{\frac{1}{p}}} \|h\|_S \leq \frac{8}{\beta(\pi \beta^2)^{\frac{1}{p}}} \|h\|_S,$$

donc

$$(14) \quad |\mu_k| \leq \frac{4 l_k}{\pi \beta(\pi \beta^2)^{\frac{1}{p}}} \|h\|_S = N_1^{(k)} \|h\|_S.$$

Désignons maintenant par  $V_k$  l'ensemble des  $z$  de  $S$  avec  $\rho(z, C_k) < 2\alpha$  et par  $T_k$  le reste de  $S$ , donc l'ensemble des  $z$  de  $S$  avec  $\rho(z, C_k) \geq 2\alpha$ . De (11) résulte que

$$(15) \quad \rho(z, \Gamma_k) \geq \alpha \geq \beta \quad \text{pour } z \text{ dans } T_k.$$

D'autre part, de (10) on déduit que pour  $z$  dans  $V_i$  et  $i \neq k$ ,

$$\rho(z, C_k) \geq \rho(C_i, C_k) - \rho(z, C_i) \geq 8\alpha - 2\alpha = 6\alpha,$$

donc

$$(16) \quad V_i \subset T_k \quad \text{pour } i \neq k.$$

En appliquant maintenant les majorations (5) et (6) aux formules (1, 6) et en remarquant que

$$\left| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial n} \right| \leq \frac{1}{|z - \zeta|},$$

on trouve, vu (13) et (15), respectivement : pour  $z$  dans  $T_0$

$$(17^0) \quad \|h_0(z)\| \leq N_2^{(0)} \|h\|_S,$$

et pour  $z$  dans  $T_k$

$$(17) \quad \|h_k(z) + \mu_k \log |z - a_k|\| \leq N_2^{(k)} \|h\|_S.$$

Soit  $\delta$  le diamètre de  $S$  et  $\Delta$  l'aire de  $S$ . De (17<sup>0</sup>) on tire

$$\|h_0\|_{T_0} \leq N_2^{(0)} \Delta^{\frac{1}{p}} \|h\|_S = N_3^{(0)} \|h\|_S.$$

Supposons maintenant  $k \geq 1$ . Vu (14), (17) et le fait que

$$\|\log |z - a_k|\|_S \leq \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^p \pi \Gamma(p+1) + |\log \delta|^p \delta^2 \pi \right]^{\frac{1}{p}} = N_1,$$

on trouve

$$\begin{aligned} \|h_k\|_{T_k} &\leq \|\mu_k \log |z - a_k|\|_{T_k} + \|h_k(z) + \mu_k \log |z - a_k|\|_{T_k} \\ &\leq \left[ N_1 N_1^{(k)} + N_2^{(k)} \Delta^{\frac{1}{p}} \right] \|h\|_S = N_3^{(k)} \|h\|_S. \end{aligned}$$

D'après (1, 3), on a dans  $V_k$

$$h_k(z) = h(z) - \sum_{i \neq k} h_i(z) - \sum_{i=1}^n \mu_i \log |z - a_i|.$$

Donc, suivant (16),

$$\begin{aligned} \|h_k\|_{V_k} &\leq \|h\|_{V_k} + \sum_{i \neq k} \|h_i\|_{V_k} + \sum_{i=1}^n \|\mu_i \log |z - a_i|\|_{V_k} \\ &\leq \|h\|_S + \sum_{i \neq k} \|h_i\|_{T_i} + \sum_{i=1}^n \|\mu_i\| N_1 \\ &\leq \left[ 1 + \sum_{i \neq k} N_3^{(i)} + N_1 \sum_{i=1}^n N_1^{(i)} \right] \|h\|_S. \end{aligned}$$

