A. MANNHEIM

Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre et nouvelle application de ce théorème

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 5-7
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__5_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème; par M. A. Mannheim.

Dans une Note publiée récemment ([1]) sur le déplacement infiniment petit d'un dièdre, j'ai donné le théorème suivant :

Lorsqu'une face d'un dièdre mobile a pour caractéristique une droite perpendiculaire à l'arête de ce dièdre, l'autre face a aussi pour caractéristique une perpendiculaire à cette arête.

Je me propose de donner une démonstration directe de ce théorème et d'en faire une nouvelle application.

Du centre o d'une sphère, menons des plans (A), (B) parallèlement aux faces du dièdre. Soit om le rayon de la sphère qui est parallèle à l'arête du dièdre. Les plans (A) et (B) coupent la sphère suivant deux grands cercles qui se rencontrent en m et qui comprennent entre eux un angle égal à l'angle ω du dièdre.

Après un déplacement infiniment petit du dièdre, effectuons les mêmes constructions. Nous aurons des plans (A'), (B') se coupant suivant le rayon om' et rencontrant la sphère suivant des grands

([1]) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 11 juin 1877.

cercles, comprenant aussi entre eux l'angle ω, puisque le dièdre mobile est de grandeur invariable.

On peut amener sur la sphère l'angle formé par les deux premiers grands cercles, dont le sommet est m, à coïncider avec l'angle dont le sommet est m', au moyen d'une rotation infiniment petite autour d'un centre instantané c. Par suite, on peut amener les plans (A), (B) à coïncider avec les plans (A′), (B′), au moyen d'une rotation infiniment petite autour du rayon oc. Les caractéristiques de (A) et de (B) sont les projections de oc. Ces caractéristiques sont respectivement parallèles aux caractéristiques des faces du dièdre mobile; mais l'une de ces faces a pour caractéristique une droite perpendiculaire à l'arête du dièdre; le plan (A), parallèle à cette face, a alors pour caractéristique une perpendiculaire au rayon om. Le rayon oc, dont cette caractéristique est la projection, est alors dans un plan perpendiculaire à om, et la projection de oc sur le plan (B) est alors aussi perpendiculaire à ce rayon om. La face du dièdre correspondant à (B) a par suite pour caractéristique une perpendiculaire à l'arête du dièdre, et le théorème est démontré.

Appliquons ce théorème à la démonstration de cette propriété bien connue :

Lorsque les deux rayons de courbure d'une courbe gauche (a) *sont proportionnels, cette courbe est une hélice tracée sur une surface cylindrique.*

Considérons la courbe (a) comme tracée sur sa surface rectifiante; elle est une ligne géodésique de cette surface, et, puisque le rapport de ses rayons de courbure est constant, elle coupe sous le même angle toutes les génératrices de cette surface.

Appelons a un point de la courbe, G la droite rectifiante qui passe en ce point, et (G) la surface rectifiante de (a).

Menons par a le plan (A) normal à (a), et par G le plan (B) normal à (G). Ces plans comprennent entre eux un angle dièdre qui est le même quelle que soit la position de a sur (a), et dont l'arête est la normale en a à (G).

Déplaçons infiniment peu ce dièdre, de façon que a vienne en a' sur (a), que G coïncide avec la génératrice de (G) qui passe en a', et que ses faces restent normales l'une à (a), l'autre à (G).

Puisque (a) est une ligne géodésique de (G), son plan osculateur est normal à cette surface, et par suite l'axe de courbure de (a), c'est-à-dire la caractéristique de (A), est perpendiculaire à l'arête du dièdre. Il résulte du théorème précédent que la caractéristique de (B) est aussi perpendiculaire à cette arête. Cette caractéristique est alors parallèle à G; et, comme elle doit rencontrer cette droite au point où celle-ci touche son enveloppe, on voit que ce point est à l'infini. Les droites rectifiantes de (a) sont donc parallèles entre elles, et, d'après ce que nous avons dit précédemment, le théorème est démontré.