Bulletin de la S. M. F.

Aryeh Dvoretzky

Sur les singularités des fonctions analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 171-193
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__171_0>

SUR LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

Par M. Aryeh Dvoretzky,

Jérusalem (Palestine).

INTRODUCTION.

Le sujet de ce Mémoire est la détermination de la position des singularités d'une fonction analytique $f(z)$ donnée par son développement de Taylor

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

à partir des coefficients de ce développement.

Le Mémoire est divisé en deux parties. La première, composée des paragraphes 1, 2 et 3, s'occupe des singularités situées à l'intérieur et sur la périphérie du cercle de méromorphie (1).

La formule classique de Cauchy-Hadamard donne le *module* de la singularité la plus rapprochée du point $z = 0$. M. Mandelbrojt (2) a trouvé, en utilisant la transformation d'Euler, une expression générale et simple pour l'*argument* de la singularité la plus rapprochée du *point* $z = R$ située sur le cercle de convergence $|z| = R$. Ces recherches furent continuées par M. Denjoy (3).

Les résultats de M. Hadamard, publiés dans sa célèbre Thèse (4) concernant les modules des singularités de $f(z)$ situées à l'intérieur du cercle de méromorphie m'ont servi (5) pour déterminer

---

(1) *Voir* note (12).

(2) *C. R. Acad. Sci.*, t. 204, 1937, p. 1456. *Voir* aussi la remarque de M. Valiron citée par M. Hadamard dans sa Note, *ibid.*, p. 1458.

(3) *C. R. Acad. Sci.*, t. 204, 1937, p. 1611; *ibid*, t. 205, 1937, p. 453.

(4) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. 8, 1898, p. 101.

(5) *C. R. Acad. Sci.*, t. 205, 1937, p. 406.

les arguments de ces singularités, et de plus, dans le cas où le nombre des pôles à l'*intérieur* du cercle de méromorphie est fini, pour déterminer les arguments des pôles situés sur le cercle de méromorphie. Dans certains cas je suis arrivé même à déterminer l'argument de la singularité non polaire sur $|z| = R_\infty$ (R_∞ désigne le rayon du cercle de méromorphie) qui est la plus rapprochée du *point* $z = R_\infty$. Dans le présent Mémoire, je complète ce résultat. Le résultat équivalent au résultat de M. Mandelbrojt ([2]) est un cas particulier de notre théorème VIII (le cas de VIII*a*). Mais l'expression obtenue par M. Mandelbrojt possède l'avantage d'une simplicité plus grande. Nous comblons cette lacune à l'aide du critère de M. Hadamard sur les singularités des fonctions analytiques, qui nous permet d'obtenir une expression plus simple dans le cas particulier considéré au théorème VIII*a*.

La seconde partie du présent Mémoire comprend les paragraphes 3, 4 et 6 et s'occupe des singularités de $f(z)$ au voisinage d'une singularité située sur le cercle de convergence $|z| = R$, qui est un point d'accumulation de points singuliers de $f(z)$. Pour traiter ce sujet il faut introduire les notions de ***l'angle singulier direct*** et de ***l'angle singulier indirect***. L'angle singulier direct de $f(z)$ au point $b = Re^{i\gamma}$ est l'angle $\psi^+(b)$, où $\psi^+(b)$ est le nombre minimum dans l'intervalle $0 \leqq \psi^+(b) \leqq \frac{\pi}{2}$ pour lequel à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\rho > 0$ tel que le domaine

$$0 < |z - b| < \rho; \qquad \psi^+(b) + \varepsilon < \arg(z - b) - \gamma < \pi$$

ne contient pas de singularités de $f(z)$.

D'une manière analogue on définit l'angle singulier indirect (*cf.* Définition VIII). Dans ce Mémoire nous parvenons à exprimer cet angle comme une fonction des coefficients du développement de Taylor de $f(z)$. Dans certains cas nous obtenons en outre des informations sur la nature des singularités (polaire ou non polaire) et leur densité au voisinage de la demi-droite d'origine b et de direction $\gamma + \psi^+(b)$.

Puisque les théorèmes préparatifs sont démontrés sous la seule hypothèse que l'ensemble des points singuliers est un ensemble fermé et que les pôles sont des singularités isolées, les paragraphes 1-4 s'occupent d'ensembles généraux.

Je fais remarquer pour faciliter la lecture, qu'en passant des ensembles généraux $S = S_1 + S_2$ au problème des singularités

S sera l'ensemble des singularités de $f(z)$;

S_1 sera l'ensemble des singularités polaires de $f(z)$;

S_2 sera l'ensemble des singularités non polaires de $f(z)$;

et p_s (pour $s \in S_1$) la multiplicité du pôle s.

1. *La notion de distance et de ses dérivées.*

a. Cas d'un point fixe b.

La distance $D(a, b)$ d'un point quelconque a au point fixe b du plan complexe est définie pour tout point a de ce plan par

$$D(a, b) = D(a) = |b - a|$$

$D(a)$ est une fonction continue de a.

Théorème I. — *Soit $a \neq \infty$ et $D(a, b) \neq \infty$. La dérivée*

$$\left.\frac{\partial D(a + r e^{i\alpha})}{\partial r}\right|_{r=+0} = \lim_{r \to +0} \frac{D(a + r e^{i\alpha}) - D(a)}{r} = D'(a)_\alpha$$

existe pour tout a (α réel fixe) et l'on a

$$-1 \leq D'(a)_\alpha \leq +1.$$

Plus précisément : pour $a = b$

$$D'(b)_\alpha = 1 \qquad \text{pour tout} \qquad \alpha.$$

et pour $a \neq b$

$$D'(a)_\alpha = -\cos[\arg(b - a) - \alpha].$$

Démonstration. — Au cas $a = b$ la proposition équivaut à $\lim \frac{r}{r} = 1$. Pour $a \neq b$ le théorème dit que

$$\lim_{r \to +0} \frac{|b - a - r e^{i\alpha}| - |b - a|}{r} = -\cos[\arg(b - a) - \alpha].$$

Cette proposition se vérifie immédiatement en écrivant explicitement

$$|b - a - r e^{i\alpha}| = \sqrt{|b - a|^2 + r^2 - 2|b - a| r \cos[\arg(b - a) - \alpha]}.$$

b. Cas d'un ensemble fermé (6).

(6) Pour plus de simplicité nous nous bornons aux ensembles fermés, qui seuls présentent un intérêt dans nos applications.