Et enfin

$$\|h_k\|_S \leq \|h_k\|_{T_k} + \|h_k\|_{V_k} \leq \left[ 1 + \sum_0^n N_3^{(i)} + N_1 \sum_1^n N_1^{(i)} \right] \|h\|_S,$$

donc, vu (14), notre lemme est démontré avec le nombre

$$N = 1 + \sum_0^n N_3^{(i)} + N_1 \sum_1^n N_1^{(i)} + \sum_1^n N_1^{(i)}.$$

*Remarque II.* — Si  $S$  est un domaine non borné de connexion finie, contenant le point à l'infini, à chaque fonction  $h(z)$  de  $H_g^2$  correspond une décomposition (1, 3') de la remarque I du paragraphe 1. Le lemme 4 subit alors les changements suivants : à chaque voisinage  $V$  dans  $S$ , borné, de la frontière  $C$ , correspond un nombre  $N$  qui ne dépend que du domaine  $S$  et du voisinage  $V$  tel que, pour toute fonction  $h(z)$  de  $H_g^2$ , les fonctions  $h_k(z)$  et les nombres  $A$  et  $\mu_k$ , déterminés par la décomposition (1, 3') satisfont aux inégalités

$$(8') \quad \|h_k\|_V \leq N \|h\|_V \quad (k = 0, 1, \dots, n);$$

$$(9') \quad |\mu_k| \leq N \|h\|_V \quad (k = 0, 1, \dots, n);$$

$$(9'') \quad |A| = |h(\infty)| \leq N \|h\|_V.$$

**3.** Soit  $S$  un domaine quelconque de connexion finie. Nous dirons que la fonction  $h(z)$  appartient à la classe  $D_S$ , si elle est harmonique dans  $S$ , continue au sens conforme dans  $S + C$  <sup>(13)</sup> et possède des dérivées premières  $h'_x$  et  $h'_y$ ,  $z = x + iy$ , bornées dans  $S$ .

Avec nos notations, le problème  $\Pi_p$  (voir l'Introduction) s'énonce comme suit : Soient  $S$  un domaine borné et  $h(z)$  une fonction de  $H_g^2$ . Trouver pour  $\varepsilon > 0$  une fonction  $h'(z)$  de  $D_S$  telle que

$$(1) \quad \|h - h'\|_S < \varepsilon.$$

Si pour toute fonction  $h(z)$  de  $H_g^2$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une telle fonction  $h'(z)$  de  $D_S$ , nous dirons que le domaine borné  $S$  appartient à la classe  $(\Pi_p)$ .

Nous allons changer un peu cette définition, afin de pouvoir admettre dans la classe  $(\Pi_p)$  des domaines non bornés contenant le point à l'infini.

Nous dirons qu'un domaine  $S$ , à frontière bornée  $C$ , appartient à la classe  $(\Pi_p)$ , si à toute  $h(z)$  de  $H_g^2$  correspond un voisinage  $V$  de la frontière  $C$  dans  $S$ , borné, tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une

---

(13) Nous disons que  $h(z)$  est continue au sens conforme dans  $S + C$ , si en effectuant une transformation conforme de  $S$  sur un domaine  $S'$  limité par des courbes simples fermées (et, éventuellement, de points isolés), on transforme  $h(z)$  en une fonction continue dans  $S' + C'$  au sens ordinaire. Cette continuité est un invariant des transformations conformes.

fonction  $h'(z)$  de  $D_s$  avec

$$(1') \quad \|h - h'\|_V < \varepsilon.$$

*Remarque I.* — En ce qui concerne cette dernière définition, le lemme 3 nous conduit immédiatement à la conclusion que, si la condition qui figure dans la définition en question, est vraie pour un voisinage  $V$  elle reste vraie pour tout voisinage  $V$ .

En particulier, pour  $S$  borné, on peut prendre  $S$  pour  $V$ . Il en résulte que, dans ce cas, la nouvelle définition est équivalente à la définition primitive.

*Remarque II.* — Les domaines  $S$  appartenant à la classe  $(II_p)$  ne peuvent pas avoir de points frontières isolés. En effet, une fonction de  $D_s$  est nécessairement régulière en un tel point frontière  $a$ . D'autre part, si l'on avait pour une suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , une suite des fonctions  $h^{(k)}(z)$  de  $D_s$  avec

