BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE HUMBERT

Formules nouvelles pour le calcul symbolique

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 119-131
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__119_0>

FORMULES NOUVELLES POUR LE CALCUL SYMBOLIQUE;

PAR M. PIERRE HUMBERT.

Nous voulons, dans ces pages, indiquer quelques formules, sans doute nouvelles, relatives au Calcul symbolique d'Heaviside, ainsi qu'un certain nombre de représentations symboliques pour diverses fonctions qui n'ont jamais été étudiées jusqu'ici à ce point de vue. Nous utiliserons toutes les notations de l'opuscule et des différentes notes que nous avons déjà publiées sur ce sujet (¹).

I.

Indiquons d'abord diverses correspondances fonctionnelles.

Si l'on part de l'intégrale de Carson,

$$f(p) = p\int_0^\infty e^{-px} h(x)\,dx,$$

qui définit la représentation symbolique

$$f(p) \doteqdot h(x),$$

nous pouvons écrire

$$f(\log p) = \log p \int_0^\infty p^{-s} h(s)\,ds,$$

en remplaçant par s la variable d'intégration x. Mais, si l'on considère s comme un paramètre quelconque, on a la repré-

(¹) PIERRE HUMBERT, *Le calcul symbolique*, Hermann, 1934 (fasc. 147 des *Actualités scientifiques*). *Les fonctions hypergéométriques et le calcul symbolique* (*Annales Soc. Sc. Bruxelles*, t. 53, 1933). *Le calcul symbolique à deux variables* (*ibid*, t. 56, 1936). *Some new operational representations* (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 2ᵉ série, vol. IV, 1936). *Sur les intégrales de Fresnel* (*Mathematica*, Cluj, vol. X, 1934). *Sur le logarithme intégral* (*Congrès Soc. Savantes*, Montpellier, 1935).

sentation

$$p^{-s} \doteqdot \frac{x^s}{\Gamma(s+1)},$$

d'où la formule suivante (¹) :

$$[A] \qquad \frac{f(\log p)}{\log p} \doteqdot \int_0^\infty \frac{x^s h(s)\, ds}{\Gamma(s+1)}.$$

II.

De la formule de Carson nous tirons encore

$$f\left(\frac{1}{p^2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s}{p^2}}}{p^2} h(s)\, ds.$$

Cherchons l'image symbolique de $e^{-sp^{-2}}p^{-2}$. Cette fonction s'écrit

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-s)^n}{p^{2n+2}},$$

et son image est par conséquent

$$\sum_0^\infty \frac{(-s)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

expression qui s'écrit aisément sous forme hypergéométrique

$$\frac{x^2}{2}\, {}_0F_2\left(\frac{3}{2}, 2 ; \frac{-sx^2}{4}\right).$$

On a donc

$$f\left(\frac{1}{p^2}\right) \doteqdot \frac{x^2}{2} \int_0^\infty {}_0F_2\left(\frac{3}{2}, 2 ; \frac{-sx^2}{4}\right) h(s)\, ds,$$

ce qu'on peut écrire autrement, en introduisant les fonctions de Bessel du troisième ordre (²), définies par

$$J_{m,n}(x) = \frac{x^{m+n}}{3^{m+n}\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}\, {}_0F_2\left(m+1, n+1 ; -\frac{x^3}{27}\right).$$

(¹) Nous désignons par des majuscules entre crochets les formules ou correspondances que nous croyons nouvelles.

(²) P. Humbert, *Les fonctions de Bessel du troisième ordre* (*Atti Pontif. Accad. Scienze*, anno 83, 1930). *Nouvelles remarques sur les fonctions, etc.* (*Ibid.*, anno 87, 1934). *Sur une équation aux dérivées partielles* (*Ibid.*, anno 88, 1935).

On arrive alors à la formule

$$[\mathrm{B}] \qquad f\left(\frac{1}{p^2}\right) \doteqdot \frac{x\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty J_{1,\frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\frac{sx^2}{4}}\right)\frac{h(s)}{\sqrt{s}}\,ds.$$

III.

