BULLETIN DE LA S. M. F.

SZOLEM MANDELBROJT

Sur un problème concernant les séries de Fourier

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 143-150
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__143_0>

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT LES SÉRIES DE FOURIER [1];

PAR M. S. MANDELBROJT.

Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique* (2^e^ série. C. n° **32**, p. 227) nous exposons des résultats concernant le problème suivant : Quelles doivent être les propriétés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction intégrable L (sommable) nulle sur un ensemble E de mesure non nulle, pour que l'on puisse en conclure que cette fonction est nulle presque partout.

D'autres problèmes se rattachant à celui-ci y sont traités. Dans le cas où E ne contient pas d'intervalle les démonstrations sont difficiles. Il nous paraît donc intéressant de donner ici *l'explication intuitive* de la méthode employée. C'est parce que la démonstration employée peut paraître artificielle que nous nous efforçons d'indiquer ici les idées qui semblent conduire naturellement vers le but cherché.

En réalité nous traitons dans le Mémoire cité un problème plus général que le problème mentionné. Du moins les théorèmes concernant le problème cité résultent de ceux qui concernent le problème que je vais préciser.

Soit $f(t)$ une fonction intégrable au sens de M. Lebesgue (intégrable L) dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Le fait de s'annuler en un point t_0 $(0 \leq t_0 \leq 2\pi)$ ne peut évidemment être d'aucun effet pour la formation des coefficients du Fourier de cette fonction.

Toutefois on peut introduire une notion, généralisant aux fonctions intégrables L, celle du « zéro d'ordre infini », en faisant intervenir non pas la valeur de $f(t_0)$, mais l'ordre de grandeur de $\int_{t_0}^{t_0+\alpha} |f(t)|\,dt$ en fonction de α.

Le fait que t_0 est un « zéro en moyenne » de $f(t)$, dont nous préciserons le caractère en mesurant d'une certaine manière son

[1] Extrait d'une conférence faite au Séminaire de M. Hadamard (Collège de France).

ordre, joue un rôle important dans la formation des coefficients de Fourier de $f(t)$.

Nous disons que t_0 est, en moyenne, un zéro à droite, de $f(t)$ d'ordre exponentiel égal à ρ, si

$$\overline{\lim_{\alpha \to +0}} \frac{\log\left(-\log \int_{t_0}^{t_0+\alpha} |f(t)|\, dt\right)}{-\log \alpha} = \rho,$$

la quantité ρ étant positive.

Pour une *suite* de α $(\alpha > 0)$ tendant vers zéro on a, par conséquent,

$$\int_0^{\alpha} |f(t)|\, dt < e^{-\alpha^{-(\rho+\varepsilon)}},$$

ε tendant vers zéro avec α.

On définit d'une manière semblable un zéro en moyenne à gauche.

Si $f(t) = 0$ dans tout un intervalle $(t_0, t_0 + \alpha_1)$ on posera $\rho = +\infty$.

On voit immédiatement que si $f(t)$ est continue dans un intervalle contenant t_0, ou si seulement $f(t) \to f(t_0)$ lorsque $t \to t_0 + 0$, et si cette fonction admet t_0 comme zéro, en moyenne, d'ordre exponentiel $\rho > 0$, elle s'annule en $t_0 [f(t_0 + 0) = 0]$. Notre notion généralise donc bien celle du zéro d'une fonction continue [ce zéro est pour $f(t)$, continue, d'ordre infini].

On peut maintenant modifier le problème cité au début de cet article, en y substituant au fait que $f(t)$ s'annule dans E celui que cette fonction possède en un point t_0 en un zéro d'ordre exponentiel élevé.

Voici le théorème fondamental, réponse à ce dernier problème (théorème VI du Mémoire cité) :

Soit $f(t)$ une fonction intégrable L *dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$. *Supposons que t_0 $(0 \leqq t_0 \leqq 2\pi)$ est, en moyenne, un zéro à droite (ou à gauche) de $f(t)$, d'ordre exponentiel égal à δ.*

Soit

$$(1) \qquad f(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} \cos n_i t + b_{n_i} \sin n_i t),$$

et supposons que l'exposant de convergence de la suite n_1, n_2, ..., n_i, ... est égal à σ, avec $\sigma < 1$.