$$\|h - h^{(k)}\|_V < \varepsilon_k,$$

la suite  $h^{(k)}(z)$  tendrait uniformément vers  $h(z)$  dans tout domaine complètement intérieur à  $V$  et, en particulier, sur une petite circonférence  $|z - a| = r$  séparant  $a$  du reste de la frontière. Les  $h^{(k)}$  étant régulières dans  $|z - a| \leq r$ , elles convergent vers une fonction régulière au point  $a$ , donc  $h(z)$  est nécessairement régulière en  $a$ . Ainsi, si  $S$  appartenait à  $(II_p)$ , toute fonction de  $H_g$  devrait être régulière au point  $a$ . Mais, pour  $p < 2$ , la fonction  $\operatorname{Re} \frac{1}{z-a}$  appartient toujours à  $H_g$  sans être régulière en  $a$ . Pour  $p$  quelconque, si la frontière  $C$  de  $S$  contient encore un point  $b \neq a$ , la fonction  $\log \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$  appartient toujours à  $H_g$  sans être régulière en  $a$ .

Il ne reste que le domaine formé par tout le plan moins le point  $a$  qui peut appartenir à  $(II_p)$  pour  $p \geq 2$ , pour la simple raison qu'alors, la classe  $H_g$  ne contient que des constantes.

**LEMME 5.** — Soit  $S$  un domaine contenant le point à l'infini et dont la frontière  $C$  contient au moins un continu  $C'$  ne se réduisant pas à un point. Il existe alors une fonction  $q(z)$ , harmonique dans  $[S - (\infty)]$ , continue (au sens conforme) dans

$[(S + C) - (\infty)]$ , aux dérivées premières bornées dans  $[S - (\infty)]$  et telle que  $q(z) - \log|z|$  soit harmonique à l'infini.

*Démonstration.* — Prenons deux points  $a$  et  $b$  de  $C'$  réalisant le diamètre de  $C'$

$$|b - a| = \text{diamètre de } C'.$$

Soit  $S'$  le domaine extérieur à  $C'$ , donc  $S \subset S'$ . La branche de la fonction analytique

$$z_1 = t(z) = \sqrt{\frac{z - a}{z - b}},$$

déterminée par

$$t(\infty) = +1,$$

transforme conformément  $S'$  en un domaine  $S''$  qui laisse à son extérieur le cercle

$$|z_1 + 1| < \frac{1}{3}.$$

Posons

$$F(z_1) = \log\left(\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}\right) - \left(\frac{2}{z_1 + 1} - \frac{2}{(z_1 + 1)^2}\right),$$

$$q(z) = \operatorname{Re} F[t(z)] = \log\left|\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}\right| - \operatorname{Re}\left[\frac{2}{z_1 + 1} - \frac{2}{(z_1 + 1)^2}\right].$$

On vérifie immédiatement que la fonction  $q(z)$  satisfait à toutes les conditions du lemme même par rapport au domaine  $S'$ . Elle les remplit donc à plus forte raison par rapport à  $S \subset S'$ .

**THÉORÈME I.** — *Pour qu'un domaine borné  $S$  de connexion finie et sans points frontières isolés appartienne à la classe  $(\Pi_p)$ , il faut et il suffit que les domaines simplement connexes  $S_k$  déterminés par  $S$  (voir § 1) appartiennent tous à  $(\Pi_p)$ .*

*Démonstration.* — 1° La condition est suffisante.

Soit  $h(z)$  de  $H_g^e$  et  $\varepsilon > 0$ . Considérons la décomposition (1, 3)

$$(2) \quad h(z) = \sum_{k=0}^n h_k(z) + \sum_{k=1}^n \mu_k \log|z - a_k|.$$

D'après le lemme 4 chaque  $h_k(z)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) appartient à  $H_g^e$ .  $S_0$  étant borné et appartenant à  $(\Pi_p)$ , il existe une  $h'_0(z)$  de

$D_s$  telle que

$$(3) \quad \|h_0 - h'_0\|_S \leq \|h_0 - h'_0\|_{S_0} < \frac{\varepsilon}{2n+1}.$$

