BULLETIN DE LA S. M. F.

N. OBRECHKOFF

Sur la sommation des séries trigonométriques de Fourier par les moyennes arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 167-184

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__167_0>

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DE FOURIER PAR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. NIKOLA OBRECHKOFF.

(Suite.)

6. Considérons maintenant la série conjuguée de (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx). \tag{39}$$

Si, par $\bar{s}_n(x)$, nous désignons la somme des n premiers termes de la série (39), on obtient

$$\bar{s}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d(t)(\sin t + \sin 2t + \ldots + \sin nt)\,dt,$$
$$d(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

$\varphi(t)$ étant prolongée périodiquement en dehors de l'intervalle $(0, 2\pi)$. Alors si $\bar{s}_n^k(x)$ désigne les moyennes arithmétiques de Cesàro d'ordre k, on obtient

$$s_n^k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d(t)\,\omega(t)\,dt, \qquad \omega(t) = \frac{1}{A_n^{\kappa}}\sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^{\kappa}\sin \mu t. \tag{40}$$

La formule (9) nous donne pour p entier

$$\omega^{(p)}(t) = u^{(p)}(t) + v^{(p)}(t), \tag{41}$$

où $v(t) = \frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}$, et pour $u(t)$ est en force l'inégalité (6), c'est-à-dire

$$|u^{(p)}(t)| < M\frac{n^{p-k}}{t^{k+1}} + N\frac{1}{nt^{k+1}} \qquad (0 < t \leqq \pi), \tag{42}$$

où M et N ne dépendent pas de n et t. Puisque la fonction $\frac{d^r}{dt^p}\cot\frac{2}{t}$

a la forme $\frac{\mu(t)}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{p+1}}$, où $\mu(t)$ est borné, de (42) il résulte que

$$(43) \qquad |\omega^{(p)}(t)| < \mathrm{K}\frac{1}{t^{p+1}} + \mathrm{M}\frac{n^{p-k}}{t^{k+1}} + \mathrm{N}\frac{1}{nt^{k+1}} \qquad (0 < t \leqq \pi),$$

où K est une constante, ne dépendant pas de n et t. De cette inégalité, on déduit pour k entier l'inégalité suivante :

$$(44) \qquad |\omega^{(k)}(t)| < \mathrm{R}\frac{1}{t^{k+1}},$$

où R est une constante finie. Nous démontrerons que (44) reste valable aussi pour k non entier, $k = m + \delta$, m entier, $0 < \delta < 1$. Comme chez la démonstration de (17) il est évident qu'on a

$$|u^{(k)}(t)| < \mathrm{R}_1\frac{1}{t^{k+1}}.$$

Il reste à examiner $v^{(k)}(t)$. On peut se borner au cas $\frac{1}{n} \leqq t \leqq a$, puisque pour $0 < t \leqq \frac{1}{n}$ à cause de $\omega^{(k)}(t) = \mathrm{O}(n^{k+1})$, on a

$$|\omega^{(k)}(t)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right).$$

Mais pour $\frac{1}{n} \leqq t \leqq a \leqq \pi$, nous avons

$$|v^{(k)}(t)| < \mathrm{M}_2\int_t^a \frac{(\tau - t)^{-\delta}}{\tau^{m+2}}\,d\tau$$

$$= \mathrm{M}_2\int_1^{\frac{a}{t}} t^{-m-1-\delta}\frac{(u-1)^{-\delta}}{u^{m+2}}\,du$$

$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{k+1}}\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{m+2}(u-1)^{\delta}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right),$$

donc (44) est démontrée. Nous avons le théorème suivant :

VII. *Posons pour* $k > 0$

$$d_k(t) = kt^{-k}\int_0^t d(\tau)(t-\tau)^{k-1}\,d\tau,$$

$$d_0(t) = d(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

alors si pour un $k \geqq 0$ *on a*

$$\lim_{t \to 0} d_k(t) = \mathrm{D},$$

on a

$$(45)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\bar{s}_n^k(x)}{\log n}=\frac{D}{\pi}.$$

Ce théorème nous donne la valeur de Saut généralisé de la fonction $f(x)$ pour un point s'il existe. Par une simple transformation on ramène le cas général au cas $x=0$ en considérant la fonction $f(x+t)$ au lieu de $f(x)$. Pour la fonction

$$(46)\qquad \varphi(x)=\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots$$

on a $\varphi(+0)-\varphi(-0)=\pi$, donc $D=\pi$. La série conjuguée de la série (46) est

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\dots,$$

pour laquelle on a

$$\bar{s}_n^k(0)=\frac{1}{A_n^k}\sum_{\mu=1}^{n}A_{n-\mu}^k\frac{1}{\mu}.$$

On peut facilement démontrer que $\frac{\bar{s}_n^k(0)}{\log n}\to 1$ lorsque $n\to\infty$. En effet d'abord nous avons

$$(47)\qquad \bar{s}_n^k=\bar{s}_n^k(0)<\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\mu}<\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\log(n+1).$$