Si l'inégalité suivante a lieu :

$$\delta \quad \frac{\sigma}{1-\sigma},$$

alors $f(t)$ est nulle presque partout.

Par contre soient p un entier positif, ε une quantité positive et t_0 un nombre compris entre 0 et 2π; on peut construire une fonction $f_1(t)$ de la forme

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a'_{n'_i} \cos n'_i t + b'_{n'_i} \sin n'_i t)$$

pour laquelle t_0 est, en moyenne, un zéro à droite (ou à gauche) d'ordre exponentiel δ_1, l'exposant de convergence de la suite $\{n'_i\}$ étant σ_1 et les relations suivantes ayant lieu :

$$\frac{1}{p} - \varepsilon < \sigma_1 < \frac{1}{p},$$

$$\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1} - \varepsilon < \delta_1 \leqq \frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}.$$

Ce théorème fournit, comme on le voit, une borne supérieure *exacte* de δ, pour qu'une fonction $f(t)$, non nulle dans un ensemble de mesure positive, et possédant un zéro, en moyenne d'ordre exponentiel δ, puisse posséder une série de Fourier de la forme (1) avec un exposant de convergence de $\{n_i\}$ donné.

Pour avoir une démonstration rigoureuse de ce théorème, ainsi que d'autres théorèmes qui s'y rattachent, nous renvoyons le lecteur au Mémoire cité.

Ici nous exposons quelques idées qui nous ont conduit à cette démonstration.

Pour la clarté, nous donnons ici les grandes lignes de notre méthode, en l'employant dans quelques cas fort simples, qui à la rigueur pourraient être traités d'une manière élémentaire; car le principe que nous adoptons dans cet article est de traiter d'une manière, peut-être trop difficile, les faits faciles, pour préparer la compréhension de l'emploi de cette même méthode dans le cas général où elle nous semble indispensable (*voir* dans le Mémoire cité la démonstration du théorème VI).

Commençons donc par supposer que la série $\Sigma |a_n|$ converge et ne considérons que la série des sinus

$$f(t) = \Sigma a_n \sin nt. \tag{2}$$

Supposons encore que $f(t)$ s'annule dans tout un intervalle

$$f(t) = 0 \qquad (|t| < \alpha).$$

En considérant deux suites $\{t_k\}$ avec $0 < t_k < \alpha$ $(k = 1, 2, \ldots)$, et $\{\gamma_k\}$, telle que $\sum\limits_k |\gamma_k|$ converge, on peut alors écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f(t_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n t_k = 0. \tag{3}$$

En posant

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin t_k x,$$

on peut aussi écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(n) = 0.$$

Considérons deux suites complémentaires d'entiers $\{n_j\}$ et $\{n'_i\}$ ($\{n_j\}$ et $\{n'_i\}$ forment ensemble la suite de tous les entiers positifs, $n_j \neq n'_i$ quels que soient i et j).

Supposons que $a_{n'_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. On peut alors écrire

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} \varphi(n_j) = 0. \tag{4}$$

Si la suite $\{n_j\}$ peut à son tour être subdivisée en deux suites $\{m_p\}$ et $\{m'_q\}$ caractérisées par les propriétés suivantes : — quelle que soit la suite $\{\varepsilon_p\}$ $(\varepsilon_p = \pm 1,\ p = 1, 2, \ldots)$ on peut déterminer les deux suites $\{t_k\}$ et $\{\gamma_k\}$ de sorte que pour tout p on ait

$$\varphi(m_p) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k t_k m_p \neq 0,$$

le signe de $\varphi(m_p)$ étant celui de ε_p et quel que soit q on ait $\varphi(m'_q) = 0$ — alors tous les a_{m_p} $(p = 1, 2, \ldots)$ sont nuls. En effet tout a_{m_p} supposé non nul aurait fourni un terme $a_{m_p}\varphi(m_p)$ positif, les termes $a_{m'_q}\varphi(m'_q)$ étant nuls ; l'égalité (4) ne pourrait donc pas avoir lieu.

Considérons l'exemple très simple suivant, qu'on pourrait qualifier de « Weierstrassien »,

$$f_1(t) = \sum_p a_p \sin m^p t = \sum c_{m^p} \sin m^p t,$$

où m est un entier ($m > 1$).