$S_k$ , pour  $k \geq 1$ , contenant le point à l'infini et appartenant à  $(\Pi_p)$ , on peut prendre pour voisinage  $V$  de  $C_k$  dans  $S_k$ , le domaine  $S$  et trouver une fonction  $h'_k(z)$  de  $D_{S_k}$  avec

$$(4) \quad \|h_k - h'_k\|_S < \frac{\varepsilon}{2n+1}.$$

Désignons par  $q_k(z)$  la fonction du lemme 3 pour le domaine  $S_k$ . Il est clair que la fonction  $\mu_k[\log|z - a_k| - q_k(z)]$  appartient à  $H_{S_k}^2$ . Il existe donc une fonction  $h''_k$  de  $D_{S_k}$  avec

$$(5) \quad \|\mu_k[\log|z - a_k| - q_k(z)] - h''_k(z)\|_S < \frac{\varepsilon}{2n+1}.$$

Il est clair que la fonction

$$h'(z) = \sum_{k=0}^n h'_k(z) + \sum_{k=1}^n [\mu_k q_k(z) + h''_k(z)],$$

appartient à la classe  $D_S$ .

D'après (2), (3), (4) et (5), on trouve alors,

$$\begin{aligned} \|h - h'\|_S &\leq \sum_{k=0}^n \|h_k - h'_k\|_S \\ &+ \sum_{k=1}^n \|\mu_k[\log|z - a_k| - q_k(z)] - h''_k(z)\|_S < (n+1+n) \frac{\varepsilon}{2n+1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi la suffisance est démontrée.

2° *La condition est nécessaire.*

En effet, supposons que  $S$  appartient à  $(\Pi_p)$  et considérons une fonction  $h_k(z)$  de  $H_{S_k}^2$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ). Elle appartient à plus forte raison à  $H_S^2$ . Sans restreindre la généralité nous pouvons nous borner, dans le cas  $k \geq 1$  aux fonctions  $h_k(z)$  avec  $h_k(\infty) = 0$ .

D'après notre hypothèse, il existe une fonction  $h'(z)$  de  $D_S$  avec

$$(6) \quad \|h_k - h'\|_S < \frac{\varepsilon}{3N},$$

où  $N$  est la constante du lemme 4.

Décomposons suivant le lemme 1

$$(7) \quad h'(z) = \sum_{i=0}^n [h'_i(z) + \mu_i \log^+ z - a_i],$$

où  $\mu_0 = 0$ . Les fonctions

$$[h'_i(z) + \mu_i \log^+ z - a_i]$$

sont pour  $i \neq k$ , régulières sur  $C_k$ . Par conséquent la fonction

$$h'_k(z) + \mu_k \log^+ z - a_k$$

a, près de  $C_k$ , la même allure que  $h'(z)$ . Elle est donc continue sur  $C_k$  et aux dérivées bornées près de  $C_k$ . Si  $\mu_k = 0$ , il en résulte que  $h'_k(z)$  appartient à  $D_{S_k}$  et, d'après le lemme 4 et (6),

$$(8) \quad \|h_k - h'_k\|_S < N \frac{\varepsilon}{3N} < \varepsilon,$$

car la décomposition de  $h_k$  suivant le lemme 1 ne donne qu'un seul terme  $h_k$ .

Si  $\mu_k \neq 0$ , nous chercherons une seconde fonction  $\tilde{h}(z)$  de  $D_S$  avec

$$(9) \quad \|h_k - \tilde{h}\|_S < \tau, \quad \tau < \min \left[ \frac{\varepsilon}{3N}, \frac{\mu_k}{2N} \right].$$

En décomposant  $\tilde{h}(z)$ , on trouve

$$(10) \quad \tilde{h}(z) = \sum_{i=0}^n [h_i(z) + \bar{\mu}_i \log^+ z - a_i], \quad \bar{\mu}_0 = 0.$$

Comme plus haut, la fonction

$$\tilde{h}_k(z) + \bar{\mu}_k \log^+ z - a_k$$

est continue sur  $C_k$  et aux dérivées bornées près de  $C_k$ . D'après (6) et (9), on a, suivant le lemme 4,

$$(11) \quad |\bar{\mu}_k| < N \|h_k - \tilde{h}\|_S < N \tau \leq \frac{\mu_k}{2},$$

$$(12') \quad \|h_k - h'_k\|_S < N \frac{\varepsilon}{3N} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(12) \quad \|h_k - \tilde{h}_k\|_S < N \frac{\varepsilon}{3N} = \frac{\varepsilon}{3},$$