Définition I. — *La distance* $R(a, S)$ *d'un point quelconque* a *à l'ensemble fermé (borné ou non)* $\{s\} = S$ *est définie pour tout point* a *par*

$$R(a;S) = R(a) = \min_{s \in S} |s - a|.$$

$R(a)$ est une fonction continue de a; S étant fermé il existe un $s \in S$ pour lequel $|s - a| = R(a)$.

Définition II. — *Soit* $a \notin S$ *et soit* $R(a) < \infty$ (7). *L'argument du point le plus rapproché (de* S *relatif à* a*) respectif à la direction* α *(*α *réel) est le nombre*

$$\omega(a;S)_\alpha = \omega(a)_\alpha \qquad (0 \leq \omega(a)_\alpha \leq \pi),$$

déterminé par

$$\omega(a)_\alpha = \min_{|s-a|=R(a)} |\arg(s - a) - \alpha|$$

quand a *est fixe et* s *parcourt tous les éléments de* S *pour lesquels* $|s - a| = R(a)$.

Remarque. — Puisque S est fermé, l'un au moins des points $a + R(a)\, e^{i(\alpha \pm \omega(a)_\alpha)}$ appartient à l'ensemble S.

Théorème II. — *Pour tout* $a \notin S$ *pour lequel* $R(a) < \infty$, *et pour tout* α *réel existe la dérivée*

$$\left.\frac{\partial R(a + r\, e^{i\alpha})}{\partial r}\right|_{r=+0} = \lim_{r \to +0} \frac{R(a + r\, e^{i\alpha}) - R(a)}{r} = R'(a)_\alpha$$

et l'on a

$$-1 \leq R'(a)_\alpha \leq +1.$$

Plus précisément,

$$R'(a)_\alpha = -\cos\omega(a)_\alpha.$$

Le Théorème II est un cas particulier du Théorème III, qui sera démontré au paragraphe suivant.

2. *Les fonctions* $R_n(a)$ *et leurs dérivées aux points* $a \notin S$. — Soit $\{s\} = S$ un ensemble fermé de points. Soit S_1 un sous-ensemble de S qui ne contient que des points isolés de S, et soit $S_2 = S - S_1$ l'ensemble complémentaire de S_1.

(7) Cette condition élimine le cas où S ne contient aucun point fini, ainsi que le cas $a = \infty$.

A tout $s \in S$ sera attaché un nombre p_s de la manière suivante :

p_s est un nombre naturel pour $s \in S_1$,
$p_s = +\infty$ pour $s \in S_2$.

Nous appelons p_s l'ordre du point s. Le nombre $P = \Sigma p_s$ (la somme s'étend à tous les points s de S) sera l'ordre de l'ensemble S [8]. $P < \infty$ ou $P = \infty$, selon que S_2 est vide ou ne l'est pas.

Définition III. — *La $n^{ième}$ distance $R_n(a)$, $(1 \leqq n \leqq P)$, $[0 \leqq R_n(a) \leqq \infty]$ est définie par les inégalités suivantes :*

$$\sum_{|s-a| \leqq R_n(a)} p_s \geqq n. \tag{1}$$

$$\sum_{|s-a| < R_n(a)-\varepsilon} p_s < n \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

On voit aisément que cette définition a un sens bien défini. Si $\sum\limits_{|s-a| \leqq \rho} p_s \geqq n$ pour $\rho = \rho_0$, cette relation est valable *a fortiori* pour $\rho = \rho' > \rho_0$. Puisque $n \leqq P$, elle est valable pour $\rho = +\infty$. Soit maintenant ρ'' la plus petite valeur de ρ pour laquelle la relation est valable (l'existence de ρ'' est assurée, parce que S est fermé). Cette valeur ρ'' satisfait aux conditions de la Définition III. De plus, ρ'' est l'unique valeur qui satisfait en même temps à (1) et (2). Aucun nombre supérieur à ρ'' ne satisfait à (2) et aucun nombre inférieur à ρ'' ne satisfait à (1).

Remarque. — Si nous supposons que chaque s est formé de p_s « points simples » confondus et si nous ordonnons ces points simples (autant que possible) selon leur distance de a, la distance $D(a, s)$ au $n^{ième}$ point simple sera égale à $R_n(a)$. $R_\infty(a)$ (s'il y en a) est la distance entre a et S_2.

Étant donné a, déterminons pour tout n $(1 \leqq n \leqq P)$, un nombre n' par

$$n' = n'(a) = \sum_{|s-a| < R_n(a)} p_s.$$

---

[8] Quand S n'est pas dénombrable on dira que $P = \infty$.

Si n est un nombre naturel on a $0 \leq n' < n$ et il s'ensuit

$$\sum_{|s-a|=R_n(a)} p_s \geq n - n' \geq 1. \tag{3}$$

Pour le cas $n = +\infty$ on a, puisque tous les points-limite de S appartiennent à S_2

$$\sum_{|s-a|=R_\infty(a)} p_s = \infty. \tag{3'}$$

On peut convenir que $n - n' = +\infty$ si $n' = \infty$, et la formule (3) sera toujours valable.

Définition IV. — *Le $n^{ième}$ argument* $(1 \leq n \leq P)$, *de* S *relatif à* a, $a \notin S$, $R_n(a) < \infty$ [9] *respectif à la direction* α (α *réel*), *est le nombre* $\omega_n(a)_\alpha = \omega_n(a, S)_\alpha$, $(0 \leq \omega_n(a)_\alpha \leq \pi)$, *avec les propriétés*

$$\sum_{|s-a|=R_n(a);\,|\arg(s-a)-\alpha| \leq \omega_n(a)_\alpha} p_s \geq n - n', \tag{4}$$

$$\sum_{|s-a|=R_n(a);\,|\arg(s-a)-\alpha| < \omega_n(a)_\alpha - \varepsilon} p_s < n - n' \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Remarques. — La légitimité de cette définition peut être démontrée de la même manière que celle de la Définition III.

$\omega_1(a)_\alpha$ s'identifie avec le $\omega(a)_\alpha$ déterminé par la Définition II et $\omega_\infty(a)_\alpha$ s'identifie avec $\omega(a, S_2)_\alpha$.

