BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE FRÉCHET

Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités « en chaîne »

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 242-277

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__242_0>

SOLUTION CONTINUE LA PLUS GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS « EN CHAINE » ;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Introduction.

Parmi les différentes généralisations de la conception due à Markoff des probabilités « en chaîne », l'une d'elles conduit à l'étude des probabilités $P_{ik}(s, t)$ liées par l'équation fonctionnelle

$$(\mathrm{I}) \qquad P_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{j=r} P_{ij}(s, u) P_{jk}(u, t) \qquad (s \leqq u \leqq t),$$

avec les conditions

$$(\mathrm{P}') \qquad P_{ik}(s, t) \geqq 0,$$

$$(\mathrm{T}') \qquad \sum_{k=1}^{k=r} P_{ik}(s, t) = 1,$$

$$(\mathrm{L}') \qquad P_{ik}(s, s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Cette étude a été entreprise par M. Kolmogoroff [*Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Math. Ann.*, Bd 104, 1931, p. 427)] et par M. Hostinsky [*Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités*, (*Pub. Fac. Sc. Univ. Masaryk*, fasc. 156, 1932, p. 5)].

Nous renverrons à ces deux Mémoires pour l'explication des équations et conditions ci-dessus.

Disons seulement que $P_{ik}(s, t)$ désigne la probabilité pour qu'un certain système, dont on ne distingue qu'un nombre fini d'états $E_1, E_2, \ldots, E_r$, passe de l'état E_i, à l'époque s, à l'état E_k à l'époque ultérieure t.

M. Kolmogoroff a montré qu'en supposant les $P_{ik}(s, t)$ dérivables, leur détermination se ramène à la solution d'un système d'équations différentielles linéaires et du premier ordre.

M. Hostinsky s'est encore rapproché du but en fournissant des expressions d'une solution très générale du problème. Il obtient des solutions de la forme

$$\Phi_{ik}(s, t) = \begin{cases} 1 + \Psi_{kk}(s, t) & \text{si } i = k, \\ \Psi_{ik}(s, t) & \text{si } i \neq k, \end{cases}$$

avec

$$\Psi_{ik}(s, t) = \int_s^t a_{ik}(u)\,du + \sum_{\alpha=1}^{r} \int\!\!\int a_{i\alpha}(u_1) a_{\alpha k}(u_2)\,du_1\,du_2 + \ldots$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{r} \cdots \sum_{\lambda=1}^{r} \int \cdots \int a_{i\alpha}(u_1) a_{\alpha\beta}(u_2) \ldots u_{\lambda k}(u_m)\,du_1 \ldots du_m + \ldots,$$

où, au $m^{\text{ième}}$ terme, l'intégration porte sur le domaine

$$s \leqq u_1 \leqq u_2 \ldots \leqq u_m \leqq t.$$

D'après M. Hostinsky, les fonctions ainsi obtenues sont, quelles que soient les fonctions arbitraires $a_{ik}(u)$, des solutions continues en s, t, de l'équation fonctionnelle (I) et vérifient la condition (L'). La possibilité d'un choix *arbitraire* des $a_{ik}(u)$ rend ce résultat *tout à fait remarquable*. Mais M. Hostinsky ne démontre pas (et d'ailleurs n'affirme pas) que la solution ci-dessus soit *la solution continue la plus générale du système* (I), (L'). C'est cette lacune importante *que nous avons réussi à combler ici* en mettant la solution continue générale sous une forme très différente de celle de M. Hostinsky. Notre solution présente en outre l'avantage d'une forme analytique plus simple, car les r^2 fonctions continues arbitraires qui y figurent y entrent très simplement sous forme rationnelle comme on le verra plus loin [formule (9), p. 255]. Contrairement à l'expression de M. Hostinsky, notre solution ne compte donc ni signe d'intégration, ni développement en série.

La solution de M. Hostinsky comporte comme la nôtre r^2 fonctions arbitraires. Il est donc à présumer qu'elle est aussi générale. Toutefois, pour qu'il en soit rigoureusement ainsi, il faudrait sans doute au moins y remplacer les intégrales ordinaires qui y figurent par des intégrales de Stieltjes en y substituant aux $a_{\lambda k}(u_m)\,du_m$ des expressions de la forme $dA_{\lambda k}(u_m)$. Car la solution de M. Hostinsky est absolument continue, alors que la nôtre ne l'est nulle part nécessairement.