Par conséquent, on a l'inégalité

$$(13) \left\| h_k - \frac{\mu_k \bar{h}_k - \bar{\mu}_k h'_k}{\mu_k - \bar{\mu}_k} \right\|_S \leq \frac{|\mu_k|}{|\mu_k - \bar{\mu}_k|} \|h_k - \bar{h}_k\|_S + \frac{|\bar{\mu}_k|}{|\mu_k - \bar{\mu}_k|} \|h_k - h'_k\|_S$$

$$< \frac{|\mu_k|}{2} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\frac{|\mu_k|}{2}}{\frac{|\mu_k|}{2}} \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

et la fonction

$$\frac{\mu_k \bar{h}_k - \bar{\mu}_k h'_k}{\mu_k - \bar{\mu}_k} = \frac{\mu_k [h_k(z) + \mu_k \log z - a_k] - \bar{\mu}_k [h'_k(z) + \mu_k \log z - a_k]}{\mu_k - \bar{\mu}_k}$$

appartient visiblement à  $D_{S_k}$ .

L'inégalité (13) ou, éventuellement, (8), prouve que  $S_k$  appartient à  $(\Pi_\rho)$ .

*Remarque III.* — Le théorème I s'étend sans aucun changement au cas d'un domaine  $S$  de connexion finie, contenant le point à l'infini.

**4.** Nous avons déjà indiqué dans l'introduction le sens de la notion de type conforme pour des domaines bornés. Nous allons changer un peu la définition de cette notion afin de pouvoir l'appliquer également aux domaines non bornés, contenant le point à l'infini.

Soient  $S$  et  $S^0$  deux domaines aux frontières  $C$  et  $C^0$  bornées. Soit  $z^0 = t(z)$  une transformation conforme de  $S$  en  $S^0$ . Nous dirons que  $z^0 = t(z)$  établit que  $S$  et  $S^0$  sont du même type conforme s'il existe deux constantes positives  $m$  et  $M$  telles que, dans un voisinage  $V$  de  $C$  dans  $S$ , on ait,

$$(1) \quad m < |t'(z)| < M \quad \text{pour } z \text{ dans } V.$$

En général,  $S$  et  $S^0$  sont dits du même type conforme, s'il existe une transformation  $z^0 = t(z)$  qui l'établit.

*Remarque I.* — Quand  $S$  et  $S^0$  sont bornés,  $t(z)$  et  $t'(z)$  sont régulières dans tout  $S$  et, par conséquent, l'inégalité (1) s'étend dans tout le domaine  $S$ , ce qui nous ramène à la définition primitive de l'égalité du type conforme. Mais, si  $S^0$  contient le point à l'infini,  $t(z)$  possède nécessairement un pôle simple dans  $S$  et l'inégalité (1) ne peut plus être étendue dans tout  $S$ .

*Remarque II.* — La transformation  $z^0 = t(z)$  change le voisinage  $V$  en un voisinage  $V^0$  de  $C^0$  dans  $S^0$  dans lequel on a, pour la fonction inverse  $z = \tau(z^0)$  de  $t(z)$ ,

$$(1') \quad \frac{1}{M} < |\tau'(z^0)| = \left| \frac{1}{t'(z)} \right| < \frac{1}{m}.$$

Donc, la relation entre deux domaines d'être du même type conforme est symétrique. On prouve aussi facilement qu'elle est transitive : si  $S$  est du même type que  $S^0$  et  $S^0$  du même type que  $S'$ , il en est de même pour  $S$  et  $S'$ . Elle est aussi réflexive :  $S$  est du même type que  $S$ . Par conséquent c'est une relation d'équivalence et la notion du type conforme d'un domaine acquiert ainsi un sens tout à fait précis.

**THÉORÈME II.** — *Si un domaine  $S$  appartient à la classe  $(\Pi_p)$ , tous les domaines du même type conforme appartiennent à  $(\Pi_p)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $S^0$  un domaine du même type que  $S$  et soit  $z^0 = t(z)$  une transformation qui l'établit.