Les fonctions $R_n(a)$ sont des fonctions continues de a et elles satisfont même à des conditions plus rigoureuses que celle de la continuité. Nous démontrerons le

Théorème III. — *Pour tout* a *et tout* n, $(1 \leq n \leq P)$, *pour lesquels* $0 < R_n(a) < \infty$ *et pour tout* α *réel il existe*

$$\left.\frac{\partial R_n(a + re^{i\alpha})}{\partial r}\right|_{r=+0} = \lim_{r \to +0} \frac{R_n(a + re^{i\alpha}) - R_n(a)}{r} = R'_n(a)_\alpha;$$

et l'on a

$$-1 \leq R'_n(a)_\alpha \leq +1.$$

Plus précisément,

$$R'_n(a)_\alpha = -\cos \omega_n(a)_\alpha.$$

---

[9] Si $R_n(a) = \infty$ on peut définir simplement $\omega_n(a)_\alpha = 0$.

Remarque. — Si $R_n(a) = \infty$, $(1 \leq n \leq P)$, on a aussi

$$R_n(a + r e^{i\alpha}) = \infty,$$

et en définissant alors $R'_n(a)_\alpha = -1$ pour tout α réel, le théorème sera valable aussi pour le cas $R_n(a) = \infty$.

Démonstration. — Nous démontrons notre proposition pour le cas particulier $a = 0$, $\alpha = 0$ (par cette restriction la démonstration ne perd pas sa généralité). Alors notre proposition équivaut à

$$\lim_{r \to +0} \sup \frac{R_n(r) - R_n(0)}{r} \leq -\cos \omega_n(0)_0. \tag{6}$$

$$\lim_{r \to +0} \inf \frac{R_n(r) - R_n(0)}{r} \geq -\cos \omega_n(0)_0. \tag{7}$$

Pour plus de simplicité supposons $n < \infty$. La démonstration pour le cas $n = \infty$ découle du cas $n = 1$ par les remarques sur $R_\infty(a)$ et $\omega_\infty(a)_\alpha$ faites après les Définitions III et IV.

n est fini et, par conséquent, $n' < n$

$$\max_{|s - 0| < R_n(0)} |s - 0| = \max_{|s| < R_n(0)} |s| = R_{n'}(0) \quad (^{10}).$$

De même il est clair que

$$\Delta = R_n(0) - R_{n'}(0) > 0.$$

Il s'ensuit que pour tout $0 < r < \frac{\Delta}{2}$ le cercle $|z - r| < R_n(0) - r$ contient tous les $s \in S$ qui sont compris dans $|z| < R_n(0)$; et le cercle $|z - r| < |R_n(0)\, e^{i\omega_n(0)_0} - r|$ contient le cercle

$$|z - r| < R_n(0) - r$$

et l'arc $|\arg z| \leq \omega_n(0)_0$ de $|z| = R_n(0)$, et par conséquent

$$\sum_{|s - r| \leq |R_n(0) e^{i\omega_n(0)_0} - r|} p_s \geq \sum_{|s| < R_n(0)} p_s + \sum_{|s| = R_n(0),\, |\arg s| \leq \omega_n(0)_0} p_s$$

$$\geq n' + (n - n') = n$$

---

(10) Si $n' = 0$ nous définissons $R_0(0) = 0$.

et (d'après les remarques qui suivent la Définition III)

$$R_n(r) \leqq | R_n(o) e^{i\omega_n(0)_0} - r |.$$

A l'aide du Théorème I on obtient (6).

Pour démontrer (7) remarquons que :

1° Dans le cas $\omega_n(o)_0 = o$, il est clair que pour tout $o < r < R_n(o)$ on a $R_n(r) \geqq R_n(o) - r$, et par conséquent

$$\liminf_{r \to +0} \frac{R_n(r) - R_n(o)}{r} \geqq \lim_{r \to +0} \frac{R_n(o) - r - R_n(o)}{r} = -1 = -\cos \omega_n(o)_0.$$

2° Dans le cas $o < \omega_n(o)_0 \leqq \pi$, on a pour tout $o < \delta \leqq \omega_n(o)_0$,

$$\sum_{|s| = R_n(0),\, |\arg s| \leqq \omega_n(0)_0 - \delta} p_s < n - n'.$$

Sur l'arc

(A_δ) : $\qquad |z| = R_n(o), \qquad |\arg z| \leqq \omega_n(o)_0 - \delta,$

il n'y a pas de points-limite de S. Dès lors on voit qu'il existe un voisinage suffisamment petit de cet arc qui ne contient aucun point de S en dehors de ceux qui sont situés sur l'arc lui-même. C'est-à-dire, il existe $\gamma = \gamma(\delta) > o$ pour lequel

$$\sum_{|s - z| \leqq \gamma,\, z \in A_\delta} p_s < n - n',$$

et, par conséquent, pour tout $o < r < \frac{\gamma}{2}$ on a

$$\sum_{|s - r| \leqq |R_n(o) e^{i[\omega_n(0)_0 - \delta]} - r|} p_s \leqq n' + (n - n') = n,$$

pour tout $\omega_n(o)_0 \geqq \delta > o$.

A l'aide du théorème I on obtient

$$\liminf_{r \to +0} \frac{R_n(r) - R_n(o)}{r} \geqq -\cos[\omega_n(o)_0 - \delta],$$

pour tout $\omega_n(o)_0 \geqq \delta > o$. C. Q. F. D.

Remarque. — La Définition IV et le Théorème III ont un sens et sont valables aussi pour le cas où $a \in S_1$, pour $p_a < n \leqq P$.

3. *La notion de la dérivée inférieure à* $\underline{R}'(b)_\alpha$ *au point* $b \in S$. — Soit $\{s\} = S$ un ensemble fermé et soit $b \neq \infty$ un point isolé de S. Dans ce cas il existe

$$\lim_{r \to +0} \frac{R(b + re^{i\alpha}) - R(b)}{r} = R'(b)_\alpha$$

et pour tout α, on a

$$R'(b)_\alpha = \lim \frac{r - 0}{r} = 1.$$

Car $R(b + re^{i\alpha}) = r$ pour r assez petit, b étant un point isolé de S et $R(b) = 0$.

Définition V. — $\beta = \beta(S)$ *est une direction d'accumulation* (*des points* s) *de* S *en* b, *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\rho > 0$ *le domaine* $\mathcal{D}(\rho, \varepsilon)$

$$0 < |z - b| < \rho, \qquad |\arg(z - b) - \beta| < \varepsilon$$

contient au moins un point $s \in S$.