En dehors de la découverte de la solution continue générale annoncée dans le titre du présent Mémoire, on trouvera plus loin d'autres résultats que nous allons rapidement résumer.

Résumé. — Dans ce qui suit, nous débutons (p. 245) par une transformation simple de la solution de M. Hostinsky dans un cas particulier.

Abordant ensuite le cas général de l'équation

$$(\mathrm{F}_r) \quad \varphi_{jk}(s,t)=\sum_{i=1}^{i=r}\varphi_{ji}(s,u)\varphi_{ik}(u,t) \qquad (j,\,k=1,\,\ldots,\,r;\ s\leqq u\leqq t).$$

nous montrons (p. 248) l'importance que présente, pour la solution générale, le calcul du déterminant $D(s, t)$ des $\varphi_{jk}(s, t)$. Nous prouvons que ce déterminant est solution de l'équation (F_1) à laquelle se réduit l'équation fonctionnelle considérée quand le nombre r des valeurs de j (ou de k) se réduit à l'unité.

Nous déterminons (p. 251) la solution continue la plus générale de l'équation (F_1) et même (p. 249) la plus générale de ses solutions jamais nulles. Nous avons aussi obtenu la solution, continue ou non, jamais nulle *ou non*, la plus générale de (F_1), mais ce résultat étant moins important, quoique obtenu par une méthode plus difficile et plus longue, a été reporté à la fin, pour alléger le texte principal, dans une Note additionnelle (p. 271).

Revenant au cas d'un entier r quelconque, nous obtenons (p. 255) la plus générale des solutions de (F_r) parmi celles pour lesquelles $D(s, t)$ reste $\neq 0$. Nous montrons ensuite (p. 257) que la forme obtenue pour cette solution peut être écrite d'une infinité de manières, en relation simple les unes avec les autres. Ce résultat nous est très utile par la suite et nous permet en particulier d'obtenir (p. 260) la solution continue la plus générale de l'ensemble des conditions (F_r) et

$$(\mathrm{L}) \qquad \varphi_{jk}(s,s)=\begin{cases}1 & \text{si } j=k,\\ 0 & \text{si } j\neq k.\end{cases}$$

La même remarque nous permet d'étudier (p. 260) le comportement de cette solution quand t croît indéfiniment.

Enfin, nous montrons comment interviennent les conditions (P')

et (T′), en indiquant à titre d'exemple, (p. 269), pour le cas de $r = 2$, la solution la plus générale de l'ensemble des équations (I), (P′), (T′) (L′).

Le présent Mémoire est le développement d'une Note aux *Comptes rendus*, du 17 Octobre (t. 195, 1932).

Nous n'avons examiné ici que le côté analytique du problème en remettant à plus tard l'interprétation des résultats obtenus et leur application aux problèmes de la théorie des probabilités « en chaîne ».

Nous reviendrons également ailleurs sur l'application de notre méthode à l'équation de Chapman.

Transformation d'une solution particulière de M. Hostinsky.

Montrons d'abord qu'on aurait pu, sans résoudre le problème général, se rendre compte rapidement de la possibilité de mettre les solutions de M. Hostinsky sous une forme plus simple, en considérant le cas particulier où $\varphi_{jk}(s, t)$ ne dépend de s et de t que par l'intermédiaire de $t - s$,

Dans ce cas, M. Hostinsky trouve en posant $u = t - s$

$$\Psi_{jk}(s, t) = \Psi_{jk}(u) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{jk}^{(m)} \frac{u^m}{m!}$$

où

$$a_{jk}^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^{r} \dots \sum_{\lambda=1}^{r} a_{j\alpha} a_{\alpha\beta} \dots a_{\lambda k}, \qquad a_{jk}^{(1)} = a_{jk}.$$