Entre les fonctions  $h(z)$  définies dans  $S$  et les fonctions  $h^0(z^0)$  définies dans  $S^0$ , il existe une correspondance biunivoque donnée par les formules

$$(2) \quad h^0(z^0) = h[\tau(z^0)], \quad h(z) = h^0[t(z)].$$

où  $\tau(z^0)$  est la transformation inverse à  $t(z)$ .

Il est clair que par cette correspondance les fonctions harmoniques dans  $S$  se transforment en harmoniques dans  $S^0$ , les fonctions continues *au sens conforme* dans  $S + C$  deviennent continues au même sens dans  $S^0 + C^0$  et vice versa. D'autre part, les formules

$$(3) \quad \begin{cases} h_{x^0}^0 = h'_x \operatorname{Re} \tau' + h'_y \operatorname{Im} \tau', \\ h_{y^0}^0 = -h'_x \operatorname{Im} \tau' + h'_y \operatorname{Re} \tau', \end{cases}$$

jointes à (1') montrent que toute fonction aux dérivées premières bornées dans  $S$  devient une fonction du même genre dans  $S^0$ . Bien entendu, la réciproque est également vraie. Par conséquent *les classes  $D_S$  et  $D_{S^0}$  se correspondent.*

Rappelons maintenant que le déterminant fonctionnel de la trans-

formation  $z^0 = t(z)$  est égal à  $|t'(z)|^2$ , celui de  $z = \tau(z^0)$  à  $|\tau'(z^0)|^2$ . Par conséquent, si  $V$  est un voisinage borné de  $C$  dans  $S$  auquel correspond par la transformation  $z^0 = t(z)$  un voisinage borné  $V^0$  de  $C^0$  dans  $S^0$ , on a

$$(4) \quad \iint_V |h(z)|^p dx dy = \iint_{V^0} |h[\tau(z^0)]|^p |\tau'(z^0)|^2 dx^0 dy^0 \\ \leq \frac{1}{m^2} \iint_{V^0} |h[\tau(z^0)]|^p dx^0 dy^0,$$

$$(5) \quad \iint |h^0(z^0)|^p dx^0 dy^0 \leq M^2 \iint_V |h^0[t(z)]|^p dx dy.$$

Par conséquent, les classes  $H_S^p$  et  $H_{S^0}^p$  se correspondent mutuellement.

Pour démontrer notre théorème, il suffit maintenant de prendre une fonction quelconque  $h^0(z^0)$  de  $H_{S^0}^p$ , considérer la fonction correspondante  $h(z) = h^0[t(z)]$  de  $H_S^p$  et trouver, pour un  $\varepsilon > 0$  quelconque, une fonction  $g(z)$  de  $D_S$  [qui existe vu que  $S$  appartient à  $(II_p)$ ] avec

$$\iint |h(z) - g(z)|^p dx dy < \frac{\varepsilon^p}{M^2}.$$

En revenant alors au domaine  $S^0$ , on déduit de (5)

$$\|h^0(z^0) - g[\tau(z^0)]\|_{V^0} = \sqrt[p]{\iint_{V^0} |h^0(z^0) - g[\tau(z^0)]|^p dx^0 dy^0} < \varepsilon,$$

et la fonction  $g[\tau(z^0)]$  appartient à  $D_{S^0}$ , car elle correspond à une fonction de  $D_S$ .

**5.** Nous emploierons le terme « domaine étoilé » dans un sens un peu plus restreint que celui utilisé habituellement.

Un *domaine étoilé* de centre  $\alpha$  est défini par une équation

$$(1) \quad r < \rho(\varphi), \quad r = |z - \alpha|, \quad \varphi = \arg(z - \alpha),$$

où  $\rho(\varphi)$  est une fonction continue, positive et périodique, de période  $2\pi$ .

Ainsi, un tel domaine est toujours borné et sa frontière ne peut admettre aucun segment d'une droite passant par son centre.

La frontière d'un domaine étoilé sera appelée un *contour étoilé*.