Soit α un nombre arbitraire, $0<\alpha<1$, on a

$$(48)\qquad \bar{s}_n^k>\frac{1}{n\alpha A_n^k}\sum_{\mu=[n\alpha]}^{n}A_{n-\mu}^k=\frac{1}{n\alpha A_n^k}(A_n^{k+1}-A_{n-[n\alpha]-1}^{k+1}).$$

Puisque $A_n^k\sim\frac{n^{k+1}}{\Gamma(k+1)}$, de (48) il résulte facilement

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\bar{s}_n^k}{\log n}\geqq\frac{1-(1-\alpha)^{\alpha+1}}{(1+k)\alpha},$$

d'où, en posant $\alpha\to 0$, on obtient

$$(49)\qquad \varliminf_{n\to\infty}\frac{\bar{s}_n^k}{\log n}\geqq 1.$$

Les formules (47) et (49) nous montrent que $\lim \frac{\bar{s}_n^k}{\log n} = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons maintenant la fonction

$$f^*(x) = f(x) - \frac{D}{\pi} \varphi(x).$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$d_k^*(t) = d_k(t) - D,$$

donc $d_k^*(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Si $\bar{b}_n^k$ désigne les moyennes d'ordre k de la série conjuguée de la série de Fourier de la fonction $f^*(x)$ à cause de la relation

$$\bar{s}_n^k(x) = \bar{b}_n^k + \frac{1}{A_n^k} \frac{D}{\pi} \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k \frac{1}{\mu},$$

il suffit de démontrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\bar{b}_n^k}{\log n} = 0$ pour démontrer que

$$\frac{s_n^k}{\log n} \to \frac{D}{\pi}.$$

Donc on peut supposer que $D = 0$ et $x = 0$. Posons alors

$$D_1(y) = \int_0^y [f(x+\tau) - f(x-\tau)]\, d\tau, \qquad D_2(y) = \int_0^y D_1(\tau)\, d\tau,$$
$$D_3(y) = \int_0^y D_2(\tau)\, d\tau, \ \ldots,$$

la formule (40) nous donne

$$(50) \qquad \bar{s}_n^k(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^\pi [f(x+t) - f(x-t)]\, \omega(t)\, dt$$
$$+ \frac{1}{\pi} A \pm \frac{1}{\pi} \int_0^a D_k(t)\, \omega^{(k)}(t)\, dt,$$
$$A = D_1(a)\, \omega(a) - D_2(a)\, \omega'(a) + \ldots \pm D_k(a)\, \omega^{(k-1)}(a),$$

si k est entier. Si k n'est pas un nombre entier, $k = m + \delta$, m entier, $0 < \delta < 1$, nous avons la même formule avec seulement la différence que dans A figure comme dernier le membre

$$D_{m+1}(a)\, \omega^{(m)}(a).$$

La formule asymptotique (43) nous montre que $A \to 0$ lorsque

$n \to \infty$, comme le premier membre du (50), il reste à étudier l'intégrale

$$i = \int_0^a \mathrm{D}_k(t)\,\omega^{(k)}(t)\,dt = c\int_0^a t^k d_k(t)\,\omega^{(k)}(t)\,dt,$$

où c est une constante. Soit a choisi de façon que pour $0 < t \leqq a$, on ait $|d_k(t)| < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitrairement petit. Nous avons

$$i = c\int_0^{\frac{1}{n}} + c\int_{\frac{1}{n}}^a = ci_1 + ci_2, \qquad |i_1| < \mathrm{M}n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}} t^k dt = \mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(\log n),$$

$$|i_2| < \varepsilon\mathrm{M}\int_{\frac{1}{n}}^a \frac{dt}{t} < \varepsilon\mathrm{M}\log n,$$

d'où il résulte que $i = \mathrm{o}(\log n)$, avec lequel le théorème est démontré.

VIII. *Si pour un* $k \geqq 0$, *on a*

$$\int_0^t |d_k(t) - \mathrm{D}|\,dt = \mathrm{o}(t),$$

où D *est une constante, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{s}_n^k(x)}{\log n} = \frac{\mathrm{D}}{\pi}.$$

Posons $f_1(t) = f(t) - \frac{\mathrm{D}}{\pi}\varphi(t-x)$, $\varphi(x)$ étant la fonction (46). Désignons par $d_k^{(1)}(t)$, $d_k^{(0)}(t)$ les fonctions $d_k(t)$ pour $f_1(t)$ et $\varphi(t-x)$, on a

$$d_k^{(1)}(t) = d_k(t) - \frac{\mathrm{D}}{\pi}d_k^{(0)}(t) = d_k(t) - \mathrm{D} - \frac{\mathrm{D}}{\pi}[d_k^{(0)}(t) - \pi],$$

$$\int_0^t d_k^{(1)}(t)\,|\,dt \leqq \int_0^t |d_k(t) - \mathrm{D}|\,dt + \frac{\mathrm{D}}{\pi}\int_0^t |d_k^{(0)}(t) - \pi|\,dt = \mathrm{o}(t).$$