Théorème IV. — *Pour que* β *soit une direction d'accumulation de* S *en* b, *il faut et il suffit qu'il existe deux suites de nombres positifs* ρ_n *et* ε_n *sujettes aux conditions*

$$(8) \qquad \lim_{n \to \infty} \rho_n = 0,$$

$$(9) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_n}{\rho_n} = 0,$$

telles qu'à l'intérieur de chacun des cercles C_n :

$$|z - (b + \rho_n e^{i\beta})| < \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

se trouve au moins un point $s \in S$.

Démonstration. — La condition est *suffisante*. Soit $0 < \rho$, $1 > \varepsilon > 0$. Dans ce cas, pour n suffisamment grand, nous avons

$$\rho_n < \frac{\rho}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\varepsilon_n}{\rho_n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire pour $n \geq n_0$, C_n se trouvera à l'intérieur de $\mathcal{D}(\rho, \varepsilon)$, et dès lors il existe $s \in S$ à l'intérieur de $\mathcal{D}(\rho, \varepsilon)$.

La condition est *nécessaire*. Soit

$$0 < \rho < 1, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad s_1 \in S$$

à l'intérieur de $\mathcal{D}(\rho, \varepsilon)$. Déterminons $\rho_1 = |s_1|$, $\varepsilon_1 = \varepsilon\rho_1$. Dans ce cas, $s \in C_1$ et C_1 se trouvent en dehors du domaine

$$\mathcal{D}\left(\frac{\rho_1}{2}, \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\rho_1}{2}\right),$$

qui contient un point $s_2 \in S$, qui est situé à l'intérieur de C_2

$$\rho_2 = |s_2|, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\rho_1}{2}\rho_2.$$

En général, le domaine

$$\mathcal{D}\left(\frac{\rho_n}{2}, \frac{\varepsilon_n}{2}\frac{\rho_n}{2}\right)$$

contient un point $s_{n+1} \in S$, qui se trouve dans le cercle C_{n+1}

$$\rho_{n+1} = |s_{n+1}|, \qquad \varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2}\frac{\rho_n}{2}\rho_{n+1},$$

qui est en dehors du domaine

$$\mathcal{D}\left(\frac{\rho_{n+1}}{2}, \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}\frac{\rho_{n+1}}{2}\right),$$

qui contient un point $s_{n+2} \in S$, etc. La suite des cercles C_n est infinie, et il est évident que les suites ρ_n et ε_n satisfont à (8) et (9).

Définition VI. — *L'angle extérieur direct de l'ensemble* S *au point b respectif à la direction α est le nombre*

$$\varphi_\alpha^+(b), \qquad [0 \leqq \varphi_\alpha^+(b) \leqq \pi],$$

défini par

$$\varphi_\alpha^+(b) = \min(\pi, \beta - \alpha),$$

lorsque β parcourt toutes les directions d'accumulation de S *en b dans l'intervalle* $\alpha \leqq \beta \leqq \alpha + \pi$.

L'angle extérieur indirect de S *en b respectif à α est le nombre*

$$\varphi_\alpha^-(b), \qquad [0 \leqq \varphi_\alpha^-(\alpha) \leqq \pi],$$

défini par

$$\varphi_\alpha^-(b) = \min[\pi, -(\beta - \alpha)]$$

lorsque β parcourt toutes les directions d'accumulation de S *en b dans l'intervalle* $\alpha - \pi \leqq \beta \leqq \alpha$.

L'angle extérieur symétrique (*de* S *en* b) *respectif à* α *est* $2\varphi_\alpha(b)$ *où*

$$\varphi_\alpha(b) = \min[\varphi_\alpha^+(b), \varphi_\alpha^-(b)].$$

Remarques. — L'ensemble des directions d'accumulation de S en b est fermé, et par conséquent, si $\varphi_\alpha^+(b) < \pi$,

$$\alpha + \varphi_\alpha^+(b)$$

est certainement une direction d'accumulation de S en b, et dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \alpha + \varphi_\alpha^+(b)$ il n'y a pas d'autre direction d'accumulation de S en b, c'est-à-dire que $\varphi_\alpha^+(b)$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut déterminer $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, pour lequel le domaine

$$0 < |z - b| < \rho, \qquad \alpha \leqq \arg(z - b) \leqq \alpha + \varphi_\alpha^+(b) - \varepsilon$$

ne contient aucun point $s \in$ S. Aucun nombre supérieur à $\varphi_\alpha^+(b)$ ne possède cette propriété. On peut faire des remarques analogues à propos de $\varphi_\alpha^-(b)$ et de $\varphi_\alpha(b)$.

Théorème V. — *Soit* $b \in$ S *et soit* $\varphi_\alpha(b) \geqq \frac{\pi}{2}$, *alors il existe* $\mathrm{R}'(b)_\alpha$ [*la dérivée de* R(z) *au point b dans la direction* α] *et l'on a*

$$\mathrm{R}'(b)_\alpha = 1.$$

Démonstration. — $\mathrm{R}(b) = 0$ et notre proposition se réduit à

$$\liminf_{r \to +0} \frac{\mathrm{R}(b + re^{i\alpha})}{r} \geqq 1,$$
$$\limsup_{r \to +0} \frac{\mathrm{R}(b + re^{i\alpha})}{r} \leqq 1.$$

La première inégalité découle de $\mathrm{R}(b + re^{i\alpha}) \leqq r$. Pour démontrer la seconde il suffit de remarquer que pour tout $\left(\frac{\pi}{2} >\right) \varepsilon > 0$ on peut déterminer $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tel que le domaine

$$0 < |z - b| < \rho, \qquad |\arg(z - b) - \alpha| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

ne contienne aucun point de S, et l'on a pour tout $0 < r < \frac{\rho}{2}$,

$$\mathrm{R}(b + re^{i\alpha}) \geqq r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

c'est-à-dire

$$\liminf_{r \to +0} \frac{R(b + re^{i\alpha})}{r} \geqq \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right).$$

La dernière inégalité est valable pour tout $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$ et par conséquent le premier membre $\geqq \sin\frac{\pi}{2} = 1$. C. Q. F. D.

