BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH FAYET

Sur la réduction des équations linéaires et homogènes aux équations à coefficients constants

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 194-209
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__194_0>

SUR LA RÉDUCTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES ET HOMOGÈNES AUX ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS (1);

PAR M. JOSEPH FAYET,
Docteur ès sciences.

Une équation linéaire et homogène à coefficients variables

$$(1) \qquad f(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

est transformée en équation de même forme par la substitution

$$(2) \qquad y = \lambda(x) z, \qquad dt = u(x)\, dx.$$

Les invariants de l'équation (1), relatifs à la substitution (2) ont été étudiés par Halphen (2) qui a exprimé, au moyen de ces invariants, les conditions nécessaires et suffisantes de la réduction de (1) à une équation à coefficients constants. M. Tadya Peyovitch (3) a étudié les invariants relatifs au cas d'une substitution (2) où l'on a $\lambda = 1$ (substitution de variable seule) et en a déduit les conditions nécessaires et suffisantes de la réduction de (1) à une équation à coefficients constants.

On peut obtenir ces résultats directement, sans le concours des invariants. M. Rey Pastor (4) a déjà montré que les résultats que nous avons obtenus relativement à une substitution de variable

(1) Ce travail est le développement d'une Note publiée par les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 1er mars 1937.

(2) HALPHEN, *Mémoires* présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, t. 28, n° 1, 1888, p. 114 et suiv.

(3) TADYA PEYOVITCH, *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 43, 1925, p. 208 et suiv.

(4) REY PASTOR, *Sobre un tipo de ecuaciones diferenciales* (*Revista Matématica hispano-americana*, t. 11, n° 3, 1936, p. 71 et *Boletin del Seminario Matematico*, n° 19.

seule ([1]) pouvaient être obtenus sans utiliser les invariants. Nous allons montrer, en utilisant un mode de démonstration qui nous a été suggéré par M. Dulac, que l'étude de la réduction de (1) à une équation à coefficients constants peut encore être faite directement, lorsque la substitution appliquée est une substitution simultanée de variable et de fonction de la forme (2). Nous retrouverons ainsi, dans les cas particuliers de substitution de variable seule ($\lambda = 1$) ou de fonction seule ($u = 1$) les résultats déjà obtenus par d'autres voies ([1]).

Pour abréger, nous dirons que, lorsque l'équation (1) est transformable, par une substitution (2), à une équation à coefficients constants, cette équation (1) est *réductible*.

1. *Remarque préliminaire.* — Soit l'équation

$$\varphi(z) \equiv \frac{d^n z}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dz}{dt} + A_n z = 0. \tag{3}$$

où les A_i sont constants.

1° Il est évident que, puisque $\varphi(z) = 0$ est à coefficients constants on a

$$\varphi\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\varphi(z). \tag{4}$$

2° Cette identité (4) caractérise les équations linéaires et homogènes à coefficients constants.

En effet, si une équation de la forme (3) dans laquelle les A_i sont supposés fonctions de t, satisfait à l'identité (4), nous aurons, en désignant A'_i la dérivée de A_i par rapport à t

$$\Sigma A'_i \frac{d^{n-i} z}{dt^{n-i}} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Cette dernière égalité ayant lieu pour n'importe quelle fonction z, on en tire $A'_i = 0$ c'est-à-dire $A_i = \text{const}$.

([1]) J. Fayet, *Sur les Équations Différentielles linéaires et homogènes transformables en équations à coefficients constants par un changement de variable indépendante $d\xi = u(x)\,dx$* (*Revista Matematica hispano-americana*, t. 11, n° 3, 1936, p. 49 et suiv.

J. Fayet, *Sur les Équations Différentielles linéaires et homogènes transformables en équations à coefficients constants par un changement de fonction $y = \lambda(x) Y$* (*Revista de la Union Matematica Argentina*, 1, 1937, p. 9 et suiv.).

2. *Identité remarquable.* — Si la substitution (2) transforme (1) en une équation (3) à coefficients constants, on a

$$(5)\qquad \varphi(z) \equiv \frac{1}{\lambda u^n} f(\lambda z), \qquad \varphi\left(\frac{dz}{dt}\right) \equiv \frac{1}{\lambda u^n} f\left(\lambda \frac{dz}{dt}\right).$$

Or, d'après la remarque précédente, on a l'identité (4).