Donc dans la démonstration, on peut supposer que $\mathrm{D} = 0$. Comme ci-dessus, il reste à étudier l'intégrale i. Soient $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et le nombre a tellement choisi que l'on a

$$\Phi(t) = \int_0^t |d_k(\tau)|\,d\tau < \varepsilon t$$

pour $0 \leqq t \leqq a$. Nous avons

$$i = c\int_0^{\frac{1}{n}} + c\int_{\frac{1}{n}}^{a} = c i_1 + c i_2,$$

$$|i_1| < M\int_0^{\frac{1}{n}} t^k n^{k+1} |d_k(t)| dt < M n \int_0^{\frac{1}{n}} |d_k(t)| dt = M \frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 0,$$

$$|i_2| < M\int_{\frac{1}{n}}^{a} \Phi'(t)\frac{dt}{t} = M\Phi(a)a^{-1} - M\frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$+ M\int_{\frac{1}{n}}^{a} \Phi(t)\frac{dt}{t^2} = O(1) + j,$$

$$j < M\varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{dt}{t} < M\varepsilon \log n,$$

d'où il résulte que $i = o(\log n)$, et le théorème est démontré.

Je démontrerai un théorème sur la sommation de la série conjuguée (39).

IX. *Supposons que l'intégrale*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot\frac{t}{2}\, dt$$

est convergente. Si pour un $p \geqq 0$, on a

$$\int_0^t |d_p(\tau)|\, d\tau = o(t), \qquad t \to 0 \tag{51}$$

la série (39) *est sommable* (C, k) *pour chaque $k > p$ avec la somme* A.

En effet, nous avons

$$\bar{s}_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)]\, \omega(t)\, dt,$$

où $\omega(t) = \frac{1}{2}\cot\frac{t}{2} + u(t)$, donc

$$\bar{s}_n^{(k)}(x) = A + j, \qquad j = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)]\, u(t)\, dt.$$

Comme pour $u(t)$, on a l'inégalité (6) en suivant la même marche de démonstration que du théorème I, on voit facilement que $j = o(1)$, et le théorème est démontré. Il est évident qu'on peut remplacer la condition (51) par les conditions

$$\int_0^t |d_p(\tau)|\, d\tau = O(t), \quad d_{p+1}(t) \to 0, \qquad t \to 0.$$

7. Nous considérons maintenant la série dérivée de la série (1) :

$$(52) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \sin nt\, dt.$$

Désignons par $b_n^k(x)$ les moyennes de Cesàro d'ordre $k \geqq 0$ de la série (52) et par $g(t)$ le polynome trigonométrique

$$g(t) = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k \mu \sin \mu t.$$

On obtient facilement

$$b_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] g(t)\, dt.$$

Posons

$$b(t) = \frac{1}{A_n^k} \left(\frac{A_n^k}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k \cos \mu t \right),$$

nous avons

$$g(t) = -b'(t),$$

donc

$$b_n^{(k)}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t)\, b'(t)\, dt, \qquad \varphi(t) = f(x+t) - f(x-t).$$

Mais on a

$$-\int_0^{\pi} t\, b'(t)\, dt = -\pi\, b(\pi) + \int_0^{\pi} b(t)\, dt = -\pi\, b(\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + o(1),$$

donc

$$(53) \qquad b_n^{(k)}(x) - S = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d(t)\, b'(t)\, dt + o(1),$$

où l'on pose

$$d(t) = \varphi(t) - 2St.$$

Désignons par

$$d_p(t) = pt^{-p}\int_0^t d(\tau)(t-\tau)^{p-1}\,d\tau, \qquad d_0(t) = d(t).$$

Nous démontrerons le théorème suivant:

X. *Supposons que pour un* S *et un* $p \geqq 0$ *nous avons*

$$\int_0^t |d_p(t)|\,d\tau = o(t^2), \qquad t \to 0, \tag{54}$$

la série (52) *est sommable* (C, k) *pour chaque* $k > p+1$ *avec la somme* S.