THÉORÈME VI. — *Soit $b \in S$ et soit $\varphi_\alpha(b) \leqq \frac{\pi}{2}$; alors la dérivée inférieure de $R(z)$ au point b dans la direction α est égale à $\sin\varphi_\alpha(b)$. C'est-à-dire*

$$\underline{R}'(b)_\alpha = \liminf_{r \to +0} \frac{R(b + re^{i\alpha})}{r} = \sin\varphi_\alpha(b).$$

Démonstration. — Dans le cas $\varphi_\alpha(b) = \frac{\pi}{2}$ notre proposition découle du Théorème précédent. Reste à démontrer le cas

$$0 \leqq \varphi_\alpha(b) < \frac{\pi}{2}.$$

Supposons $b = 0$, $\alpha = 0$. Alors notre proposition se réduit à

$$\liminf_{r \to +0} \frac{R(r)}{r} = \sin\varphi_0(0).$$

Supposons que $\varphi_0(0) > 0$ [si $\varphi_0(0) = 0$, la démonstration se simplifie beaucoup]. Pour tout $\varphi_0(0) > \varepsilon > 0$ on peut déterminer $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tel que le domaine

$$0 < |z| < \rho, \qquad |\arg z| < \varphi_0(0) - \varepsilon$$

ne contienne aucun point de S, c'est-à-dire

$$R(r) \geqq r\sin(\varphi_0(0) - \varepsilon)$$

pour tout $\frac{\rho}{2} > r > 0$, et par conséquent

$$\liminf_{r \to +0} \frac{R(r)}{r} \geqq \sin(\varphi_0(0) - \varepsilon),$$

et aussi $\geqq \sin\varphi_0(0)$.

D'autre part, pour tout $\frac{\pi}{2} - \varphi_0(0) > \varepsilon > 0$, le domaine

$$0 < |z| < \rho, \qquad |\arg z| < \varphi_0(0) + \varepsilon$$

($\rho > 0$ quelconque) contient un nombre infini de points $s \in S$, c'est-à-dire qu'il y a toujours $r > 0$ arbitrairement petit pour lequel

$$R(r) < r \sin(\varphi_0(0) + \varepsilon),$$

d'où

$$\lim_{r \to +0} \inf \frac{R(r)}{r} \leqq \sin \varphi_0(0).$$

C. Q. F. D.

A l'aide de l'exemple suivant nous démontrerons que $R'(b)_\alpha$, $(b \in S)$, n'existe pas toujours; en effet, nous verrons qu'il est possible que $\overline{R}'(b)_\alpha$ (la dérivée supérieure de R dans la direction α) soit égal à 1, en même temps que $\underline{R}'(b)_\alpha = 0$.

Soit S composé des points

$$s_n = \frac{1}{n^n} \qquad (n = 1.2, \ldots),$$

et du seul point-limite de cette suite, c'est-à-dire $s = 0$. Du Théorème V découle

$$R'(0)_\alpha = 1 \qquad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Le Théorème VI dit que

$$\underline{R}'(0)_\alpha = \sin|\alpha| \qquad \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$$

et en particulier $\underline{R}'(0)_0 = 0$. Mais

$$\overline{R}'(0)_\alpha = \lim_{r \to +0} \sup \frac{R(re^{i\alpha})}{r} = 1$$

pour tout α. Puisque, pour l'ensemble considéré, $R(re^{i\alpha}) \geqq R(r)$ et pour

$$r_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^n} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right\}$$

on a

$$R(r_n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^n} - \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right\},$$

et par conséquent

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R(r_n)}{r_n} = 1.$$

C. Q. F. D.

4. *La notion de* $\underline{R}'_n(b)_\alpha$ *dans le cas* $b \in S_2$ [11]. — Les cas intéressants sont ceux dans lesquels $b \in S_2$ est un point-limite de S. Alors

$$r \geqq R_n(b + re^{i\alpha}) \geqq R_1(b + re^{i\alpha}) \geqq 0$$

pour tout $1 \leqq n \leqq P$ et tout α, et $R_n(b) = 0$. Le Théorème V reste donc valable pour tous les n en écrivant $R_n(a)$ au lieu de $R(a)$, mais la généralisation du Théorème VI n'est pas aussi simple. Dans ce cas nous avons besoin de la notion de l'ordre *d'une direction d'accumulation*, que nous définissons (dans l'ordre des idées du Théorème IV) de la manière suivante.

Définition VII. — *β est une direction d'accumulation d'ordre k (k naturel ou $+\infty$) de S en b, s'il existe deux suites de nombres positifs ρ_n et ε_n qui satisfont* (8) *et* (9) *et pour lesquels*

$$\sum_{s \in C_n} p_s \geqq k,$$

où C_n désigne le cercle $|z - (b + \rho_n e^{i\beta})| < \varepsilon_n$.

Remarques. — Si β est une direction d'accumulation de points s voisins de b pour lesquels toujours $p_s \geqq k$, elle est certainement une direction d'accumulation d'ordre k de S en b. Mais β peut être une direction d'accumulation d'ordre fini k quelconque sans que les points s de voisinage de b soient tels que $p_s > 1$, par exemple :

Soient données deux suites ρ_n et ε_n qui satisfont (8) et (9) et soit S composé des points

$$b + \rho_n e^{i\beta} + \varepsilon_n e^{\frac{2\pi k}{n} i} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \ k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

et de leur point-limite b et soit $p_s = 1$ pour $s \neq b$, alors β est une direction d'accumulation de S en b de tout ordre fini malgré que S ne contienne que des points d'ordre 1 (à l'exception de b).

---

(11) Dans ce paragraphe nous reprenons les notations $R_n(a)$, p_s, P, etc. du paragraphe 2, et

$$\underline{R}'_n(b)_\alpha = \liminf_{r \to +0} \frac{R_n(b + re^{i\alpha})}{r} \qquad \text{puisque} \quad R_n(b) = 0.$$

Mais si β est une direction d'accumulation d'ordre infini de S en b, il est clair que β est une direction d'accumulation de l'ensemble S_2 en b.

Si β est une direction d'accumulation d'ordre k de S en b elle est certainement de tout ordre k' tel que $1 \leq k' \leq k$.

Théorème VII. — *Soit* $\varphi_\alpha(b) = 0$, *ou bien*

$$0 < \varphi_\alpha(b) < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi_\alpha^+(b) < \varphi_\alpha^-(b).$$

Pour que l'équation

$$\underline{R}'_k(b)_\alpha = \sin\varphi_\alpha(b)$$

soit valable il faut et il suffit que $\alpha + \varphi_\alpha^-(b)$ *soit une direction d'accumulation d'ordre* k *de* S *en* b.