Remplaçons, dans (4), $\varphi(z)$ et $\varphi\left(\frac{dz}{dt}\right)$ par les expressions (5). Il vient

$$(6)\qquad \frac{1}{\lambda u^n} f\left(\lambda \frac{dz}{dt}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\lambda u^n} f(\lambda z)\right].$$

D'après les formules (2), on a

$$(7)\qquad dt = u\,dx, \qquad \lambda z = y, \qquad \lambda \frac{dz}{dt} = \frac{1}{u} y' - \frac{\lambda'}{\lambda u} y.$$

En éliminant z, $\frac{dz}{dt}$ et dt entre (6) et (7), on a

$$(8)\qquad \frac{1}{\lambda u^{n-1}} f\left(\frac{1}{u} y' - \frac{\lambda'}{\lambda u} y\right) \equiv \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\lambda u^n} f(y)\right]$$

identité qui est de la forme

$$(9)\qquad \boxed{G(x) f[\mu(x) y' + \nu(x) y] \equiv \frac{d}{dx}[g(x) f(y)].}$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Lorsqu'une équation linéaire et homogène est réductible, il existe quatre fonctions G, g, μ, ν, *de la variable* x *telles que l'identité* (9) *est satisfaite.*

Réciproquement, si une équation linéaire et homogène (1) est telle que l'identité (9) est satisfaite, cette équation (1) est réductible.

1° Si les fonctions G, g, μ, ν ont les formes particulières indiquées dans l'identité (8), l'équation $f(y) = 0$ sera réductible. En effet, si l'on remplace dans (8), y', y, dx par leurs expressions tirées de (7), on retrouve (6). En remplaçant dans (6) $f(\lambda z)$ et $f\left(\lambda \frac{dz}{dt}\right)$ par les expressions (5), on obtient l'identité (4) qui, ainsi qu'on l'a vu, caractérise une équation linéaire et homogène à coefficients constants $\varphi(z) = 0$.

2° Il suffit donc de montrer que, s'il existe des fonctions G, g, μ et ν telles que l'identité (9) est satisfaite, ces fonctions donnent à (9) la forme (8). Identifions, dans (9) que nous pouvons écrire

$$G f(\mu y') + G f(\nu y) \equiv \frac{d}{dx}[g f(y)],$$

les termes en $y^{(n+1)}$ et en $y^{(n)}$. Nous obtenons

$$(10) \qquad \mu G = g,$$

$$(11) \qquad G(n\mu' + a_1\mu + \nu) = g' + g a_1.$$

En éliminant G, on a

$$(12) \qquad (n\mu' + \nu) g = \mu g'$$

qui détermine g si μ et ν sont connus. Quelles que soient d'ailleurs ces fonctions à déterminer μ et ν, on peut toujours poser

$$(13) \qquad \mu = \frac{1}{u}, \qquad \nu = -\frac{\lambda'}{\lambda u},$$

u et λ étant deux fonctions inconnues auxiliaires à déterminer.

L'équation (12) devient, par suite des expressions (13)

$$\frac{g'}{g} + n\frac{u'}{u} + \frac{\lambda'}{\lambda} = 0.$$

On en déduit

$$(14) \qquad g = \frac{k}{\lambda u^n} \quad \text{et} \quad G = \frac{k}{\lambda u^{n-1}} \qquad [k = \text{const.}].$$

Si l'on remplace dans (9), g, G, μ et ν par ces expressions (13) et (14) et si l'on supprime la constante k, qui se met en facteur dans les deux membres, on obtient l'identité (8).

Remarquons que les fonctions λ et u qui figurent dans (13) sont, comme on l'a vu, les fonctions qui définissent la substitution (2) qui réduit l'équation (1).

En résumé, nous avons la proposition suivante :

Théorème. — *Pour qu'une équation linéaire et homogène* (1) *soit réductible à une équation à coefficients constants par une substitution simultanée de variable et de fonction* (2), *il faut et il suffit qu'il existe quatre fonctions* G, g, μ *et* ν *de la variable telles que l'on ait l'identité* (9).