Supposons que $h(x)$ soit l'original de $f(p)$, mais que $h(p)$ soit l'image d'une fonction $g(x)$. On aura donc

$$f(p) \doteqdot h(x), \qquad h(p) \doteqdot g(x).$$

Quelle relation lie $f(p)$ à $g(x)$? Il suffit d'écrire

$$f(p) = p\int_0^\infty e^{-ps}\,ds\left[s\int_0^\infty e^{-sx}g(x)\,dx\right],$$

donc

$$f(p) = p\int_0^\infty g(x)\,dx\int_0^\infty e^{-(p+x)s}s\,ds,$$

d'où, en calculant la seconde intégrale, la relation cherchée

$$[\mathrm{C}] \qquad f(p) = p\int_0^\infty \frac{g(x)\,dx}{(p+x)^2}.$$

Bien entendu, nous supposons toutes conditions remplies pour la convergence des intégrales.

Voici quelques groupes de fonctions f et g de ce genre :

$$\log p \doteqdot -\gamma - \log x, \qquad -\gamma - \log p \doteqdot \log x,$$

$$\sin p\,\mathrm{ci}(p) - \cos p\,\mathrm{si}(p) \doteqdot \operatorname{arc\,tang} x, \qquad \operatorname{arc\,tang} p \doteqdot -\mathrm{si}(x),$$

$$\cos p\,\mathrm{ci}(p) + \sin p\,\mathrm{si}(p) \doteqdot -\log\sqrt{1+x^2}, \qquad -\log\sqrt{1+p^2} \doteqdot \mathrm{ci}(x).$$

On peut, en particulier, obtenir une propriété des cosinus et sinus intégraux. La formule bien connue d'Ennéper, qui s'écrit

$$\mathrm{ci}^2(p) + \mathrm{si}^2(p) = \int_0^\infty \frac{e^{-px}\log(1+x^2)}{x}\,dx,$$

montre que l'on a

$$|\mathrm{ci}^2(p) + \mathrm{si}^2(p)| \doteqdot \frac{\log(1+x^2)}{x}.$$

Cherchons l'original de

$$\frac{\log(1+p^2)}{p}.$$

Comme on a

$$\log\sqrt{1+p^2} \doteq -\operatorname{ci}(x),$$

on en tire

$$\frac{\log(1+p^2)}{p} \doteq -2\int_0^x \operatorname{ci}(x)\,dx = -2[x\operatorname{ci}(x) - \sin x],$$

d'où, en appliquant la relation [G],

$$\operatorname{ci}^2(p) + \operatorname{si}^2(p) = -2\int_0^\infty \frac{x\operatorname{ci}(x) - \sin x}{(p+x)^2}\,dx.$$

Intégrons par parties : on a

$$-\int_0^\infty \frac{x\operatorname{ci}(x) - \sin x}{(p+x)^2} = \left[\frac{x\operatorname{ci}(x) - \sin x}{p+x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\operatorname{ci}(x) + \cos x - \cos x}{p+x}\,dx.$$

La partie intégrée est nulle aux deux limites [car ci$(\infty) = 0$], et l'on trouve la formule suivante, plus simple que celle d'Enneper,

$$\text{[D]} \qquad \operatorname{ci}^2(p) + \operatorname{si}^2(p) = -2\int_0^\infty \frac{\operatorname{ci}(x)}{p+x}\,dx.$$

IV.

La formule connue du calcul symbolique

$$\sqrt{p}\,e^{-k\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,e^{-\frac{k^2}{4x}}$$

peut être généralisée de diverses façons. Il est d'abord possible de remplacer l'exponentielle du premier membre par une fonction hypergéométrique quelconque de la variable $-k\sqrt{p}$, et d'en chercher l'original en passant par son développement en série. On trouve immédiatement, sans qu'il soit besoin de détailler les calculs, la correspondance

$$\text{[E]} \quad \sqrt{p}\;{}_rF_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \ldots, \gamma_s; -k\sqrt{p})$$
$$\doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\;{}_{2r}F_{2s}\left(\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1+1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_r}{2}, \frac{\alpha_r+1}{2}; \frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}, \ldots; -\frac{2^{r-s-2}k^2}{x}\right).$$

