

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. RAUCH

Sur les angles de divergence des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 71-77

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__71_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__71_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ANGLES DE DIVERGENCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. A. RAUCH.

Nous allons étudier les fonctions entières $f(z)$ d'ordre $\rho > 1/2$ admettant des angles de divergence d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$ bordés d'angles de convergence pour

$$J(f, \varphi, k) = \int_1^{\infty} \log |f(re^{i\varphi})| \frac{dr}{r^{k+1}} \quad (k = \rho).$$

Nous supposons que $\arg z = 0$ est bissectrice d'un angle de divergence.

On a les résultats suivants :

$$(A) \quad \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{\int_1^{\infty} \log |f(re^{i\varphi})| \frac{dr}{r^{k+1}}}{\int_1^{\infty} \log |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} = \cos \rho \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2\rho} \right) \quad (1).$$

$$(B) \quad \frac{\rho}{2\pi} \leq \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{\sum_{\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r_h^k(e^{i\theta})}}{\int_1^{\infty} \log |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} \leq \frac{\rho}{2\pi \cos \rho \varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

$$(C) \quad \frac{\rho}{2\pi} = \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{\sum_{\varepsilon} \frac{1}{r_h^k(x)}}{\int_1^{\infty} \log |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} \leq \frac{\rho}{2\pi \cos \rho \varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

sauf pour un ensemble possible de valeurs x de mesure linéaire nulle.

\sum_{ε} est étendue aux modules des racines $r_n(a)$ de $f(z) = a$.

(1) A. RAUCH, *Extension d'un théorème de MM. Lindelof et Phragmén* (Comptes rendus, t. 201, 1935, p. 189-191).

situées dans chacun des angles d'ouverture 2ε et de bissectrices $\pm \frac{\pi}{2\rho}$.

Nous allons utiliser les égalités suivantes de M. Valiron :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & J(f, \varphi_0, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\pi}{k} \sum_{\varphi_1 - \varphi_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta_n(e^{i\theta})}{r_n^k(e^{i\theta})} d\theta \\
 & = J(f, \varphi_1, k) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2) + J(f, \varphi_2, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) + O(1) \quad (1), \\
 (2) \quad & \left[J(f, \varphi_0, k) - J\left(\frac{1}{f-x}, \varphi_0, k\right) \right] \sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\pi}{k} \sum_{\varphi_1 - \varphi_2} \frac{\delta_n(x)}{r_n^k(x)} \\
 & = C(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, x) + \left[J(f, \varphi_1, k) - J\left(\frac{1}{f-x}, \varphi_1, k\right) \right] \sin k(\varphi_0 - \varphi_2) \\
 & \quad + \left[J(f, \varphi_2, k) + J\left(\frac{1}{f-x}, \varphi_2, k\right) \right] \sin k(\varphi_1 - \varphi_0),
 \end{aligned}$$

quel que soit x , ainsi que le théorème de Valiron-Nevalinna ⁽²⁾ :

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - x} \right| d\theta \leq O[\log T(r)] \quad [r > r(x)],$$

sauf pour un ensemble possible de valeurs x de mesure linéaire nulle.

$\sum_{\varphi_1 - \varphi_2}$ est étendue aux modules $r_n(x)$ et aux arguments $\omega_n(x)$ des racines de $f(z) = x$ du secteur

$$\varphi_2 \leq \omega_n \leq \varphi_1 \quad (r_n \geq 1)$$

et

$$\begin{aligned}
 \delta_n &= \sin k(\varphi_1 - \omega_n) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2), & \text{si} \quad \varphi_0 \leq \omega_n \leq \varphi_1, \\
 \delta_n &= \sin k(\omega_n - \varphi_2) \sin k(\varphi_1 - \varphi_0), & \text{si} \quad \varphi_2 \leq \omega_n \leq \varphi_0;
 \end{aligned}$$

d'ailleurs,

$$\varphi_2 < \varphi_0 < \varphi_1, \quad \varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{k} < \frac{\pi}{\rho}.$$

(¹) VALIRON, *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini* (Journal de Villat, t. 10, 1931, p. 457-480).