Nous en déduisons immédiatement les cas particuliers suivants :

Pour qu'une équation linéaire et homogène (1) *soit réductible à une équation à coefficients constants par une substitution de variable seule* $dt = u(x)\,dx$, *il faut et il suffit qu'il existe trois fonctions* G, g, μ *de la variable* x *telles que l'on ait l'identité*

$$\boxed{Gf(\mu y') \equiv \frac{d}{dx}[gf(y)].}$$

Pour qu'une équation linéaire et homogène (1) *soit réductible à une équation à coefficients constants par une substitution de fonction seule* $y = \lambda(x)z$, *il faut et il suffit qu'il existe trois fonctions* G, g, μ *de la variable* x *telle que l'on ait l'identité*

$$\boxed{Gf(\mu y' + ky) \equiv \frac{d}{dx}[gf(y)]}$$

avec $k = \text{const.}$

L'identité caractéristique (9) va nous permettre de trouver une forme géométrique des conditions nécessaires et suffisantes de la réduction de l'équation (1). Elle nous permettra également d'exprimer l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $n+1$, lorsque l'équation (1), d'ordre n est réductible.

3. *Forme géométrique des conditions nécessaires et suffisantes de la réduction d'une équation différentielle linéaire et homogène.*

Si l'équation (1) est réductible, il est clair, d'après (9) que toute solution de (1) est solution de

$$f(\mu y' + \nu y) = 0. \tag{15}$$

Réciproquement, si toutes les solutions de (1) sont aussi solutions de l'équation (15), je dis que l'équation (1) est réductible.

En effet, les solutions communes à (1) et à (15) vérifient aussi l'équation

$$Gf(\mu y' + \nu y) - \frac{d}{dx}[gf(y)] \equiv H(y) = 0,$$

quelles que soient les fonctions $G(x)$ et $g(x)$. Or, nous avons vu (n° **2**, 2°) que, quels que soient μ et ν, on peut déterminer les deux fonctions G et g de façon que $H(y)$ ne contienne ni terme en $y^{(n+1)}$, ni terme en $y^{(n)}$. L'équation différentielle $H(y) = 0$ d'ordre $n-1$ au plus, étant vérifiée pour toutes les solutions de l'équation différentielle (1) d'ordre n, est donc identiquement nulle. On a donc l'identité (9) et par conséquent, l'équation (1) est réductible. On obtient le résultat suivant :

Théorème. — *Pour qu'une équation linéaire et homogène* (1) *d'ordre n soit réductible à une équation à coefficients constants par une substitution de variable et de fonction* (2), *il faut et il suffit qu'il existe des fonctions $\mu(x)$ et $\nu(x)$ telles que toute solution de* (1) *soit solution de l'équation d'ordre $n+1$*

$$f(\mu y' + \nu y) = 0.$$

4. ***Intégration de l'équation $f(\mu y' + \nu y) = 0$ lorsque $f(y)$ est réductible.***

Supposons que, dans l'équation (15), μ et ν soient des fonctions telles que l'identité (9) est satisfaite. D'après ce que nous avons vu, et si nous remplaçons dans (5) μ et ν par les expressions (13), toute solution de l'équation (1) est solution de l'équation

$$f\left(\frac{1}{u}y' - \frac{\lambda'}{\lambda u}y\right) = 0. \tag{16}$$

L'équation (1) étant réductible à une équation (13) à coefficients constants, nous savons intégrer l'équation (1). Chacune des solutions $z = z_i(t)$ d'un système de n solutions distinctes de l'équation à coefficients constants $\varphi(z) = 0$ donnera, pour l'équation (1), une solution

$$y = \lambda(x)\, z_i(t),$$

en remplaçant t par son expression en fonction de x.

Pour que l'équation (16) soit intégrée, il suffit de trouver une solution de (16).

Or, on voit immédiatement que l'équation (16) admet la solution $y = \lambda(x)$. D'ailleurs, cette solution $y = \lambda$ n'est solution de (1) que si $\varphi(z) = 0$ admet $z = 1$ pour solution.

