

# BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

## **Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 5 (1877), p. 190-193

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1877\\_\\_5\\_\\_190\\_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__190_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



paraboloïde des normales : elle constitue avec  $G$  la trace horizontale de ce paraboloïde.

Menons, à partir d'un point  $(a', a)$  de  $G$ , la normale à  $(G)$  ; soient  $(a'm', am)$  les projections de cette droite. Elle appartient au paraboloïde. La génératrice de ce paraboloïde, qui passe par le point  $(m', m)$  de cette droite, étant parallèle au plan directeur de ce paraboloïde, qui n'est autre que le plan central de  $(G)$ , se projette horizontalement suivant  $mt$ . La trace horizontale de cette droite est au point  $t$  et par suite la trace horizontale du plan tangent en  $m$  au paraboloïde est la droite  $at$ .

Le plan central relatif à la génératrice  $(am, a'm')$  du paraboloïde est le plan  $(m'a'a)$ . Nous avons donc pour la droite  $(am, a'm')$  le plan central et le plan tangent en  $m$  au paraboloïde. Il est alors facile pour cette droite de déterminer le paramètre de distribution des plans tangents au paraboloïde.

Ce paramètre, que nous désignons par  $K_1$ , est égal au segment  $a'm'$  divisé par la tangente de l'angle que font entre eux le plan central  $(m'a'a)$  et le plan tangent en  $m$  au paraboloïde. Pour déterminer cette tangente, menons par le point  $t$  un plan perpendiculaire à la droite  $(a'm', am)$ . Ce plan a pour traces  $p'at$ , il coupe le plan central  $(m'a'a)$  suivant une droite projetée horizontalement suivant  $pq$  et le plan tangent en  $m$  au paraboloïde suivant la droite  $tp$ . L'angle compris entre ces deux droites est l'angle dont nous devons prendre la tangente. Cette tangente est égale à  $\frac{\alpha p'}{pq}$ .

Le paramètre  $K_1$  est donc égal à

$$\frac{\frac{a'm'}{\alpha n'}}{pq} = \frac{ac}{\sin \theta \cos \theta},$$

en appelant  $\theta$  l'angle que la normale  $am$  fait avec la normale  $ct$ .

Le paramètre de distribution des plans tangents à  $(G)$  pour  $G$  est

$$K = \frac{ac}{\tan \theta};$$

on a donc

$$K_1 = \frac{K}{\cos^2 \theta}.$$

*Telle est la valeur du paramètre de distribution des plans tangent au parabolôïde des normales pour une génératrice quelconque  $am$ .*

On peut arriver plus rapidement à ce résultat de la manière suivante. On a

$$K = \frac{ac}{\tan \theta}.$$

En différentiant, il vient

$$\frac{K}{\cos^2 \theta} = \frac{d.ac}{d\theta}.$$

$d.ac$  est la plus courte distance entre  $am$  et la normale de  $(G)$  qui est infiniment voisine de  $am$ .

$d\theta$  est l'angle de ces deux normales.

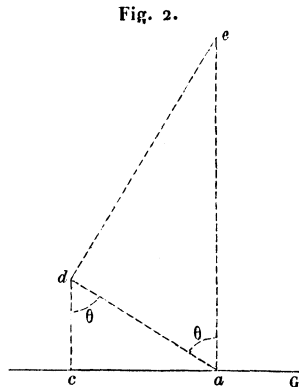
$\frac{d.ac}{d\theta}$  est donc  $K_1$ .

On a alors

$$K_1 = \frac{K}{\cos^2 \theta}.$$

Lorsque  $\theta$  est nul, c'est-à-dire lorsque l'on considère la droite  $ct$ , le paramètre relatif à cette droite est égal au paramètre relatif à  $(G)$ .

Construisons  $K_1$ . Prenons (*fig. 2*) dans un plan quelconque mené



par  $G$ , à partir du point central  $c$ , sur la perpendiculaire à  $G$ , une longueur  $cd$  égale à  $K$ . En joignant le point  $d$  au point quelconque

$a$ , on a l'angle  $cda$  qui est égal à l'angle  $\theta$  que la normale à  $a$  à  $(G)$  fait avec la normale en  $c$  au plan central de cette surface.

Menons à partir de  $d$  la perpendiculaire  $de$  à  $da$  : on a

$$ae = \frac{da}{\cos \theta} = \frac{dc}{\cos^2 \theta} = \frac{K}{\cos^2 \theta};$$

ainsi

$$ac = K_1.$$

La construction que nous trouvons ainsi n'est autre que celle qui donne pour le point  $a$  le segment  $ae$  qui est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure principaux de  $(G)$  en  $a$ . Nous trouvons donc, d'après cette remarque, que pour la génératrice  $am$  du parabolôïde des normales, lequel est une normalie de  $(G)$ , le paramètre de distribution des plans tangents est égal à la moyenne proportionnelle des rayons de courbure principaux de  $(G)$  pour le point  $a$ . Cette propriété, comme l'on sait, est vraie pour une surface quelconque, lorsque la normalie que l'on considère a pour directrice une ligne asymptotique de cette surface <sup>(1)</sup> (voir *Mémoire sur les pinceaux de droite*, etc., Chap. XXXI).