BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur les courbes unicursales de troisième classe

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 54-57
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__54_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les courbes unicursales de troisième classe; par M. Laguerre.

(Séance du 21 novembre 1877.)

1. Soient A, B et C trois points d'une conique K et un point P pris arbitrairement dans son plan. Par les quatre points A, B, C et P faisons passer une conique arbitraire H et soit Q le quatrième point où cette conique rencontre K.

Cela posé, étant pris un point M arbitrairement sur K, menons la droite MP et joignons au point Q le point I, où MP coupe une seconde fois la conique H. La droite IQ coupe K en un second point α; joignons-le au point M. La droite $M\alpha$ enveloppe, lorsque le point M se déplace sur la conique, une courbe qui est évidemment de la troisième classe. Si, en effet, on mène la droite MQ rencontrant la conique H au point G, puis la droite GP recontrant la conique K aux points β et γ, on voit que Mβ et Mγ sont encore des tangentes à la courbe cherchée. Il est clair, d'ailleurs, que l'on a ainsi toutes les tangentes passant par le point M ; donc l'enveloppe est de troisième classe. En faisant coïncider successivement M avec chacun des points A, B, C, on reconnaît facilement que l'enveloppe touche en ces points la conique K, les troisièmes tangentes que de chacun d'eux on peut mener à la courbe se rencontrant au point P.

L'enveloppe fait donc partie du faisceau formé par les courbes de troisième classe touchant aux trois points A, B, C la conique K et tangentes aux droites AP, BP et CP ; et il semble d'abord qu'en faisant varier la conique H on pourra engendrer de la façon que j'ai indiquée toutes les courbes du faisceau.

Pour se convaincre qu'il n'en est pas ainsi, il suffit de remarquer que l'une des tangentes issues du point M (celle que j'ai désignée par Mα) se détermine individuellement et que d'ailleurs les points de la conique K se déterminent individuellement ; l'enveloppe est donc la *courbe unicursale du faisceau.*

Les propriétés les plus simples des coniques montrent en effet que, le point M étant fixe, le point α est parfaitement déterminé, quelle que soit la conique que l'on fasse passer par les points A, B, C et P.

Par suite, dans la génération des tangentes à l'enveloppe, on pourra remplacer la conique H par un système de deux droites. Le point Q étant, par exemple, le point de rencontre AP avec K, on engendrera les diverses tangentes à la courbe de troisième classe en faisant décrire au point I la droite BC.

2. Quelques conséquences intéressantes résultent des considérations qui précèdent. En effet, des trois tangentes que du point M on peut mener à l'enveloppe, deux (Mα et Mβ) rencontrent la conique K en deux points tels, que la corde $\alpha\beta$ qui les joint passe par le point fixe P.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Si une courbe unicursale de troisième classe est tritangente à une conique K, *les trois tangentes que l'on peut mener à cette* *courbe par un point quelconque de la conique rencontrent de nouveau cette conique en trois points. Un des côtés du triangle formé par ces trois points passe par un point fixe.*

3. Supposons que la conique K soit un cercle ayant P pour centre ; on voit alors que l'angle $\beta M \alpha$ est droit.

Donc :

Si un cercle est tritangent à une courbe de troisième classe unicursale et si les normales, menées au cercle en ces points, sont tangentes à la courbe, deux des tangentes que de chacun des points du cercle on peut mener à la courbe font entre elles un angle droit.

La réciproque est également vraie :

Étant donnée une courbe de troisième classe, si un cercle jouit de la propriété que deux tangentes, menées à la courbe par chacun de ses points, soient à angle droit, la courbe est unicursale ; le cercle touche la courbe en trois points et les normales menées au cercle en ces points sont tangentes à la courbe.

Pour le démontrer, je remarquerai d'abord que, étant pris un point quelconque M sur le cercle, comme deux des tangentes, menées à la courbe par ce point, sont liées par une relation particulière, la troisième tangente se détermine individuellement ; donc la courbe est unicursale.

En second lieu, $M\alpha$ désignant la tangente qui passe par le point M et qui se détermine individuellement, il est clair que cette tangente, lorsque le point M se déplace, vient successivement coïncider avec chacune des tangentes à la courbe ; autrement la courbe se décomposerait en une conique et un point.

De là résulte que, une tangente quelconque à la courbe de troisième classe rencontrant le cercle en deux points, des deux perpendiculaires menées en ces points à la tangente l'une au moins est tangente à la courbe.

Menons maintenant une tangente commune au cercle et à la courbe ; cette tangente rencontrant le cercle en deux points confondus, d'après ce que je viens de dire, la normale au cercle sera tangente à la courbe. On ne peut, d'ailleurs, par le centre du cercle, mener que trois tangentes à cette courbe ; donc les points de contact des tangentes communes se réduisent à trois.

Le cercle est donc tritangent à la courbe, et les normales au cercle, en ces points, lui sont également tangentes.

4. Les propositions précédentes se vérifient immédiatement sur les courbes unicursales de troisième classe les plus connues, telles que la *cardioïde* et l'*hypocycloïde à trois points de rebroussement*. On peut se proposer un problème analogue pour les courbes de quatrième classe :

Trouver toutes les courbes de quatrième classe par lesquelles le lieu des sommets des angles droits circonscrits se décompose en un cercle et une courbe résiduelle.

J'examinerai ce problème dans une prochaine communication.