Par conséquent, dans le cas général où, dans $\varphi(z) = 0$ on a $A_n \neq 0$, la solution générale de (16) est

$$(17) \qquad \boxed{y = C\lambda(x) + \Sigma\, C_i \lambda(x) z_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)}$$

C et C_i désignant des constantes.

Supposons que dans $\varphi(z) = 0$, on ait

$$A_j = 0 \qquad \text{pour} \quad j = n,\ n-1,\ \ldots,\ n-q+1,$$

le coefficient A_{n-q} n'étant pas nul.

L'équation $\varphi(z) = 0$ admet les solutions $1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{q-1}$, mais n'admet pas la solution t^q. On voit, en remplaçant t en fonction de x que l'équation (1) admet les solutions

$$\lambda,\ \lambda t,\ \lambda t^2,\ \ldots,\ \lambda t^{q-1},$$

mais n'admet pas la solution $y = \lambda t^q$.

Nous allons montrer que $y = \lambda t^q$ est alors solution de (16).

En effet, à la solution $y = \lambda t^{q-1}$ de $f(y) = 0$ correspond une infinité de solutions de l'équation (16) définies par

$$\frac{1}{u} y' - \frac{\lambda'}{\lambda u} y = q \lambda t^{q-1}.$$

En prenant de nouveau t pour variable, cette équation s'écrit

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d\lambda}{dt}\frac{y}{\lambda} = q\lambda t^{q-1}.$$

La solution générale de cette équation est

$$y = K\lambda + \lambda t^q \qquad \text{avec} \quad K = \text{const.}$$

On a donc bien, en particulier, la solution $y = \lambda t^q$. En remplaçant t par son expression en fonction de x, la solution générale de l'équation (16) sera donnée par

$$(18) \qquad \boxed{y = \lambda(x)[\Sigma\, K_j t^j + \Sigma\, C_i z_i(t)]}$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, q, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-q).$$

On déduirait sans difficulté de l'expression (18) la solution générale de l'équation différentielle $f(\mu y') = 0$ lorsque $f(y) = 0$ est réductible à une équation à coefficients constants par un changement de variable seule $dt = u(x)\,dx$. On pourrait ainsi déduire de (18) l'expression de la solution générale de l'équation $f(\mu y' + ky) = 0$ lorsque $f(y) = 0$ est réductible à une équation à coefficients constants au moyen d'un changement de fonction seule : $y = \lambda(x)\,z$.

Remarque : Dans le cas général, où le coefficient a_n dans (1) n'est pas identiquement nul, l'équation (1) n'admet pas la solution $y = 1$. Par suite l'équation $\varphi(z) = 0$, à coefficients constants n'admet pas la solution $z = 0$. On a : $A_n \neq 0$. La solution générale de $f\left(\frac{1}{u}y'\right) = 0$ est

$$\boxed{y = C + \Sigma C_i y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)}$$

lorsqu'on ne considère qu'un changement de variable seule ($\lambda = 1$). $y = \Sigma C_i y_i$ représente la solution générale de (1). Il en résulte la proposition suivante :

Théorème. — *Si une équation linéaire et homogène* (1) *est réductible à une équation à coefficients constants par un changement de la variable seule $dt = u(x)\,dx$ et si le coefficient a_n n'est pas identiquement nul dans* (1), *les courbes intégrales de l'équation $f\left(\frac{1}{u}y'\right) = 0$ se déduisent des courbes intégrales de* (1) *par une translation parallèle à Oy.*

Réciproquement, considérons une équation linéaire et homogène $f(y) = 0$ dans laquelle a_n n'est pas identiquement nul et supposons que toute courbe intégrale de l'équation $f\left(\frac{1}{u}y'\right) = 0$, pour une certaine fonction u de la variable x s'obtienne en imprimant à une courbe intégrale de $f(y) = 0$ une translation parallèle à Oy.