On peut aussi indiquer des formules d'un type un peu différent. Posons, comme d'habitude, en introduisant les sinus du troisième ordre,

$$f_1(x) = \frac{e^{-x} + e^{-jx} + e^{-j^2 x}}{3},$$

$$f_2(x) = \frac{e^{-x} + je^{-jx} + j^2 e^{-j^2 x}}{3} \qquad (j^3 = 1);$$

$$f_3(x) = \frac{e^{-x} + j^2 e^{-jx} + je^{-j^2 x}}{3}.$$

Comme on a le développement

$$f_1(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{3n}}{(3n)!},$$

nous écrirons

$$\sqrt[3]{p}\, f_1(-\sqrt[3]{p}) = \sum \frac{p^{n+\frac{1}{3}}}{(3n)!}.$$

L'exposant de p étant toujours fractionnaire, on peut passer aux originaux et écrire

$$\sqrt[3]{p}\, f_1(-\sqrt[3]{p}) \doteqdot \sum_0^\infty \frac{x^{-n-\frac{1}{3}}}{(3n)!\, \Gamma\left(\frac{2}{3} - n\right)},$$

ce qui s'écrira, en développant la fonction eulérienne et en faisant des simplifications qui s'imposent,

$$\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sum \frac{(-1)^n x^{-n}}{3^{3n}\left(\frac{2}{3}, n\right) n!},$$

ou encore

$$\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\, {}_0F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{27x}\right).$$

En remplaçant la fonction hypergéométrique biconfluente par une fonction de Bessel, on trouve la correspondance

$$[\mathrm{F}] \qquad \sqrt[3]{p}\, f_1(-\sqrt[3]{p}) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{3x}}\, J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3x}}\right).$$

Si maintenant l'on part de la fonction f_3, dont le développement est

$$f_3(x) = -\sum \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{(3n+1)!},$$

on écrira encore

$$\sqrt[3]{p}\,f_1(-\sqrt[3]{p}) = \sum \frac{p^{n+\frac{2}{3}}}{(3n+1)!},$$

et, comme l'exposant de p est toujours fractionnaire, on pourra appliquer la même méthode, qui conduira, tous calculs faits, à la formule

$$[6] \qquad \sqrt[3]{p}\,f_1(-\sqrt[3]{p}) \doteq \frac{1}{\sqrt{3x}}\,J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3x}}\right).$$

Par ailleurs, comme on a

$$f_2(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{3n+2}}{(3n+2)!},$$

le développement

$$\sqrt[3]{p}\,f_2(-\sqrt[3]{p}) = \sum \frac{p^{n+1}}{(3n+2)!}$$

conduit à des exposants entiers et positifs pour p, de sorte que la méthode ci-dessus ne peut pas s'appliquer, et que cette fonction ne peut pas se représenter symboliquement d'une façon simple.

On rapprochera ces résultats du fait que $\sqrt{p}\,\mathrm{ch}(-\sqrt{p})$ est l'image d'une fonction facile à calculer, alors que $\sqrt{p}\,\mathrm{sh}(-\sqrt{p})$ ne conduit à rien de simple.

V.

Étudions à présent la fonction $\varpi(p)$ de Binet, définie par

$$\varpi(p) = \log\Gamma(p) - \left(p - \frac{1}{2}\right)\log p + p - \log\sqrt{2\pi},$$

qui s'introduit, comme l'on sait, dans la formule de Stirling. Binet lui-même a donné l'intégrale

$$\varpi(p) = \int_0^\infty \frac{e^{-tp}}{t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)dt,$$

d'où l'on tire aussitôt

$$p\,\varpi(p) \doteq \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(e^x - 1)}.$$

On aura un résultat très simple en appliquant les règles de dérivation, par exemple

$$-p\frac{d}{dx}\frac{f(p)}{p} \doteq x\,h(x).$$

qui donnera

$$-p\,\varpi'(p) \doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x - 1}.$$

On en tire

$$-\varpi'\left(\frac{p}{2}\right) \doteq \int_0^{2x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{e^u - 1}\right) du.$$

Le second membre est égal à

$$x - \log 2x + \log o + \int_0^{2x} \frac{du}{e^u - 1},$$

et si l'on pose dans cette intégrale $e^u - 1 = z$, on la trouve égale à

$$\int_0^{e^{2x}-1} \frac{dz}{z(z+1)} = \log \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} - \log o.$$