Quelle que soit la suite $\{\varepsilon_p\}$ ($\varepsilon_p = \pm 1$), en posant

$$\gamma_k = \frac{\varepsilon_k}{2^k}, \qquad t_k = \frac{\pi}{m^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

on a

$$\varphi(x) = \sum \frac{\varepsilon_k}{2^k} \sin\left(\frac{\pi}{m^k} x\right).$$

On peut donc écrire

$$\varphi(m^p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \sin(\pi m^{p-k}) = \sum_{p+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}(\pi m^{p-k}) = \frac{\varepsilon_{p+1}}{2^{p+1}} \sin\frac{\pi}{m} + A_p,$$

où

$$|A_p| < \frac{1}{2^{p+1}} \sin \frac{\pi}{m^2}.$$

Le signe de $\varphi(m^p)$ est donc celui de ε_{p+1}. D'après ce qui précède $\left[\text{avec } m_p = m^p \ (p = 1, 2, \ldots); \ \{n_j\} \equiv \{m_p\}\right]$ on voit donc que si $f(t) = 0$ pour $0 < t < \frac{\pi}{m}$ $\left[\text{ou si seulement } f_1(t) = 0 \text{ pour } t = \frac{\pi}{m^k} (k = 1, 2, \ldots)\right]$, alors $f_1(t)$ est identiquement nulle. Il est évident que ce cas peut ainsi résulter des cas connus fort simples.

En revenant à la série (2) et à l'opération (3), on voit qu'il peut être avantageux de substituer dans cette dernière à la série

$$\Sigma \gamma_k \sin(t_k n) \qquad (|t_k| < \alpha),$$

l'intégrale $\int_0^{\alpha} \psi(t) \sin(tn)\, dt$ et d'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\alpha} \psi(t) \sin nt\, dt = 0.$$

Les quantités $\int_0^{\alpha} \psi(t) \sin nt\, dt$ peuvent dans la discusion qui précède jouer le rôle des quantités $\varphi(n)$.

Or les expressions $\int_0^{\alpha} \psi(t) \sin nt\, dt$ ne sont pas autres que les coefficients β_n dans le développement

$$\psi(t) \sim \Sigma(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt),$$

si l'on suppose que $\psi(t) = 0$ *lorsque* $\alpha < t < 2\pi$.

On voit donc, d'après ce qui précède, et en conservant les notations expliquées, que si, chaque fois qu'on fixe un m_p (de la suite $\{n_j\}$), il existe une fonction $\psi(t)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° $\psi(t) = 0$ si $\alpha < t < 2\pi$,

2° $\psi(t) = \Sigma(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$

avec

$$\beta_{m_p} \neq 0, \qquad \beta_{n_j} = 0 \qquad (n_j \neq m_p)$$

(la suite $\{m_p\}$ est donc composée d'un seul terme), on peut alors affirmer que $a_{m_p} = 0$. Si cette détermination de $\psi(t)$ est possible quel que soit l'entier m_p pris dans la suite $\{n_j\}$ on conclura que tous les a_{n_j} $(j = 1, 2, \ldots)$ sont nuls.

On constate d'ailleurs immédiatement que ce que nous venons de dire revient à l'emploi de la formule de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\psi(t)\,dt = \Sigma\, a_n \beta_n.$$

Notre choix de la fonction $\psi(t)$ nous a permis d'écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} f(t)\,\psi(t)\,dt = a_{m_p}\beta_{m_p} = 0,$$

car

$$f(t)\,\psi(t) = 0 \qquad \{(0 < t < 2\pi);\ [f(t) = 0,\ (0 < t < \alpha);\ \psi(t) = 0,\ (\alpha < t < 2\pi)]\}.$$

Si au lieu de supposer que $f(t)$ s'annule dans l'intervalle $(0, \alpha)$ (α fixe) on suppose seulement que $\int_0^{\alpha} |f(t)|\, dt$ tend vers zéro très rapidement, lorsque $\alpha \to 0$, et si chaque fois qu'on fixe m_p, on peut faire correspondre à chaque α, une fonction $\psi_\alpha(t)$ jouissant, *en plus des propriétés dont jouissait* $\psi(t)$, des propriétés suivantes : En posant

$$M_\alpha = \max_{0 \leqq t \leqq \alpha} |\psi_\alpha(t)|$$

$[\psi_\alpha(t)$ s'annule pour $\alpha < t < 2\pi]$ (¹), et en désignant par $\beta_{m_p}^{(\alpha)}$ le coefficient β_{m_p} de $\psi_\alpha(t)$, la quantité $M_\alpha . \int_0^\alpha |f(t)|\,dt$ tend vers zéro plus rapidement que $\beta_{m_p}^{(\alpha)}$ (lorsque $\alpha \to +0$, m_p fixe), — alors on peut conclure de

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha f(t)\,\psi_\alpha(t)\,dt = a_{m_p}\beta_{m_p}^{(\alpha)}$$

que $a_{m_p} = 0$.