Les solutions de l'équation $f\left(\frac{1}{u}y'\right) = 0$ satisfont alors à $f(y + C) = 0$, c'est-à-dire à $f(y) \times a_n^{-1} = 0$ ($C = \text{const.}$) et par suite à l'équation linéaire et homogène d'ordre $n + 1$

$$\frac{d}{dx}[f(y) \times a_n^{-1}] = 0.$$

Il existe donc des fonctions G et g de x telles que l'on a l'identité

$$Gf\left(\frac{1}{u}y'\right) \equiv \frac{d}{dx}[gf(y)].$$

Et par suite, l'équation $f(y)=0$ est réductible à une équation à coefficients constants par un changement de variable seule $dt = u(x)\,dx$.

5. *Exemples.* — L'identification des deux membres de (9) donne $n+2$ équations. Deux d'entre elles nous ont donné G et g. Il reste donc n équations pour déterminer λ et u, ou si l'on préfère μ et ν. Il y a par suite $n-2$ conditions, en général distinctes, pour que l'équation (1) soit réductible par une substitution (2).

On se servira des n conditions que doivent vérifier μ et ν pour déterminer le plus simplement possible ces fonctions. Si l'on a $n>2$, ces fonctions se détermineront, en général, sans quadrature, puisqu'il y a plus d'équations que d'inconnues.

Écrivons les n équations données par l'identification dans (9), des termes en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$. Nous obtenons :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &G\left[\frac{n(n-1)}{2}\mu''+(n-1)a_1\mu'+a_2\mu+n\nu'+a_1\nu\right]=ga_2+(ga_1)',\\ &G\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mu'''+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_1\mu''+(n-2)a_2\mu'\right.\\ &\qquad\left.+a_3\mu+\frac{n(n-1)}{1.2}\nu''+(n-1)a_1\nu'+a_2\nu\right]=ga_3+(ga_2)',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &G[\mu^{(n)}+a_1\mu^{(n-1)}+a_2\mu^{(n-2)}+\ldots+a_n\mu\\ &\qquad+n\nu^{(n-1)}+(n-1)a_1\nu^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\nu]=ga_n+(ga_{n-1})',\\ &G[\nu^{(n)}+a_1\nu^{(n-1)}+a_2\nu^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\nu'+a_n\nu]=(ga_n)'. \end{aligned}\right.$$

Remarquons que, en tenant compte des résultats (10) et (12), la première des équations (19) peut s'écrire

$$\frac{n(n-1)}{2}\mu''-(a_1\mu'+a_1'\mu)+n\nu'=0.$$

Elle donne la relation suivante entre μ et ν

$$(20)\qquad \frac{n(n-1)}{2}\mu'-a_1\nu+n\nu=K \qquad [K, \text{const.}].$$

L'élimination de ν entre (20) et la deuxième des équations (19) conduit, en posant

(21) $$p(x) \equiv a_2 - \frac{n-1}{2} a'_1 - \frac{n-1}{2n} a_1^2,$$

à l'équation

(22) $$\frac{n(n^2-1)}{12} \mu''' + 2p(x)\mu' + p'(x)\mu = 0.$$

Nous allons appliquer ces résultats à diverses équations :

1° Nous allons d'abord retrouver très rapidement, et par une autre voie, un résultat déjà obtenu par Halphen [7] relativement à l'équation

(23) $$y^{(n)} + a_n y = 0,$$

dans laquelle a_n désigne une fonction quelconque de x.

Demandons-nous quelle doit être la forme de a_n pour que l'équation (23) soit réductible à une équation à coefficients constants par une substitution (2). D'après (22) on a

(24) $$\mu(x) = C_2 x^2 + C_1 x + C_0,$$

C_0, C_1, C_2 désignant des constantes. On a donc, d'après (22) et (20)

$$\mu^{(n)}(x) = 0, \qquad \nu^{(n-1)}(x) = 0.$$

Toutes les équations (19), à partir de la troisième jusqu'à l'avant-dernière inclusivement, constituent des conditions satisfaites d'elles-mêmes, puisque la forme particulière de l'équation considérée nous donne

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0.$$

La dernière des équations (19) nous donne ainsi la condition unique de la réduction. Cette condition s'écrit

$$\mu a'_n + n a_n \mu' = 0.$$

Elle donne la forme de a_n cherchée. Ainsi, l'équation [8]

$$y^{(n)} + C_3 (C_2 x^2 + C_1 x + C_0)^{-n} y = 0$$

---

(7) Halphen, Mémoire cité p. 143.