En effet en suivant la marche déjà employée la démonstration se ramène à établir que l'intégrale

$$i = \int_0^a t^p\, d_p(t)\, b^{(p+1)}(t)\, dt = o(1)$$

pour $k = p+1+\delta$, $0 < \delta$, $0 < a \leqq \pi$. Soient $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et a choisi de façon que pour $0 < t \leqq a$, on ait

$$\Phi(t) = \int_0^t |d_p(\tau)|\,d\tau < \varepsilon t^2.$$

Alors, en supposant que $p+1 > k$ on obtient, à cause de l'inégalité (6),

$$i = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^a = i_1 + i_2,$$

$$|i_1| < M n^{p+2}\int_0^{\frac{1}{n}} t^p\,|\mu_p(t)|\,dt < M\frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \to 0,$$

$$|i_2| < M\int_{\frac{1}{n}}^a t^p\,|d_p(t)|\,\frac{dt}{n\ t^{p+2+}}$$

$$= M n^{-\delta}\Phi(t)\,t^{-\delta-2}\Big|_{\frac{1}{n}}^a + M(\delta+2)n^{-\delta}\int_{\frac{1}{n}}^a \Phi(t)\frac{dt}{t^{\delta+3}} = o(1) + i_2',$$

$$|i_2'| < \varepsilon M(\delta+2)\,n^{-\delta}\int_{\frac{1}{n}}^a \frac{dt}{t^{\delta+1}} < \varepsilon M_1,$$

où M_1 est un nombre fini. Donc $i = o(1)$ et le théorème est démontré. Il est évident qu'on peut remplacer la condition (54) par

$$\int_0^t |d_p(\tau)|\, d\tau = O(t^2), \qquad \int_0^t d_p(\tau)\, d\tau = o(t^2), \qquad t \to 0.$$

8. On peut aussi démontrer les théorèmes précédents en employant la fonction introduite par M. Young [1]

$$C_p(x) = \frac{x^p}{\Gamma(p)} \int_0^1 \cos xt (1-t)^{p-1} dt \qquad (p > 0).$$

Si l'on pose $\gamma_p(x) = x^{-p}\Gamma(p) C_p(x)$, on a

$$\int_0^\infty \gamma_p(t) \cos xt\, dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1-x)^{p-1} & (p > 1,\ x < 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

Pour $t \to \infty$ on démontre la formule asymptotique

$$\gamma_p(t) = \frac{A}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) + \frac{B \cos\left(t - \frac{1}{2}\pi p\right)}{t^p} + O\left(\frac{1}{t^{p+1}}\right),$$

$$\gamma_p^{(m)}(t) = O\left(\frac{1}{t^{p+1}}\right) + O\left(\frac{1}{t^{m+2}}\right) + \frac{B \sin(t+\lambda)}{t^p}, \tag{55}$$

où A, B, λ sont des constantes. La dernière formule nous montre que

$$|\gamma_p^{(m)}(t) t^p| < M \tag{56}$$

si $m + 2 \geqq p$, $t \to \infty$. Soit $\alpha = m + \delta$, $0 < \delta < 1$, un nombre non entier et désignons par $\gamma_p^{(\alpha)}(t)$ la fonction

$$\gamma_p^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_t^\infty (\tau - t)^{-\delta} \gamma_p^{(m+1)}(\tau)\, dt.$$

Nous démontrerons facilement que l'inégalité (56) est aussi valable, c'est-à-dire

$$|\gamma_p^{(\alpha)}(t) t^p| < M_1, \tag{56'}$$

---

[1] W. H. Young, *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, vol. XVIII, 1912, p. 161-177.

où M_1 est une constante finie. En effet, d'après (55) nous avons

$$\gamma_p^{(m+1)}(t) = O\left(\frac{1}{t^{p+1}}\right) + O\left(\frac{1}{t^{m+3}}\right) + \frac{B\cos(t+\lambda)}{t^p},$$

$$\int_x^\infty (t-x)^{-\delta} \frac{\cos(t+\lambda)}{t^p}\, dt = \int_0^\infty u^{-\delta} \frac{\cos(x+u+\lambda)}{(u+x)^p}\, du$$

$$= \int_0^A + \int_A^\infty = i_1 + i_2,$$

$$|i_1| < \frac{1}{x^p}\int_0^A u^{-\delta}\, du = O\left(\frac{1}{x^p}\right),$$

$$i_2 = \int_A^\infty \frac{\cos(x+u+\lambda)}{(u+x)^p u^\delta}\, du = \frac{1}{(A+x)^p}\int_A^\zeta \frac{\cos(x+u+\lambda)}{u^\delta}\, du,$$

$$i_2 = O\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

Désignons maintenant par $R_k(\omega)$ les moyennes typiques de Riesz d'ordre k de la série (1)

$$R_k(\omega) = \omega^{-k}\sum_{n<\omega} A_n(\omega - n)^k,$$

$$A_0 = \frac{a}{2}, \qquad A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (n > 0).$$

Nous avons le théorème :

XI. *Posons*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\,[f(x+t) + f(x-t)],$$

et supposons qu'il existe des nombres p, λ $(p \geq 0,\ 0 \leq \lambda < 1)$, *tels que*

$$(a) \qquad \lim_{t\to 0} t^\lambda \mu_p(t) = D, \qquad \mu_p(t) = p\,t^{-p}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}\varphi(\tau)\, d\tau.$$