Un contour étoilé est toujours une courbe simple fermée. Il est donné par une équation

$$(2) \quad r = \rho(\varphi), \quad r = |z - a|, \quad \varphi = \arg(z - a).$$

**THÉORÈME III.** — *Tout domaine étoilé  $S$  appartient à la classe  $(II_p)$ .*

*Démonstration.* — Nous pouvons toujours supposer que le centre de  $S$  se trouve à l'origine  $O$ . Nous désignerons dans la présente démonstration par  $S_\alpha$ ,  $S_\beta$ , etc., les domaines obtenus par les homothéties de centre  $O$  et des rapports  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc. (ces domaines sont à distinguer des  $S_k$  introduits dans le paragraphe 1). Il est clair que  $S_1 = S$ , que pour  $\alpha < \beta$  la fermeture de  $S_\alpha$  est comprise dans  $S_\beta$  et que les domaines  $S_\beta$  croissent de manière continue avec  $\alpha$ .

Soit maintenant  $h(z)$  une fonction de  $H_p^2$ . Prenons un  $\varepsilon > 0$ . Puisque pour  $\alpha$  croissant vers 1 par des valeurs inférieures à 1,  $\lim \|h\|_{S-S_\alpha} = 0$ , il existe un  $\alpha$  avec

$$(3) \quad \frac{1}{2\rho} < \alpha < 1,$$

$$(4) \quad \|h\|_{S-S_\alpha} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Posons  $\beta = \sqrt{\alpha}$ . On a

$$(5) \quad 1 > \beta = \sqrt{\alpha} > \alpha > \frac{1}{2\rho}.$$

Les fonctions  $h(\gamma z)$ , pour  $\gamma < 1$ , sont définies dans  $S_\beta$  et y tendent *uniformément*, pour  $\gamma \rightarrow 1$ , vers  $h(z)$ . On peut donc trouver un  $\gamma$  avec

$$(6) \quad 1 > \gamma > \beta > \frac{1}{2\rho},$$

$$(7) \quad \|h(z) - h(\gamma z)\|_{S_\beta} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vu que

$$\iint_{S-S_\beta} |h(\gamma z)|^p dx dy = \frac{1}{\gamma^2} \iint_{S_\gamma-S_{\beta\gamma}} |h(z')|^p dx' dy',$$

et que d'après (5) et (6),  $1 > \gamma > \beta\gamma > \beta^2 = \alpha$ , donc

$$S_\gamma - S_{\beta\gamma} \subset S - S_\alpha,$$

on trouve (vu encore que  $\gamma^2 > \beta^2 = \alpha > \frac{1}{2p}$ )

$$(8) \quad \|h(\gamma z)\|_{s-s_3} = \left(\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{p}} \|h\|_{s\gamma-s\gamma_3} \leq 2 \|h\|_{s-s_\alpha}.$$

Les inégalités (4), (7) et (8) nous donnent

$$\begin{aligned} \|h(z) - h(\gamma z)\|_s &\leq \|h(z) - h(\gamma z)\|_{s-s_3} + \|h(z) - h(\gamma z)\|_{s_3} \\ &\leq \|h(z)\|_{s-s_3} + \|h(\gamma z)\|_{s-s_3} + \|h(z) - h(\gamma z)\|_{s_3} \\ &< \|h\|_{s-s_\alpha} + 2 \|h\|_{s-s_\alpha} + \frac{\varepsilon}{3} < 3 \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci démontre notre théorème, car  $h(\gamma z)$  est régulière dans  $S_{\frac{1}{\gamma}} \supset S + C$ , donc  $h(\gamma z)$  appartient sûrement à la classe  $D_s$ .

Les théorèmes I, II et III nous donnent immédiatement le théorème général suivant :

**THÉORÈME IV.** — Soit  $S$  un domaine borné de connexion finie, tel que les domaines simplement connexes  $S_k$  déterminés par lui (voir § 1) soient de même type conforme que des domaines étoilés. Dans ces conditions  $S$  appartient à  $(\Pi_p)$  pour tout  $p \geq 1$ .

Vu que le domaine extérieur à un domaine étoilé  $E$  est du même type conforme qu'un domaine étoilé, comme l'établit la transformation  $z^0 = \frac{1}{z-a}$ , où  $a$  est le centre du domaine  $E$ , on tire immédiatement du théorème IV le

**COROLLAIRE DU THÉORÈME IV.** — Un domaine limité par un nombre fini de contours étoilés, deux à deux disjoints, appartient à  $(\Pi_p)$  pour tout  $p \geq 1$ .