(8) Pour $n = 2$, Besge a énoncé un résultat analogue (*Journal de Liouville*, 1re série, t. 9, C. R. de l'Acad. Sc., t. 92).

est réductible. On trouvera aisément que la substitution donnant la réduction peut s'écrire

$$dt = (C_2x^2 + C_1x + C_0)^{-1}\,dx, \qquad y = (C_2x^2 + C_1x + C_0)^{\frac{n-1}{2}}\,z.$$

2° Considérons aussi l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{25}$$

dans laquelle a_{n-1} et a_n représentent des fonctions quelconques de x et supposons $n \geq 4$. En procédant comme pour l'équation (23), on montrera que, pour que l'équation (25) soit réductible, il faut et il suffit que a_{n-1} et a_n aient les formes suivantes :

$$a_{n-1} = \frac{C_3}{(C_2x^2 + C_1x + C_0)^{n-1}}, \qquad a_n = \frac{-(n-1)C_2C_3x + C_4}{(C_2x^2 + C_1x + C_0)^n},$$

C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 désignant des constantes.

3° Considérons encore, dans le même ordre d'idées, l'équation

$$y''' + a_2y' + a_3y = 0, \tag{26}$$

a_2 et a_3 étant des fonctions quelconques de x.

D'après (20), nous aurons

$$\mu' + \nu = K.$$

Et nous obtiendrons, pour la détermination de μ et la condition unique de réduction les deux équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &2\mu''' + 2a_2\mu' + a_2'\mu = 0, \\ &\mu^{\text{IV}} + a_2\mu'' + 3a_3\mu' + a_3'\mu = 0. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

En dérivant la première équation (27) et retranchant cette dérivée de la deuxième équation (27), on obtient

$$3\left(a_3 - \frac{1}{2}a_2'\right)\mu' + \left(a_3' - \frac{1}{2}a_2''\right)\mu = 0.$$

D'où

$$\mu^3 = C\left(a_3 - \frac{a_2'}{2}\right)^{-1}.$$

La condition unique à laquelle doivent satisfaire les fonctions a_2 et a_3 pour que la réduction de (26) soit possible s'en déduira sans difficulté.

4° Soit maintenant l'équation, dite d'Euler

$$(28)\qquad \begin{aligned} & y^{(n)} + A_1 x^{-1} y^{(n-1)} + A_2 x^{-2} y^{(n-2)} + \ldots \\ & + A_{n-1} x^{-(n-1)} y' + A_n x^{-n} y = 0, \end{aligned}$$

où les A_i sont des constantes.

Il est facile de voir, qu'en prenant

$$\mu = x, \qquad \nu = 0,$$

les équations (20) et (22) sont satisfaites et que les $n - 2$ conditions données par les équations (19) sont vérifiées. On retrouve ainsi le résultat bien connu : la transformation $x = e^t$, de variable seule, transforme l'équation d'Euler en une équation à coefficients constants.

La solution générale de l'équation (28) est, comme on sait

$$(29)\qquad y = x^{r_1} P_{\mu_1 - 1}(\operatorname{Log} x) + \ldots + x^{r_k} P_{\mu_k - 1}(\operatorname{Log} x),$$

$r_1, r_2, \ldots, r_k$ désignant les k racines distinctes de l'équation caractéristique; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ étant les ordres de multiplicité de ces racines, et $P_{\mu_i - 1}(\operatorname{Log} x)$ étant un polynome en $\operatorname{Log} x$ de degré μ_{i-1} dont les coefficients sont arbitraires.

D'après ce que nous avons démontré au n° 4, la solution générale de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} & y^{(n+1)} + (n + A_1) y^{(n)} + [(n-1) A_1 + A_2] x^{-1} y^{(n-1)} + \ldots \\ & + [A_{n-1} + A_n] x^{-(n-1)} y' = 0, \end{aligned}$$

que l'on déduit de (28) en y substituant xy' à la place de y, sera

$$y = C + x^{r_1} P_{\mu_1 - 1}(\operatorname{Log} x) + \ldots + x^{r_k} P_{\mu_k - 1}(\operatorname{Log} x).$$