Alors pour $k > p - \lambda$, *nous avons*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{R_k(\omega)}{\omega^\lambda} = D \sin\frac{\pi\lambda}{2}\, \frac{2\Gamma(1-\lambda+p)\Gamma(\lambda)\Gamma(k+1)}{\pi\Gamma(p+1)\Gamma(\lambda+k+1)}.$$

En effet, d'après M. Young, nous avons

$$(57) \qquad R_k(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \gamma_{1+k}(\omega u)\,\varphi(u)\, du,$$

la fonction $f(x)$ étant supposée périodique. Soit a un nombre arbitraire, $0 < a < \infty$, on a

$$R_k(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^a + \frac{2\omega}{\pi}\int_a^\infty,$$

$$\omega\int_a^\infty \gamma_{1+k}(\omega u)\varphi(u)\,du$$

$$= \omega\int_a^{a+2\pi} \gamma_{1+k}(\omega u)\varphi(u)\,du + \omega\int_{a+2\pi}^{a+4\pi} \gamma_{1+k}(\omega u)\varphi(u)\,du + \ldots$$

$$= O\left[\omega^{-\beta}(1^{-1-\beta}+2^{-1-\beta}+3^{-1-\beta}+\ldots)\int_0^{2\pi} |\varphi(u)|\,du\right] = O(\omega^{-\beta}),$$

où $\beta = \min(1, k)$. Donc nous avons

$$R_k(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^a \gamma_{1+k}(\omega u)\varphi(u)\,du + O(\omega^{-\beta}). \tag{58}$$

Posons

$$\varphi(u) = u^{-\lambda}\frac{\Gamma(1-\lambda+p)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(p+1)}D + \psi(u),$$

alors on a

$$pt^{-p}\int_0^t \varphi(u)(t-u)^{p-1}\,du$$

$$= \frac{\Gamma(1-\lambda+p)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(p)}D\int_0^t t^{-p}u^{-\lambda}(t-u)^{p-1}\,du$$

$$+ pt^{-p}\int_0^t \psi(u)(t-u)^{p-1}du = Dt^{-\lambda} + h_p(t),$$

$$h_p(t) = pt^{-p}\int_0^t \psi(u)(t-u)^{p-1}\,du.$$

D'après les conditions du théorème, on a

$$\lim_{t\to 0} t^\lambda h_p(t) = 0. \tag{59}$$

La formule (58) nous donne

$$R_k(\omega) = c\omega\int_0^a \gamma_{1+k}(u\omega)u^{-\lambda}du + \frac{2\omega}{\pi}\int_0^a \gamma_{1+k}(\omega u)\psi(u)\,du + o(1),$$

où

$$c = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(1-\lambda+p)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(p+1)}D.$$

On démontre facilement que l'intégrale

$$j = \frac{\omega}{\omega^\lambda}\int_0^a \gamma_{1+k}(\omega u)u^{-\lambda}\,du$$

tend vers une limite déterminée α, lorsque $\omega \to \infty$. En effet, en posant $\omega u = t$, on reçoit

$$j = \int_0^{a\omega} \gamma_{1+k}(t)\, t^{-\lambda}\, dt.$$

L'intégrale

$$\alpha = \int_0^{\infty} \gamma_{1+k}(t)\, t^{-\lambda}\, dt$$

est absolument convergente puisque

$$\gamma_{1+k}(t)\, t^{-\lambda} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{k+1+\lambda}}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{2+\lambda}}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \to \infty} j = \alpha &= \int_0^{\infty} t^{-\lambda}\, dt \int_0^1 (1-u)^k \cos tu\, du \\
&= \int_0^1 (1-u)^k\, du \int_0^{\infty} \frac{\cos tu}{t^\lambda}\, dt \\
&= \Gamma(1-\lambda) \sin\frac{\pi\lambda}{2} \int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^k\, du \\
&= \Gamma(1-\lambda) \sin\frac{\pi\lambda}{2}\, \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)}.
\end{aligned}$$

Donc nous aurons

$$\begin{aligned}
(60) \qquad \frac{R_k(\omega)}{\omega^\lambda} = {} & \frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi\lambda}{2}\, \frac{\Gamma(1-\lambda+p)\Gamma(\lambda)\Gamma(k+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(\lambda+k+1)}\, D \\
& + \frac{2}{\pi}\, \omega^{1-\lambda} \int_0^a \gamma_{1+k}(\omega u)\, \psi(u)\, du + o(1).
\end{aligned}$$

Il reste à étudier l'intégrale

$$g = \omega^{1-\lambda} \int_0^a \gamma_{1+k}(\omega u)\, \psi(u)\, du.$$

Posons

$$\psi_q(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x \psi(u)(x-u)^{q-1}\, du \qquad (q > 0),$$