Mais

$$\log \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} = \log \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} - \log e^x + \log 2,$$

et, par conséquent, on aura

[H] $$-\varpi'\left(\frac{p}{2}\right) \doteq \log \operatorname{sh} x - \log x,$$

formule très simple, d'où l'on pourra tirer divers résultats. Ainsi on retrouvera facilement le développement asymptotique de $\varpi(p)$. On connaît en effet le développement

$$\log \operatorname{sh} x = \log x - \sum_1^{\infty} \frac{2^{2n-1}(-1)^n B_n x^{2n}}{n(2n)!},$$

où B_n est le nombre de Bernoulli. On en tirera aussitôt

$$\varpi'\left(\frac{p}{2}\right) \doteq \sum \frac{2^{2n-1}(-1)^n B_n x^{2n}}{n(2n)!}$$

et

$$\varpi'(p) \doteq \sum \frac{(-1)^n B_n x^{2n}}{2n(2n)!}.$$

Donc

$$\varpi'(p) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{2n p^{2n}}$$

et

$$\varpi(p) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B_n}{(2n-1)2n p^{2n-1}} + \text{const.}$$

La constante est nulle, car $\varpi(\infty) = 0$, et l'on obtient le développement cherché

$$\varpi(p) = \frac{B_1}{1.2.p} - \frac{B_2}{3.4.p^2} + \frac{B_3}{5.6.p^3} - \ldots.$$

On peut aussi retrouver une formule due à Tchebychev, de la façon suivante. Nous partons du produit infini connu

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

d'où

$$-\varpi'\left(\frac{p}{2}\right) \doteq \sum_1^\infty \log\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Mais nous avons rappelé tout à l'heure la correspondance

$$-\cos p \operatorname{ci}(p) - \sin p \operatorname{si}(p) \doteq \log\sqrt{1+x^2}$$

Pour simplifier, posons avec Touchard

$$-\cos p \operatorname{ci}(p) - \sin p \operatorname{si}(p) = B(p).$$

On aura

$$2B(n\pi p) \doteq \log\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

d'où la formule cherchée

$$-\frac{1}{2}\varpi'\left(\frac{p}{2\pi}\right) = \sum_1^\infty B(np).$$

On démontrerait de la même façon une autre formule de Tchebychev,

$$\pi\varpi\left(\frac{p}{2\pi}\right) = \sum \frac{A(np)}{n},$$

où l'on pose

$$A(p) = \sin p \operatorname{ci}(p) - \cos p \operatorname{si}(p).$$

VI.

Comme nous l'avons dit, les fonctions (en rapport étroit avec le sinus et le cosinus intégraux) que nous avons appelées $A(p)$ et $B(p)$, sont respectivement les images des fonctions $\operatorname{arc tang} x$ et $\log\sqrt{1+x^2}$. On peut aussi chercher les images des fonctions

$A(x)$ et $B(x)$, de la façon suivante. Si l'on part de la relation qui lie le sinus et le cosinus intégraux au logarithme intégral,

$$\mathrm{E}i(ix) = \mathrm{ci}(x) + i\,\mathrm{si}(x),$$

et qu'on en multiplie les deux membres par

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

on trouve

$$-e^{-ix}\mathrm{E}i(ix) = \mathrm{B}(x) + i\mathrm{A}(x).$$

Or, on connaît la correspondance

$$\mathrm{E}i(ix) \doteqdot -\log\left(\frac{p}{i} - 1\right),$$

d'où, par application d'une des règles fondamentales du calcul symbolique

$$-e^{-ix}\mathrm{E}i(ix) \doteqdot \frac{p}{p+i}\log\left(\frac{p+i}{i} - 1\right),$$

d'où, en séparant le réel et l'imaginaire,

$$[\mathrm{I}] \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}(x) \doteqdot -\dfrac{p}{p^2+1}\left(\log p + p\dfrac{\pi}{2}\right), \\ \mathrm{B}(x) \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}\left(p\log p - \dfrac{\pi}{2}\right). \end{array}\right.$$

On pourra en tirer diverses conséquences : par exemple, si l'on applique à $\mathrm{B}(x)$ la transformation

$$pf\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty \mathrm{J}_0(2\sqrt{sx})\,h(s)\,ds,$$

on trouve

$$pf\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{p}{p^2+1}\left(\log p + p\frac{\pi}{2}\right) \doteqdot \mathrm{A}(x),$$

d'où la formule (qui paraît nouvelle)

$$[\mathrm{J}] \qquad \mathrm{A}(x) = \int_0^\infty \mathrm{J}_0(2\sqrt{sx})\,\mathrm{B}(s)\,ds.$$

VII.