La difficulté du problème consiste précisément en la construction des fonctions $\psi_\alpha(t)$. — On voit maintenant que le lemme suivant est utile pour démontrer le théorème fondamental (dans le Mémoire cité le lemme, comme le théorème, sont démontrés dans le cas le plus général).

Lemme (lemme IV du Mémoire). — *Soit* $\{n_i\}$ *une suite d'entiers dont l'exposant de convergence est égal à* $\sigma < 1$. *Soit* m *un entier positif différent de tous les entiers* n_i $(i = 1, 2, \ldots)$, *et soient* a *et* b *deux nombres réels, non nuls tous les deux. Soit, enfin,* ρ *une quantité telle que*

$$\rho > \frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

Il existe, alors, une constante positive $\delta (\delta > 0)$ *et une famille de fonction* $\psi_\alpha(t)$ *jouissant pour* $\alpha > 0$, *assez petit, des propriétés suivantes :*

1° *Chaque fonction* $\psi_\alpha(t)$ *est définie dans l'intervalle* $(0, \alpha)$ *elle y est continue et indéfiniment dérivable.*

2° $\psi_\alpha^{(n)}(0) = \psi_\alpha^{(n)}(\alpha) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

3° *En posant*

$$F_\alpha(t) = \psi_\alpha(t)$$

lorsque $0 \leq t \leq \alpha$, *et*

$$F_\alpha(t) = 0$$

lorsque $\alpha < t \leq 2\pi$, *et en écrivant*

$$F_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(\alpha)}\cos nt + b_n^{(\alpha)}\sin nt) \qquad (b_0^{(\alpha)} = 0),$$

(¹) Les coefficients de Fourier de cette fonction, d'indice $n_j (n_j \neq m_p)$, $(j = 1, \ldots)$, sont nuls. Dans le cas que nous envisageons ici, ce sont les coefficients des sinus correspondant à ces indices qui sont nuls.

on a

$$a_0^{(\alpha)} = a_{n_i}^{(\alpha)} = b_{n_i}^{(\alpha)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$|a a_m^{(\alpha)} + b b_m^{(\alpha)}| > \delta\alpha^2.$$

4° *On a*

$$|\psi_\alpha(t)| < e^{\alpha-\rho}.$$

La démonstration de ce lemme est délicate.

Elle exige la connaissance de la théorie des fonctions quasi analytiques, ou du moins du fait suivant de cette théorie : lorsque les quantités m_n tendent vers l'infini assez rapidement on peut construire une fonction $F(t)$ non identiquement nulle $(a \leq t \leq b)$ indéfiniment dérivable et telle que

$$|F^{(n)}(t)| < m_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad F^{(n)}(a) = F^{(n)}(b) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

C'est par l'intermédiaire de ces fonctions, et en employant quelques faits tirés de la théorie des fonctions entières qu'on arrive à la construction des fonctions $\psi_\alpha(t)$.

La fonction $F(t)$, *pour pouvoir servir à la construction de* $\psi_\alpha(t)$ doit être telle, que la suite m_n ne tende pas trop rapidement vers l'infini, cette rapidité de croissance de m_n ne pouvant pas, d'autre part, être trop petite, pour que cette fonction $F(t)$ ne soit pas identiquement nulle, comme on le sait de la théorie des fonctions quasi analytiques.

C'est cette circonstance limitant d'assez près la rapidité de la croissance de la suite m_n, et ceci *de deux côtés* (croissance pas trop rapide, ni trop lente), qui est la cause de l'impossibilité d'améliorer le théorème fondamental.

Cette *exactitude* du théorème est contenue d'ailleurs dans la seconde partie de son énoncé.

Ceci prouve que la méthode employée est tout à fait adaptée à ce genre de questions.