$p = m + \delta$, m entier, $0 \leq \delta < 1$. En intégrant par partie, on a

$$\begin{aligned}
g &= \omega^{1-\lambda}\left[\gamma_{1+k}(\omega u)\, \psi_1(u)\right]\Big|_0^a - \omega^{2-\lambda} \int_0^a \gamma'_{1+k}(\omega u)\, \psi_1(u)\, du \\
&= \mathrm{O}(\omega^{-\beta-\lambda}) - \omega^{2-\lambda} \int_0^a \gamma'_{1+k}(\omega u)\, \psi_1(u)\, du = \dots \\
&= \mathrm{O}(\omega^{-\beta-\lambda}) + (-1)^m\, \omega^{m+1-\lambda} \int_0^a \gamma^{(m)}_{1+k}(\omega u)\, \psi_m(u)\, du,
\end{aligned}$$

où $\beta = \min(1, k-m)$. Si $\delta > 0$, nous avons les relations

$$g = O(\omega^{-\beta-\lambda}) + (-1)^{m+1}\omega^{m+2-\lambda}\int_0^a \gamma_{1+k}^{(m+1)}(\omega u)\psi_{m+1}(u)\,du;$$

$$\int_0^a \psi_p(t)\gamma_{1+k}^{(p)}(\omega t)\,dt$$
$$= K\int_0^a \psi_p(t)\,dt\int_t^\infty \omega^{1-\delta}(\tau-t)^{-\delta}\gamma_{1+k}^{(m+1)}(\omega\tau)\,d\tau$$
$$= K\int_0^a \gamma_{1+k}^{(m+1)}(\omega\tau)\,d\tau\int_0^\tau \omega^{1-\delta}\psi_p(t)(\tau-t)^{-\delta}\,dt$$
$$+ K\omega^{1-\delta}\int_a^\infty \gamma_{1+k}^{(m+1)}(\omega\tau)\,d\tau\int_0^a \psi_p(t)(\tau-t)^{-\delta}\,dt,$$

$$\int_0^\tau \psi_p(t)(\tau-t)^{-\delta}\,dt$$
$$= \int_0^\tau \psi_m(u)\,du\,\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_u^\tau (\tau-t)^{-\delta}(t-u)^{\delta-1}\,dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^\tau \psi_m(u)\,du(\tau-u)^{-\delta+\delta-1+1}\int_0^{1-\delta}\zeta^{-\delta}(1-\zeta)^{\delta-1}\,d\zeta$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\psi_{m+1}(\tau)\frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1-\delta)\psi_{m+1}(\tau),$$

$$\omega^{m+2}\int_0^a \gamma_{k+1}^{(m+2)}(\omega\tau)\psi_{m+1}(\tau)\,d\tau$$
$$= c_1\omega^{p+1}\int_0^a \psi_p(t)\gamma_{1+k}^{(p)}(\omega t)\,dt$$
$$+ c_2\omega^{p+1}\int_a^\infty \gamma_{1+k}^{(m+1)}(\omega\tau)\,d\tau\int_0^a \psi_p(t)(t-\tau)^{-\delta}\,dt = c_1 H + c_2 G.$$

On voit facilement comme ci-dessus, que $G = o(1)$, donc dans tous les cas (p entier ou non), on aura

$$(61)\qquad g = o(1) + d\int_0^a \omega^{p+1-\lambda}t^p h_p(t)\gamma_{1+k}^{(p)}(\omega t)\,dt,$$

où d est une constante indépendante de ω. La question se réduit à démontrer que l'intégrale

$$T = \omega^{p+1-\lambda}\int_0^a t^p h_p(t)\gamma_{1+k}^{(p)}(\omega t)\,dt$$

tend vers zéro lorsque $\omega \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et soit a ainsi choisi que l'on a

$$|t^\lambda h_p(t)| < \varepsilon \qquad (0 \leqq t \leqq a),$$

Alors nous avons

$$T = \omega^{p+1-\lambda}\int_0^{\frac{1}{\omega}} + \omega^{p+1-\lambda}\int_{\frac{1}{\omega}}^{a} = T_1 + T_2,$$

$$|T_1| < \varepsilon\omega^{p+1-\lambda}\int_0^{\frac{1}{\omega}} t^{p-\lambda}\,dt < \varepsilon,$$

$$|T_2| < \varepsilon\omega^{p+1-\lambda} M \int_{\frac{1}{\omega}}^{a} t^{p-\lambda}\frac{dt}{\omega^{k+1}t^{k+1}} = \varepsilon M \omega^{-\delta_1}\int_{\frac{1}{\omega}}^{a}\frac{dt}{t^{\delta_1+1}} < \varepsilon M,$$

où $\delta_1 = k + \lambda - p > 0$. Le théorème est démontré.