(²) VALIRON, *Sur la distribution des valeurs de fonctions méromorphes* (Acta math., t. 47, 1925); R. NEVANLINNA, *Le théorème Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, p. 82 (Gauthier-Villars, Paris).

Démonstration de (A). — Prenons dans (1) $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, où ε est assez petit pour que φ_1 soit $< \frac{\pi}{\rho}$ et encore dans l'angle de convergence pour $J(f, \varphi, k)$; supprimons $\sum > 0$ et divisons par $J(f, 0, k)$ en remarquant que

$$\lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, \varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, \varphi_0, k)}{J(f, 0, k)} \leq \cos \rho \varphi_0 + \sin \rho \varphi_0 \tan \rho \varepsilon \quad \left(0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2\rho} \right).$$

Donc

$$(4) \quad \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, \varphi_0, k)}{J(f, 0, k)} \leq \cos \rho \varphi_0 \quad \left(0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2\rho} \right).$$

Soit maintenant

$$0 = \varphi_0 < \varphi_1 = -\varphi_2 < \frac{\pi}{2\rho}.$$

On a, d'après (1),

$$\sin 2\rho \varphi_1 \leq \left[\lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, -\varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} + \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, \varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} \right] [\sin \rho \varphi_1,$$

ou, en divisant par $\sin \rho \varphi_1$ et en tenant compte de (4),

$$2 \cos \rho \varphi_1 \leq \left[\lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, -\varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} + \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, \varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} \right] \leq 2 \cos \rho \varphi_1,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, -\varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} + \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, \varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} = 2 \cos \rho \varphi_1,$$

ce qui exige, d'après (4), l'égalité (A).

Démonstration de (B). — Prenons dans (1) :

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2\rho}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon,$$

on a :

$$\delta_n \leq \sin^2 k \varepsilon$$

donc,

$$J(f, \varphi_0, k) \sin 2k\varepsilon + \frac{1}{k} \sum_{\varphi_1 - \varphi_2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 k\varepsilon}{r_n^k(e^{i\theta})} d\theta$$

$$\geq [J(f, \varphi_1, k) + J(f, \varphi_2, k)] \sin k\varepsilon + O(1),$$

divisons par $J(f, O, k)$ et passons à la limite en remarquant que, d'après (A),

$$\lim \frac{J\left(f, \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, k\right)}{J(f, O, k)} = \lim \frac{J\left(f, \frac{\pi}{2\rho}, k\right)}{J(f, O, k)} = 0,$$

$$\lim \frac{J\left(f, \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon, k\right)}{J(f, O, k)} = \sin \rho \varepsilon.$$

On en déduit la première partie de (B).

Soit maintenant

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + 2\varepsilon, \quad \varphi_2 = 0.$$

On a

$$\sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}} = \sum_{\widehat{\varphi_0 - \varphi_2}} + \sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_0}} \geq \sum_{\widehat{\varphi_0 - \varphi_2}} \geq \sum_{\widehat{2\varepsilon}}.$$

$$\sum_{\widehat{2\varepsilon}} \geq \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{\cos k\varepsilon \sin k\varepsilon}{r_h^k(e^{i\theta})}.$$

Donc,

$$J(f, \varphi_0, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{k} \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\varepsilon \sin k\varepsilon}{r_h^k(e^{i\theta})} d\theta$$

$$\leq J(f, \varphi_1, k) \sin k\varphi_0 + J(f, \varphi_2, k) \sin k\varepsilon + O(1).$$

Divisons par $J(f, O, k)$ et passons à la limite, on en déduit la deuxième partie de (B).

Démonstration de (C). — Excluons dans la suite l'ensemble exceptionnel de M. Valiron. (3) donne alors

$$(5) \quad \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - x} \right| \frac{dr d\theta}{r^{\lambda+1}} = O(1) = A,$$

quel que soit $\lambda > 0$; il en est *a fortiori* ainsi quand l'intégrale est étendue à un petit secteur d'ouverture ε . Dans ce secteur il y a donc au moins un rayon φ tel que

$$\int_1^\infty \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - x} \right| \frac{dr}{r^{\lambda+1}} < \infty.$$