5° Nous avons vu, au commencement de ce paragraphe, que, pour qu'une équation linéaire et homogène d'ordre n soit réductible, ses coefficients doivent vérifier, en général, $n - 2$ conditions distinctes. L'équation linéaire et homogène du second ordre

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

est donc, théoriquement, toujours réductible à une équation à coefficients constants. Mais, si l'on écrit les quatre équations du système (19) qui sont relatives à $n = 2$, on obtient

$$
(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} G\mu &= g, \\ G(2\mu' + a_1\mu + \nu) &= ga_1 + g', \\ G[\mu'' + a_1\mu' + a_2\mu + 2\nu' + a_1\nu] &= ga_2 + (ga_1)', \\ G[\nu'' = a_1\nu' + a_2\nu] &= (ga_2)'. \end{aligned} \right.
$$

Les deux premières équations lient, comme on l'a vu au n° **2**, G et g aux fonctions μ et ν.

Les deux dernières équations (30), après élimination de G et g s'écrivent

$$
(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu' - a_1\mu + 2\nu = K \qquad (K, \text{ const.}) \\ &\nu'' + a_1\nu' - 2a_2\mu' - a'_2\mu = 0. \end{aligned} \right.
$$

L'examen des équations (31) montre que, pratiquement, on ne pourra pas, en général, exprimer les fonctions μ et ν. Voici quelques exemples d'équations linéaires et homogènes du second ordre où cette détermination pratique est possible.

A. Soit l'équation

$$
(32) \qquad f(y) \equiv y'' + \frac{\varphi'}{\varphi} y' - \frac{1}{\varphi^2} y = 0,
$$

où φ désigne une fonction quelconque de x. On a ici

$$
a_1 = \frac{\varphi'}{\varphi}, \qquad a_2 = -\frac{1}{\varphi^2}, \qquad a'_2 = \frac{2\varphi'}{\varphi^3}.
$$

Les équations (31) deviennent

$$
\mu' - \frac{\varphi'}{\varphi}\mu + 2\nu = K,
$$

$$
\nu'' + \frac{\varphi'}{\varphi}\nu' + 2\frac{1}{\varphi^2}\mu' - 2\frac{\varphi'}{\varphi^3}\mu = 0.
$$

On aperçoit une solution de ce dernier système, c'est $\mu = \varphi$, $\nu = C_0$ ($C_0 =$ const.). On en tire

$$
u = \frac{1}{\varphi}, \qquad \lambda = C_1 e^{C_0\int\frac{dx}{\varphi}} \qquad (C_1 = \text{const.}).
$$

On vérifiera aisément que la transformation définie par

$$
y = C_1 e^{C_0\int\frac{dx}{\varphi}} z, \qquad dt = \varphi^{-1}\, dx,
$$

transforme l'équation (32) en l'équation à coefficients constants

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2C_0 \frac{dz}{dt} + C_0^2 z = 0.$$

On vérifiera aussi que la substitution de variable seule $dt = \varphi^{-1} dx$ transforme l'équation (32) en l'équation à coefficients constants

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0.$$

L'équation différentielle $f\left(\frac{1}{u} y'\right) = 0$ c'est-à-dire $f(\varphi y') = 0$ déduite de (32) s'écrit

$$(33) \qquad y''' + 3 \frac{\varphi'}{\varphi} y'' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^2}\right) y' = 0.$$

Les solutions générales de (30) et (32) peuvent s'écrire respectivement

$$y = k_0 e^{\int \frac{dx}{\varphi}} + k_1 e^{-\int \frac{dx}{\varphi}},$$

$$y = k_2 + k'_0 e^{\int \frac{dx}{\varphi}} + k'_1 e^{-\int \frac{dx}{\varphi}},$$

k_0, k'_0; k_1, k'_1; k_2 désignant des constantes. On vérifie ainsi que les courbes intégrales de (33) se déduisent des courbes intégrales de (31) en imprimant à ces dernières des translations parallèles à l'axe des y. Voici une application géométrique élémentaire de ce type d'équation (32). A tout point M d'une courbe (C) d'équation $y = f(x)$ et rapportée aux axes habituels $x'Ox$, $y'Oy$, faisons correspondre le point N, intersection de la parallèle menée par O à la tangente à (C) en M avec la parallèle à Oy menée par M. Si l'on cherche à déterminer les courbes (C) de façon que M dérive de N de la même manière dont N dérive de M, on est conduit à l'équation différentielle

$$(34) \qquad y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{\lambda^2} y = 0,$$