Démonstration. — (Pour plus de simplicité posons $b = 0$, $\alpha = 0$). La condition est *suffisante*. Puisque $R_k(a) \geq R_1(a)$ nous avons, d'après le Théorème VI,

$$\underline{R}'_k(0)_0 \geq \sin\varphi_0(0).$$

Reste à démontrer que

$$\underline{R}'_k(0)_0 \leq \sin\varphi_0(0).$$

Mais on a (ρ_n et ε_n ayant la même signification que dans la Définition VII)

$$R_k\left(\frac{\rho_n}{\cos\varphi_0(0)}\right) \leq \frac{\rho_n}{\cos\varphi_0(0)}\sin\varphi_0(0) + \varepsilon_n,$$

puisque le cercle C_n est compris entièrement à l'intérieur du cercle de rayon

$$\frac{\rho_n}{\cos\varphi_0(0)}\sin\varphi_0(0) + \varepsilon_n$$

autour du point $\frac{\rho_n}{\cos\varphi_0(0)}$. Par conséquent,

$$\frac{R_k\left(\frac{\rho_n}{\cos\varphi_0(0)}\right)}{\frac{\rho_n}{\cos\varphi_0(0)}} \leq \sin\varphi_0(0) + \frac{\varepsilon_n}{\rho_n}\cos\varphi_0(0),$$

et à cause de (9)

$$\underline{R}'_n(0)_0 \leq \sin\varphi_0(0).$$

La condition est *nécessaire*.

1° $\varphi_0(0) = 0$. De $\underline{R}'_k(0)_0 = 0$ on déduit qu'il existe une suite ρ_n qui tend vers zéro et pour laquelle $\frac{R_k(\rho_n)}{\rho_n} \to 0$, et d'ici découle que o est une direction d'accumulation d'ordre k de S en b.

2° $\frac{\pi}{2} > \varphi_0(0) > 0$. Il faut démontrer que pour tout $\Delta > 0$ arbitrairement petit il est possible de déterminer deux nombres positifs $\rho' < \Delta$, $\varepsilon' < \Delta.\rho'$ de façon que

$$\sum_{s \in C'} p_s \geqq k.$$

où C' désigne le cercle

$$|z - \rho' e^{i\varphi_0(0)}| < \varepsilon'.$$

De $\underline{R}'_k(0)_0 = \sin\varphi_0(0)$ découle que pour tout $\frac{\pi}{2} - \varphi_0(0) > \delta > 0$ il existe une suite de nombres positifs $h_n \to 0$ telle que

$$R_k(h_n) \leqq h_n \sin[\varphi_0(0) + \delta].$$

Le cercle C_n

$$|z - h_n| \leqq h_n \sin[\varphi_0(0) + \delta]$$

se trouve (pour $n \geqq n_0$) entièrement dans le domaine

$$|\arg z| \leqq \varphi_0(0) + \delta,$$

et pour

$$n \geqq n_1(\delta) \geqq n_0 \qquad \left(\text{si } 0 < \delta < \frac{\bar{\varphi}_0(0) - \varphi_0(0)}{2}\right),$$

tous les points $s \in C_n$ sont situés dans la partie de ce cercle pour laquelle $-\delta' < \arg z - \varphi_0(0) < \delta$, et si $\delta' > 0$ est suffisamment petit, la partie commune de C_n et du domaine

$$-\delta' < \arg z - \varphi_0(0) < \delta$$

est couverte par le cercle de rayon

$$\varepsilon' \leqq 4\sqrt{h_n \sin(\varphi_0(0) + \delta)\, h_n \delta} \leqq 4 h_n \sqrt{\delta}$$

autour du point

$$\rho' e^{i\varphi_0(0)} = h_n \cos\varphi_0(0)\, e^{i\varphi_0(0)}.$$

Pour n suffisamment grand on a certainement

$$\rho' = h_n \cos\varphi_0(0) < \Delta$$

et

$$\frac{\varepsilon'}{\rho'} \leq \frac{4\sqrt{\delta}}{\cos\varphi_0(0)}.$$

La dernière expression est inférieure à Δ, pourvu que δ soit choisi suffisamment petit. C. Q. F. D.

5. *Les arguments des singularités des fonctions analytiques dans le cercle de méromorphie* ([12]). — Nous appliquons les développements des paragraphes précédents pour déterminer les *arguments* des singularités à l'aide des résultats classiques concernant leurs *modules*.

Nous ferons usage des faits que l'ensemble des points singuliers est fermé et que les pôles sont des singularités isolées. (On peut remarquer que les relations générales entre les modules des singularités d'une fonction analytique et leurs arguments ne peuvent pas être plus précises que les relations générales entre les modules des points d'un ensemble fermé, dont l'ensemble complémentaire est un domaine, et entre leurs arguments. Car on peut faire correspondre à tout domaine une fonction qui est holomorphe dans ce domaine seulement).

Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad |z| < R = R_1, \qquad R > 0,$$

une fonction analytique uniforme dans tout le plan. S désigne l'ensemble de tous les points singuliers de $f(z)$, S_2 l'ensemble de toutes les singularités non polaires. S_1 l'ensemble de tous les pôles. Soit p_s (pour $s \in S_1$) l'ordre du pôle s. (Dans le cas où $f(z)$ n'est pas uniforme, nous ne considérons que sa branche principale) ([13]). On peut citer les résultats classiques de M. Hadamard concernant le $n^{\text{ième}}$ pôle à l'intérieur du cercle de

---

([12]) Le cercle de méromorphie, autour d'un point a, est le cercle maximum autour de ce point à l'*intérieur* duquel ne se trouve aucune singularité non polaire. Si $a = 0$ nous dirons simplement cercle de méromorphie.

([13]) Il suffit pour notre but de considérer les singularités situées dans et sur tous les cercles de méromorphie de $f(z)$ autour de tous les points a, avec $|a| = r$, $r > 0$ arbitrairement petit. Ces cercles ne contiennent pas de singularités non polaires et la branche considérée ne peut pas s'y ramifier.

méromorphie sous la forme

$$(10) \qquad R_n(z) = \frac{l_{n-2}(z)}{l_{n-1}(z)} \qquad (z = re^{i\alpha},\ n = 1, 2, \ldots).$$

où

$$l_{-1}(z) = 1 \qquad \text{pour tout } z.$$

$$l_0(z) = \limsup_{m \to \infty} \left| \sqrt[m]{\frac{f^{(m)}(z)}{m!}} \right|,$$

et en général,

$$l_n(z) = \limsup_{m \to \infty} \left| \sqrt[m]{D_m^{(n)} \left[\frac{f^{(m)}(z)}{m!} \right]} \right| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

et où

$$D_m^{(n)} \left[\frac{f^{(m)}(z)}{m!} \right] = \begin{vmatrix} \frac{f^{(m)}(z)}{m!}, & \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!}, & \ldots, & \frac{f^{(m+n)}(z)}{(m+n)!} \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{f^{(m+n)}(z)}{(m+n)!}, & \frac{f^{(m+n+1)}(z)}{(m+n+1)!}, & \ldots, & \frac{f^{(m+2n)}(z)}{(m+2n)!} \end{vmatrix}.$$