On démontre facilement que la condition (a) peut être remplacée par la condition

$$\int_0^t |\tau^\lambda \mu_p(\tau) - D|\,d\tau = o(t) \qquad (t \to 0),$$

ou plus généralement par les conditions

$$\int_0^t |\tau^\lambda \mu_p(\tau) - D|\,d\tau = O(t),$$

$$\int_0^t [\tau^\lambda \mu_p(\tau) - D]\,d\tau = o(t) \qquad (t \to 0).$$

Nous démontrons un théorème analogue pour la série conjuguée (39).

XII. *Supposons que pour un* $p \geqq 0$, *on a*

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} t^\lambda d_p(t) = 0,\\ &d_p(t) = pt^{-p}\int_0^t (t-\tau)^{p-1} d(\tau)\,d\tau,\\ &d(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) - f(x-t)],\end{aligned}\right.$$

où λ *est un nombre arbitraire,* $0 < \lambda < 1$. *Si* $\overline{R}_k(\omega)$ *sont des moyennes typiques de Riesz pour la série* (39), *on a,* $k > p - \lambda$,

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\overline{R}_k(\omega)}{\omega^\lambda} = \frac{2}{\pi} D \cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda+p)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma(p+1)}.$$

Désignons par

$$g_k(x)=\int_0^1 (1-u)^k \sin xu\,du,\quad \gamma_k(x)=\int_0^1 (1-u)^{k-1}\cos xu\,du \qquad (k>0),$$

alors on a

$$g_k(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{x}\gamma_k(x),\qquad g'_k(x)=\gamma_{1+k}(x)-\gamma_{2+k}(x),$$

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty g_k(\omega t)\sin nt\,dt\\ &=\frac{2\omega^2}{n\pi}\int_0^\infty g'_k(\omega t)\cos nt\,dt\\ &=\frac{2\omega^2}{n\pi}\int_0^\infty [\gamma_{1+k}(\omega t)-\gamma_{2+k}(\omega t)]\cos nt\,dt\\ &=\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^k \qquad \text{pour } n\leqq\omega,\\ &\quad\text{et}\\ &=0 \qquad\qquad \text{pour } n>\omega. \end{aligned}\right.$$

On a

$$d(t)=\frac{1}{2}[f(x+t)-f(x-t)]\sim\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nt,$$
$$B_n=b_n\cos nx-a_n\sin nx,$$

d'oú

$$(63)\qquad d_1(t)=\int_0^t d(\tau)\,dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}(\cos nt-1)$$

et la série est uniformément convergente. D'après (62) on a

$$\frac{2\omega^2}{n\pi}\int_0^\infty g'_k(\omega t)(\cos nt-1)\,dt=\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^k,$$

donc (63) nous donne

$$(64)\qquad -\frac{2\omega^2}{\pi}\int_0^\infty g'_k(\omega t)\,d_1(t)\,dt=\sum_{n<\omega}B_n\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^k=\overline{R}_k(\omega).$$

Soit $a>0$ un nombre arbitraire. Considérons l'intégrale

$$j=\omega^2\int_a^\infty g'_k(\omega t)\,d_1(t)\,dt.$$

Nous avons

$$j = \omega^2 \int_a^\infty \gamma_{1+k}(\omega t)\, d_1(t)\, dt - \omega^2 \int_a^\infty \gamma_{2+k}(\omega t)\, d_1(t)\, dt = j_1 - j_2,$$

$$j_1 = \omega^2 \int_a^\infty \frac{A \cos(\omega t - \lambda)}{\omega^{1+k} t^{1+k}}\, dt + O(1)$$

$$= \omega^{-k} \int_u^\infty \frac{d_1(t)}{t^{1+k}}\, d \sin(\omega t - \lambda) + O(1) = O(1), \qquad j_2 = O(1).$$

Donc

$$\omega^2 \int_a^\infty g'_k(\omega t)\, d_1(t)\, dt = O(1), \tag{65}$$

d'où et de (64) on conclut que

$$-\frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^a g'_k(\omega t)\, d_1(t)\, dt = \overline{R}_k(\omega) + O(1). \tag{66}$$

La partie gauche est égale à

$$-\frac{2\omega}{\pi} \int_0^a d_1(t)\, dg_k(\omega t) = -\frac{2\omega}{\pi}\, g_k(\omega a) + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^a g_k(\omega t)\, d(t)\, dt.$$

Parce que $\omega g_k(\omega a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \gamma_k(\omega a) = O(1)$, (66) nous donne

$$\frac{2\omega}{\pi} \int_0^a g_k(\omega t)\, d(t)\, dt = \overline{R}_k(\omega) + O(1). \tag{67}$$

Posons

$$d(t) = t^{-\lambda} \frac{\Gamma(1 - \lambda + p)}{\Gamma(1 - \lambda)\Gamma(1 + p)}\, D + \eta(t),$$

nous avons

$$d_p(t) = D t^{-\lambda} + \eta_p(t), \qquad \eta_p(t) = p t^{-p} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} \eta(\tau)\, d\tau.$$