équation d'Euler simple qui est bien du type (32). On a $\varphi = x$, les courbes (C) sont les hyperboles

$$y = ax + \frac{b}{x},$$

ayant pour foyer O. Les courbes (Γ) lieu de N sont les hyperboles conjuguées

$$y = ax - \frac{b}{x} \qquad (a \text{ et } b \text{ const.}).$$

L'équation (33) s'écrit, dans ce cas particulier

$$y''' + \frac{3}{x}y'' = 0.$$

Son intégrale générale peut s'écrire

$$y = C_0 x + \frac{C_1}{x} + C_2.$$

C_0, C_1, C_2 désignant des constantes. Ainsi, chacune des courbes intégrales de cette dernière équation s'obtient bien en imprimant à l'une des courbes intégrales de (34) une translation parallèle à Oy.

B. Soit l'équation

$$(35) \qquad y'' + \frac{\varphi' + 2k}{\varphi}y' + \frac{k^2 - 1}{\varphi^2}y = 0,$$

où k désigne une constante et φ une fonction quelconque de x. Les équations (31) sont satisfaites pour $\mu = \varphi$; $\nu = C_0$ (C_0 const.). On obtient des résultats analogues à ceux de l'équation étudiée dans le paragraphe A. Signalons encore une application élémentaire de ce type d'équation (35). A tout point M d'une courbe (C) définie comme précédemment, faisons correspondre le point N intersection de la parallèle à OM menée par le point où la tangente à (C) en M rencontre Oy, avec la parallèle à Oy menée par M. Si l'on cherche les courbes (C) pour lesquelles le point M dérive de N de la même manière dont N dérive de M, on est conduit à l'équation différentielle

$$(36) \qquad y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0,$$

équation du type (35) ($\varphi = x$; $k = -2$). Les intégrales sont les courbes $y = ax^3 + bx$; les courbes (Γ) lieu de N ont pour équation : $y = -ax^3 + bx$. Les solutions de l'équation $f\left(\frac{1}{u}y'\right) = 0$

déduite de (36) en y substituant $\frac{1}{u}y' = xy'$ à la place de y peuvent s'écrire

$$y = C_3 x^3 + C_2 x + C_1.$$

Elles dérivent des solutions de (36) par une translation parallèle à Oy.

C. Soit l'équation

$$y'' + 2\varphi y' + (\varphi' + \varphi^2 - 1)y = 0, \tag{37}$$

dans laquelle φ désigne une fonction quelconque de x. Les équations (31) s'écrivent alors

$$\mu' - 2\varphi\mu + 2\nu = k,$$
$$\nu'' + 2\varphi\nu' - 2(\varphi' + \varphi^2 - 1)\mu' - (\varphi'' + 2\varphi\varphi')\mu = 0.$$

On aperçoit la solution

$$\mu = C_0; \qquad \nu = C_0\varphi + C_1,$$

C_0 et C_1 étant des constantes. La substitution de fonction seule

$$y = C_2 e^{-\int(\varphi + C)dx} z \qquad (C_2 \text{ et } C \text{ const.})$$

transforme l'équation (37) en l'équation à coefficients constants

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - z = 0.$$

L'équation $f(y + \varphi y') = 0$ déduite de (37) s'écrit

$$y''' + 3\varphi y'' + (3\varphi' + 3\varphi^2 - 1)y' + (\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3 - \varphi)y = 0. \tag{38}$$

Les solutions générales des équations (37) et (38) s'écrivent respectivement

$$y = e^{-\int\varphi dx}[h_0 e^x + h_1 e^{-x}]$$
$$y = e^{-\int\varphi dx}[h'_0 e^x + h'_1 e^{-x} + h_2]$$

h_0, h'_0, h_1, h'_1, h_2 désignant des constantes. Ces expressions montrent que toute solution de l'équation (37) est bien en même temps solution de l'équation (38).