Les fonctions A et B se rattachant étroitement au cosinus et au sinus intégraux, et la fonction de Binet aux fonctions eulériennes, il n'est pas étonnant, en vertu de résultats établis depuis longtemps, de les voir se prêter à merveille aux représentations symboliques. Il est plus intéressant de chercher à rattacher au calcul d'Heaviside des fonctions jusqu'ici restées en dehors de ce calcul.

Telle est, au moins sous la forme que nous allons introduire ici, la fonction ζ de Riemann. D'après une formule de Jensen, citée par Whittaker et Watson dans *Modern Analysis*, on peut écrire

$$\zeta(p) = \frac{2^{p-1}}{p-1} - 2^p \int_0^\infty (1+y^2)^{-\frac{p}{2}} \sin(\text{arc tang}\, y) \frac{dy}{e^{\pi y}+1}.$$

Faisons le changement de variable

$$1 + y^2 = e^{2x}.$$

Il vient, tous calculs effectués,

$$\zeta(p) = \frac{2^{p-1}}{p-1} - 2^p \int_0^\infty e^{-px} \frac{e^x\, dx}{e^{\pi y}+1},$$

ce qu'on peut écrire

$$-2^{-p}\zeta(p) + \frac{1}{2(p-1)} = \int_0^\infty e^{-px} \frac{e^x\, dx}{e^{\pi y}+1},$$

donc

$$-2^{-p}p\,\zeta(p) + \frac{p}{2(p-1)} \doteqdot \frac{e^x}{e^{\pi y}+1}.$$

Or,

$$\frac{p}{2(p-1)} \doteqdot \frac{e^x}{2},$$

d'où

$$2^{-p}p\,\zeta(p) \doteqdot \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{e^{\pi y}+1}$$
$$\doteqdot \frac{e^x}{2}\,\frac{e^{\pi y}-1}{e^{\pi y}+1} = \frac{e^x}{2}\,\text{th}\,\frac{\pi y}{2},$$

ce qui conduit à la formule de correspondance

[K] $$2^{-p}p\,\zeta(p) \doteqdot \frac{e^x}{2}\,\text{th}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{e^{2x}-1}\right].$$

Cette formule est très probablement nouvelle; elle diffère, à plusieurs points de vue, de celle qu'a établie récemment Tricomi, qui d'ailleurs ne se place pas dans le champ du calcul symbolique.

VIII.

Certainement nouveaux sont les résultats que nous allons exposer maintenant, et qui rattachent au Calcul symbolique les divers types d'intégrales elliptiques.

Nous partirons encore de la fonction de Bessel du troisième ordre,

$$J_{m,n}(x) = \frac{x^{m+n}}{3^{m+n}\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}\, {}_0F_2\left(m+1,\ n+1\,;\ -\frac{x^3}{27}\right),$$

et nous cherchons l'image de

$$x^h J_{m,n}(x),$$

où h est une constante, au moyen du développement en série de cette fonction. On trouve, par un calcul facile, la formule

$$p^{-m-n-h}\,{}_3F_2\left(\frac{m+n+h+1}{3},\ \frac{m+n+h+2}{3},\ \frac{m+n+h+3}{3};\ m+1,\ n+1;\ -\frac{1}{p^3}\right)$$
$$\doteq \frac{3^{m+n}\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+h+1)}\, x^h J_{m,n}(x).$$

Bien entendu, seront particulièrement intéressants les cas où la fonction hypergéométrique complète du troisième ordre ${}_3F_2$ dégénérera en une fonction d'ordre inférieur. Les plus curieux de ces cas sont au nombre de trois.