(67) nous donne

$$c\omega \int_0^a g_k(\omega t) t^{-\lambda}\, dt + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^a g_k(\omega t) \eta(t)\, dt = \overline{R}_k(\omega) + O(1), \tag{68}$$

où l'on a posé

$$c = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(1 - \lambda + p)}{\Gamma(1 - \lambda)\Gamma(p + 1)}\, D.$$

On voit facilement que l'intégrale

$$\alpha_\omega = \omega^{1-\lambda} \int_0^a g_k(\omega t) t^{-\lambda}\, dt$$

tend vers une limite déterminée lorsque $\omega \to \infty$. En effet, en posant $\omega t = u$, on reçoit

$$\alpha_\omega = \int_0^{a\omega} g_k(u) u^{-\lambda}\, du \;\to\; \int_0^\infty \gamma_{1+k}(u) u^{-\lambda}\, du - \int_0^\infty \gamma_{2+k}(u) u^{-\lambda}\, du$$
$$= \int_0^\infty g_k(u) u^{-\lambda}\, du,$$

et les intégrales sont absolument convergentes. Alors nous avons

$$\lim_{\omega \to \infty} \alpha_\omega = \alpha = \int_0^\infty u^{-\lambda}\, du \int_0^1 (1-t)^k \sin ut\, dt$$
$$= \int_0^1 (1-t)^k\, dt \int_0^\infty \frac{\sin ut}{u^\lambda}\, du = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^k\, dt \int_0^\infty \frac{\sin v}{v^\lambda}\, dv$$
$$= \Gamma(1-\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)}.$$

De la formule (68) nous obtenons

$$(69)\qquad \frac{2}{\pi}\,\mathrm{D}\cos\frac{\pi\lambda}{2}\,\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda+p)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma(p+1)}$$
$$+ \frac{2}{\pi}\,\omega^{1-\lambda}\int_0^a g_k(\omega t)\eta(t)\, dt = \frac{\overline{\mathrm{R}}_k(\omega)}{\omega^\lambda} + \mathrm{O}(\omega^{-\lambda}).$$

En intégrant par partie on obtient facilement d'une manière déjà employée la formule

$$\omega^{1-\lambda}\int_0^a g_k(\omega t)\eta(t)\, dt = c_1\,\omega^{p+1-\lambda}\int_0^a \eta_p(t) t^p g_k^{(p)}(\omega t)\; dt + o(1)$$
$$= c_1\,\omega^{p+1-\lambda}\int_0^a \eta_p(t) t^p \gamma_{1+k}^{(p)}(\omega t)\, dt$$
$$- c_1\,\omega^{p+1-\lambda}\int_0^a \eta_p(t) t^p \gamma_{2+k}^{(p)}(\omega t)\, dt + o(1) = j_1 - j_2 + o(1),$$

où c_1 est une constante indépendante de ω.

En se basant sur la formule $| t^{1+k}\gamma_{1+k}^{(p)}(t) | < \mathrm{M}$ pour j_1 et pour j_2 sur la formule

$$\gamma_{2+k}(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{k+2}}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right),$$

on démontre facilement que $j_1 \to 0$, $j_2 \to 0$. Le théorème est ainsi démontré.

On voit de la démonstration que la condition (b) peut être remplacée par la condition

$$\int_0^t |\tau^\lambda d_p(\tau) - D| \, d\tau = o(t), \qquad t \to 0,$$

où plus généralement par les conditions

$$\int_0^t |\tau^\lambda d_p(\tau) - D| \, d\tau = O(t), \qquad \int_0^t [\tau^\lambda d_p(\tau) - D] \, d\tau = o(t), \qquad t \to 0.$$

D'après un théorème de Riesz (¹), si une série est sommable (C, k), elle est aussi sommable (R, n, k), et réciproquement. En suivant la même marche de démonstration on peut démontrer que, si $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{s_n^k}{n^\lambda} = s$ existe, oú s_n^k sont les moyennes de Cesàro, $0 \leqq \lambda$, il existe aussi la $\lim\limits_{\omega \to \infty} \dfrac{R_k(\omega)}{\omega^\lambda} = s$, et réciproquement. Donc dans les théorèmes XI et XII, on peut remplacer les moyennes typiques par les moyennes de Cesàro.

Remarque pendant les épreuves. — M. Jacob a démontré des théorèmes semblables aux théorèmes IV et V seulement dans le cas où p est un nombre entier (*voir* M. Jacob, *Mathematische Zeitschrift*, t. 29, 1929, p. 20-33).

(¹) *Voir* E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a real variable and the Theory of Fourier's series*, Cambridge, 1926, vol. II, p. 90-98.