Et

$$(11) \qquad R_\infty(z) = \lim_{n \to +\infty} R_n(z).$$

Du Théorème III découle

THÉORÈME VIII. — *Pour tout α réel on a, pour tout $1 \leqq n \leqq P$.*

$$R'_n(0)_\alpha = \lim_{r \to +0} \frac{R_n(re^{i\alpha}) - R_n(0)}{r} = -\cos \omega_n(0)_\alpha.$$

où $\omega_n(0)_\alpha$ désigne le plus grand nombre pour lequel le nombre des pôles, dans le cercle ouvert $|z| < R_n(0)$ et sur l'arc

$$|\arg z - \alpha| \leqq \omega_n(0)_\alpha - \varepsilon$$

de $|z| = R_n(0)$, est (pour tout $\varepsilon > 0$) inférieur à n (nous comptons tout pôle avec sa multiplicité et toute singularité non polaire avec la multiplicité $+\infty$).

Remarque. — La supposition $n \leqq P$ est nécessaire, mais dans le cas où $P < \infty$, la fonction se réduit à une fonction rationnelle.

Le Théorème VIII contient les cas particuliers suivants :

THÉORÈME VIII *a*. — *Pour tout α réel*

$$R'(0)_\alpha = \lim_{r \to +0} \frac{R(re^{i\alpha}) - R(0)}{r} = -\cos \omega_1(0)_\alpha,$$

et au moins un des points $R_1 e^{i[\alpha \pm \omega_1(0)\alpha]}$ *est un point singulier de* $f(z)$; *de plus, parmi tous les points singuliers de* $f(z)$ *sur* $|z| = R$, *il est le plus rapproché du point* $z = R e^{i\alpha}$.

Théorème VIII *b*. — *Soit* $P = \infty$, *alors pour tout* α *réel*

$$R'_\infty(0)_\alpha = \lim_{r \succ +0} \frac{R_\infty(r e^{i\alpha}) - R_\infty(0)}{r},$$

et au moins un des points $R_\infty e^{i[\alpha \pm \omega_\infty(0)\alpha]}$ *est un point singulier non polaire de* $f(z)$, *et parmi tous les points singuliers non polaires de* $f(z)$, *situés sur le cercle de méromorphie, il est le plus rapproché du point* $z = R_\infty(0) e^{i\alpha}$.

Ordonnons tous les pôles de $f(z)$ *intérieurs* au cercle de méromorphie d'après leurs modules croissants, et tous les pôles de même module d'après leurs cosinus croissants. Dans le cas où $\rho e^{+i\varphi}$ et $\rho e^{-i\varphi}$, $(0 < \varphi < \pi)$ sont des pôles tous les deux, nous situons $\rho e^{+i\varphi}$ avant $\rho e^{-i\varphi}$.

Dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de pôles à l'intérieur de $|z| < R_\infty$, nous continuons d'ordonner de cette manière tous les pôles situés sur l'arc méromorphe ouvert symétrique maximum des deux côtés du *point* $z = R_\infty$ (un arc méromorphe est un arc sur lequel ne se trouve pas de singularité non polaire).

Si, de plus, on n'a qu'un nombre fini de pôles sur cet arc, nous ordonnons après eux la singularité (si elle existe) située à l'extrémité de l'arg positif de l'arc. Si ce point est un pôle (ou même régulier), nous ordonnons après lui la singularité de l'autre extrémité, qui est alors certainement non polaire.

En numérotant les éléments de l'ensemble que nous venons d'ordonner (chaque pôle avec sa multiplicité) on pourra appeler le $n^{\text{ième}}$ élément le $n^{\text{ième}}$ « *pôle* ». Cela posé on peut déduire du théorème VIII le

Théorème IX. — *Le* $n^{\text{ième}}$ « *pôle* » *de* $f(z)$ *se trouve à l'un des points*

$$R_n e^{\pm i\omega_n(0)_0}.$$

R_n *est donné comme fonction de coefficients du développement de Taylor de* $f(z)$ *par la formule de M. Hadamard* (10) *et* $\omega_n(0)_0$ *par*

$$\lim_{r \to +0} \frac{\dfrac{l_{n-2}(r)}{l_{n-1}(r)} - R_n(0)}{r} = -\cos\omega_n(0)_0.$$

Afin de déterminer avec lequel des deux points coïncide le $n^{\text{ième}}$ « pôle » il faut considérer l'expression $\omega_{n'+k}(0)_\alpha$ ([14]) pour $\alpha = \omega_n(0)_0$. S'il existe un plus petit nombre naturel k_0 pour lequel $\omega_{n'+k} \neq 0$ ou $R_{n'+k} > R_n$, on sait que parmi tous les « pôles » situés aux deux points $k_0 - 1$ pôles coïncident avec $R_n e^{+i\omega_n(0)_0}$.

Dans le cas où un tel nombre k_0 n'existe pas $R_n = R_\infty$, et $R_n e^{i\omega_n(0)_0}$ est une singularité non polaire de $f(z)$, et il est le $n^{\text{ième}}$ « pôle ».

Remarque. — On peut déterminer d'une manière analogue la position exacte de la singularité non polaire mentionnée dans le théorème VIII*b*.

Pour simplifier l'identification de l'un des deux points $\rho e^{\pm i\varphi}$, $\rho < R_\infty$, avec un pôle on peut utiliser les résultats de M. Hadamard ([1]) concernant la somme des arguments de tous les pôles situés sur $|z| = \rho$.

On peut remarquer que si Ω est un point-limite de la suite $\omega_n(0)_0$, un des points $R_\infty e^{\pm i\Omega}$ est une singularité non polaire de $f(z)$. Si cette suite contient un nombre infini de nombres différents, on peut même dire qu'un de ces points est une singularité essentielle de $f(z)$.

Complément. — Le théorème susmentionné de M. Mandelbrojt ([2]) donne le même résultat que le théorème VIII*a* et, de plus, il à l'avantage de n'avoir besoin que d'évaluer la dérivée (à droite) de

$$\limsup_{m \to \infty} \sqrt[m]{a_m + C_m^1 a_{m-1} h + \ldots + C_m^m a_0 h^m},$$

où l'expression sous la racine est une fonction de h qui dépend des paramètres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et le théorème VIII*a* exige une

---

([14]) n' désigne le nombre de pôles à *l'intérieur* du cercle $|z| = R_n$ (voir paragraphe 2).