En effet, si :

$$\int_1^{\infty} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - x} \right| \frac{dr}{r^{\lambda+1}} = \infty,$$

quel que soit θ de l'angle ε , on peut trouver R tel que

$$\int_1^R \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - x} \right| \frac{dr}{r^{\lambda+1}} > \frac{\lambda}{\varepsilon}, \quad R \geq R\left(\theta, \frac{\lambda}{\varepsilon}\right).$$

Cette inégalité a lieu encore dans un petit intervalle $(\theta - \eta, \theta + \eta)$, car pour R fixe le premier membre est continu en θ . D'après le théorème de Borel-Lebesgue on peut couvrir l'angle ε avec un nombre fini de ces intervalles. Si alors

$$R_0 = \max. R\left(\theta, \frac{\lambda}{\varepsilon}\right)$$

qui est fini, on a

$$\begin{aligned} \Lambda &< \int_{\varepsilon} d\theta \int_1^{R_0} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - x} \right| \frac{dr}{r^{\lambda+1}} = \int_1^{R_0} \int_{\varepsilon} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - x} \right| \frac{dr d\theta}{r^{\lambda+1}} \\ &< \int_1^{\infty} \int_{\varepsilon} \log^+ \left| \frac{1}{f - x} \right| \frac{dr d\theta}{r^{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

ce qui est impossible (1).

Prenons pour φ_1 et φ_2 de tels rayons dans les secteurs

$$\frac{\pi}{2\rho} - 2\varepsilon \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon < \frac{\pi}{2\rho} = \varphi_0 < \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2\rho} + 2\varepsilon,$$

(2) s'écrira

$$\begin{aligned} &J(f, \varphi_0, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\pi}{k} \sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}} \frac{\delta_n(x)}{r_n^k(x)} \\ &= O(1) + J\left(\frac{1}{f-x}, \varphi_0, k\right) \sin k(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + J(f, \varphi_1, k) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2) + J(f, \varphi_2, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \\ &\geq J(f, \varphi_2, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_0). \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$\delta_n \leq \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2);$$

(1) Je dois à M. Valiron la démonstration de cette propriété.

donc

$$\lim_{k \rightarrow \rho} \frac{2\pi}{k} \frac{\sum_{\widehat{4\varepsilon}} \frac{1}{r_n^k(x)}}{J(f, O, k)} \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2) \geq \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{J(f, \varphi_2, k)}{J(f, O, k)} \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) = \cos \rho \varphi_2 \sin \rho(\varphi_1 - \varphi_0).$$

On en déduit la première partie de (C).

Prenons dans (2)

$$\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2\rho} + 2\varepsilon, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + 3\varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}} &\geq \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sum_{\widehat{\varphi_0 - \varphi_2}} \frac{\sin k \omega_n}{r_n^k(x)} \\ &\geq \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{\sin k \omega_n}{r_n^k(x)} \\ &\geq \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sin k\left(\frac{\pi}{2\rho} - 2\varepsilon\right) \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{1}{r_n^k(x)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{k} \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sin k\left(\frac{\pi}{2\rho} - 2\varepsilon\right) \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{1}{r_n^k(x)} &\leq J(f, \varphi_1, k) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2) \\ &\quad + J(f, \varphi_2, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \\ &\quad + O(1). \end{aligned}$$

Divisons par $J(f, O, k)$ et passons à la limite, on en déduit la deuxième partie de (C).

Remarques. — Les démonstrations sont les mêmes pour la direction $-\frac{\pi}{2\rho}$. Les premières parties de (B) et (C) sont vraies pour *tout* $\varepsilon > 0$, les deuxièmes pour *tout* ε assez petit.

Si nous procédons d'une façon analogue avec

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon = \varphi_1,$$

on trouve

Σ étant étendue aux racines de $f(z) = x$ d'un secteur $|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}$,
 $|z| \geq 1$, on a

$$(D) \quad \lim_{k \rightarrow \rho} \frac{\sum \frac{1}{r_k^k(x)}}{\int_1^\infty \log |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} = 0.$$

sauf pour un ensemble possible de valeurs x de mesure linéaire nulle ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Voir des théorèmes analogues de M. L. CARTWRIGHT, *Proc. London Math. Soc.*, 2^e série, t. 38, 1935, p. 504, et de M. G. VALIRON, *Compositio Mathematica*, vol. 1, fasc. 2, p. 195.