1° $\qquad m = \frac{1}{6}, \qquad n = -\frac{1}{6}, \qquad h = \frac{1}{2}.$

Le premier membre est alors

$$p^{-\frac{1}{2}}\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{6};\ \frac{7}{6},\ \frac{5}{6};\ -\frac{1}{p^3}\right),$$

c'est-à-dire

$$p^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{p^3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{p}{\sqrt{p^3+1}}$$

2° $\qquad m = -\frac{1}{6}, \qquad n = -\frac{5}{6}, \qquad h = \frac{1}{2}.$

On trouve

$$p^{\frac{1}{2}}\,{}_3F_2\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{6};\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{p^3}\right) = \frac{p^2}{\sqrt{p^3+1}}.$$

3° $$m = -\frac{5}{6}, \qquad n = -\frac{7}{6}, \qquad h = \frac{1}{2},$$

qui donne

$$p^{\frac{3}{2}}\,{}_3F_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}; -\frac{1}{p^3}\right) = \frac{p^3}{\sqrt{p^3+1}}.$$

En effectuant, dans les trois cas susdits, les calculs pour les seconds membres, on est amené aux trois correspondances

$$[\mathrm{L}] \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{p^3+1}} &\doteqdot \frac{2\sqrt{\pi x}}{3} J_{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}}(x), \\ \frac{p^2}{\sqrt{p^3+1}} &\doteqdot \frac{2\sqrt{\pi x}}{3} J_{-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}}(x), \\ \frac{p^3}{\sqrt{p^3+1}} &\doteqdot \frac{2\sqrt{\pi x}}{3} J_{-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}}(x). \end{aligned} \right.$$

Partant alors de la première de ces formules, changeant p en $-p$, puis multipliant p par le facteur $\sqrt[3]{4}$, nous obtenons, toutes réductions faites,

$$\frac{p}{\sqrt{4p^3-1}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi x}}{3} J_{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}}\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right),$$

d'où nous tirons

$$p\int_p^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3-1}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{x}} J_{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}}\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right).$$

Posons alors

$$p = \mathfrak{p}(u; 0, 1),$$

cas elliptique que les auteurs allemands appellent équiharmonique, nous aurons la représentation symbolique suivante :

$$[\mathrm{M}] \qquad up = p \arg\mathfrak{p}\,p \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{x}} J_{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}}\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right).$$

Considérons à présent la seconde des formules [L] : un calcul identique nous conduira à l'intégrale

$$-p\int_p^{\infty} \frac{p\,dp}{\sqrt{4p^3-1}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt[3]{4}\sqrt{x}} J_{-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}}\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right),$$

d'où la représentation, où nous conservons les mêmes notations que ci-dessus,

[N] $$p\zeta u \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt[3]{4}\sqrt{x}} \mathrm{J}_{\frac{1}{6},-\frac{5}{6}}\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right).$$

De la même façon, la dernière des formules (L) nous donnera

[O] $$pp'u \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[3]{4}\sqrt{x}} \mathrm{J}_{-\frac{5}{6},-\frac{7}{6}}\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right).$$

Enfin, pour exprimer l'intégrale elliptique de troisième espèce, écrivons

$$\frac{p}{p-a} \doteqdot e^{ax},$$

$$\frac{p}{\sqrt{4p^3-1}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi x}}{3} \mathrm{J}_{\frac{1}{6},-\frac{1}{6}}\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right),$$

d'où, par la formule du produit,

$$\frac{p}{(p-a)\sqrt{4p^3-1}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{3} e^{ax}\int_0^x e^{-ay} \mathrm{J}_{\frac{1}{6},-\frac{1}{6}}\left(-\frac{y}{\sqrt[3]{4}}\right)\sqrt{y}\,dy,$$

et il suffira de diviser le second membre par x pour obtenir la représentation de l'intégrale du premier membre.

IX.

Pour terminer, donnons une formule que nous n'avons vu citée nulle part, malgré sa simplicité. C'est la suivante :

[P] $$(\gamma + \log p)^2 + \frac{\pi^2}{6} \doteqdot \log^2 x.$$

Fort intéressante, puisqu'elle donne l'image du carré de $\log x$, elle se démontre sans difficulté à partir des résultats obtenus par Appell sur la Constante d'Euler, au tome 45 des *Acta mathematica*.