évaluation de la dérivée (à droite) de

$$l_0^{-1}(z) = \left\{ \limsup_{m \to \infty} \left| \sqrt[m]{\frac{f^{(m)}(z)}{m!}} \right| \right\}^{-1},$$

où l'expression sous la racine dépend de presque tous les a_n.

Mais, à l'aide du critère de M. Hadamard ([1]), il est aisé de voir qu'on peut remplacer l'expression susdite par

$$F_g^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{g} C_{m+k}^k a_{m+k} z^k,$$

si $g = g(m)$ satisfait à la seule condition

$$\liminf_{m \to \infty} \frac{g}{m} = \lambda > 0, \tag{12}$$

et $F_g^{(m)}(z)$ ne dépend que de $g + 1$ coefficients.

6. *Sur les points singuliers au voisinage d'une singularité située sur le cercle de convergence.* — Nous retournons aux sujets traités dans le paragraphe 4. Donnons à S et R la même signification que dans le paragraphe 5. Soit γ un nombre réel et $b = R e^{i\gamma}$. En nous basant sur la définition VI nous définissons

Définition VIII. — *L'angle singulier direct de $f(z)$ au point $b = R e^{i\gamma}$ est le nombre $\psi^+(b)$ donné par*

$$\psi^+(b) = \pi - \varphi_{\pi+\gamma}^-(b).$$

L'angle singulier indirect de $f(z)$ en $b = R e^{i\gamma}$ est

$$\psi^-(b) = \pi - \varphi_{\pi+\gamma}^+(b).$$

Remarque. — Si $b \in S$ est un point isolé de S, on a

$$\psi^+(b) = \psi^-(b) = 0.$$

Puisque

$$\pi \geqq \varphi_{\pi+\gamma}^+ \geqq \frac{\pi}{2}, \qquad \pi \geqq \varphi_{\pi+\gamma}^- \geqq \frac{\pi}{2},$$

on a

$$0 \leqq \psi^+(b) \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq \psi^-(b) \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Si $\psi^+(b) > 0$, la direction $\gamma + \psi^+(b)$ est une direction d'accumulation de S en b, et dans l'intervalle $\gamma + \psi^+(b) \geqq x \geqq \gamma + \frac{\pi}{2}$ il n'y a pas d'autre direction d'accumulation de S en b. On peut faire des remarques analogues par rapport à $\psi^-(b)$.

Du Théorème V découle immédiatement

Théorème X. — *L'angle singulier direct $\psi^+(\mathrm{R}\,e^{i\gamma})$ est égal à $x_0 - \frac{\pi}{2}$, où x_0 désigne le nombre minimum dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$, pour lequel la relation*

$$\lim_{r \to +0} \frac{\mathrm{R}(\mathrm{R}\,e^{i\gamma} + r\,e^{i(\gamma+x)})}{r} = 1$$

est vérifiée.

Une conséquence immédiate du théorème VI est le

Théorème XI. — *Si $\psi^+(\mathrm{R}\,e^{i\gamma}) > 0$, on a, pour toutes les valeurs $x > \frac{\pi}{2}$ qui sont suffisamment rapprochées de $\frac{\pi}{2}$,*

$$\liminf_{r \to +0} \frac{\mathrm{R}(\mathrm{R}\,e^{i\gamma} + r\,e^{i(\gamma+x)})}{r} = \sin[x - \psi^+(\mathrm{R}\,e^{i\gamma})].$$

Par cette formule $\psi^+(b)$ est fixé $\left[\text{car on a toujours } 0 \leqq \psi^+(b) \leqq \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour des valeurs r suffisamment petites on a

$$\mathrm{R}(\mathrm{R}\,e^{i\gamma} + r\,e^{i(\gamma+x)}) = \left\{ \limsup_{m \to \infty} \left| \sqrt[m]{\frac{f^{(m)}(\mathrm{R}\,e^{i\gamma} + r\,e^{i(\gamma+x)})}{m\,!}} \right| \right\}^{-1},$$

où le second membre dépend seulement des coefficients du développement de Taylor de $f(z)$, et par conséquent $\psi^+(b)$ est une fonction explicite (assez compliquée) des coefficients de $f(z)$.

Si β est une direction d'accumulation d'ordre k de S en b, nous appelons β une direction d'accumulation d'ordre k en b de « pôles » de $f(z)$.

Du théorème VII découle

Théorème XII. — *Soit $\psi^+(\mathrm{R}\,e^{i\gamma}) > 0$. Pour que la direction $\gamma + \psi^+(\mathrm{R}\,e^{i\gamma})$ soit une direction d'accumulation d'ordre k des « pôles » de* S *en b il faut et il suffit que pour tout $\frac{\pi}{2} < x \leqq \pi$*

on ait

$$\underline{R}'_k(R\,e^{i\gamma})_{\gamma+x} = \underline{R}'_1(R\,e^{i\gamma})_{\gamma+x} \quad [15].$$

(Ici aussi $\underline{R}'_h(R\,e^{i\gamma})_{\gamma+x}$ est exprimé à l'aide des coefficients de $f(z)$ seulement.)

Puisque tous les points limite des singularités de $f(z)$ sont des singularités non polaires de $f(z)$, il résulte qu'en remplaçant dans les Théorèmes X et XI

$$R(R\,e^{i\gamma} + r\,e^{i(\gamma+x)}) = R_1(R\,e^{i\gamma} + r\,e^{i(\gamma+x)}),$$

par

$$R_\infty(R\,e^{i\gamma} + r\,e^{i(\gamma+x)}),$$

on obtient des informations sur les singularités *non* polaires de $f(z)$ au voisinage du point $R\,e^{i\gamma}$, qui sont analogues aux informations données par les Théorèmes X et XI sur les singularités (polaires ou non polaires) de $f(z)$ au voisinage de ce point.

Dans le cas où à l'intérieur du cercle de méromorphie ne se trouve qu'un nombre fini de pôles, on peut étendre nos résultats sur les points singuliers dans le voisinage du cercle de méromorphie.

---

(15) Si cette condition est vérifiée pour *une* valeur x de l'intervalle

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \psi^+(b),$$

elle est aussi satisfaite par toutes les valeurs $\frac{\pi}{2} < x \leqq \pi$.