Or il en résulte que

$$a_{jk}^{(m+1)} = \sum_{\alpha=1}^{r} a_{j\alpha} a_{\alpha k}^{(m)};$$

$a_{1k}, \dots, a_{rk}$ sont donc solutions du système

$$x_j^{(m+1)} = \sum_{\alpha=1}^{r} a_{j\alpha} x_{\alpha}^{(m)} \qquad (j = 1, \dots, r).$$

Ce système, de forme connue, a comme on sait (*voir* par exemple Lublin, *Revue de Mathématiques spéciales*, 1932), pour solutions des expressions de la forme

$$x_j^{(m)} = \sum_g (s_g)^m Q_{jg}(m)$$

où $Q_{jg}(m)$ est un polynome en m convenablement choisi de degré $\leqq r$. On a donc

$$a_{jk}^{(m)} = \sum_g (s_g)^m R_{jkg}(m)$$

où les $R_{jkg}(m)$ sont des polynomes en m. D'où

$$\Psi_{jk}(u) = \sum_g \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m!} (s_g)^m R_{jkg}(m).$$

On peut écrire :

$$R_{jkg}(m) = A_{jkg} + B_{jkg} m + C_{jkg} m(m-1) + \ldots \\ + L_{jkg} m(m-1)\ldots(m-r+1).$$

D'où

$$\Psi_{jk}(u) = \sum_g \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (us_g)^m \left[\frac{A_{jkg}}{m!} + \frac{B_{jkg}}{(m-1)!} + \frac{C_{jkg}}{(m-2)!} + \ldots + \frac{L_{jkg}}{(m-r)!} \right] \right\},$$

$$\Psi_{jk}(u) = \sum_g \left\{ A_{jkg} \sum_m \frac{(us_g)^m}{m!} + B_{jkg} us_g \sum_m \frac{(us_g)^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots \right. \\ \left. + L_{jkg} (us_g)^r \sum_m \frac{(us_g)^{m-r}}{(m-r)!} \right\}$$

$$= \sum_g \{ A_{jkg} + B_{jkg}(us_g) + \ldots + L_{jkg}(us_g)^r \} e^{us_g},$$

$$\Psi_{jk}(u) = \sum_g e^{us_g} T_{jkg}(us_g),$$

où $T_{jkg}(u)$ est un polynome en u de degré $\leqq r$.

Cette forme à laquelle se réduit la solution de M. Hostinsky, et où l'on pourrait préciser un peu plus la formation des polynomes $T_{jkg}(u)$, *on aurait pu la deviner immédiatement et directement*. L'équation à vérifier peut en effet s'écrire :

$$\Phi_{jk}(u+v) = \sum_i \Phi_{ji}(u) \Phi_{ik}(v).$$

Sa solution, quand u, v sont des entiers, est déterminée par l'itération

$$\Phi_{jk}(u+1)=\sum_{i=1}^{r}\Phi_{ji}(u)\,\Phi_{ik}(1),$$

et par suite, elle est de la forme

$$\Phi_{jk}(m)=\sum_{g}(\sigma_g)^m S_{jkg}(m),$$

où les $S_{jkg}(m)$ sont des polynomes de degré $\leqq r$ et convenablement choisis. On vérifie alors facilement qu'on obtient une solution valable quand u est une variable continue, quand on prend

$$\Phi_{jk}(u)=\sum_{g}(\sigma_g)^u S_{jkg}(u),$$

c'est-à-dire la forme obtenue plus haut en posant $\sigma_g=e^{s_g}$. Pour vérifier la condition (L′), il suffira de prendre

$$S_{jkg}(0)=\begin{cases}1 & \text{si } j=k,\\ 0 & \text{si } j\neq k.\end{cases}$$

Étude de l'équation fonctionnelle (F_r).

Pour mettre en évidence que nous faisons d'abord abstraction des conditions (P′), (T′), changeons de notations et proposons-nous la détermination de toutes les solutions continues, soumises à la condition

$$\text{(L)}\qquad \varphi_{jk}(s,s)=\begin{cases}1 & \text{si } j=k,\\ 0 & \text{si } j\neq k\end{cases}$$

de l'équation fonctionnelle à r termes

$$(\mathrm{F}_r)\qquad \varphi_{ik}(s,t)=\sum_{j=1}^{j=r}\varphi_{ij}(s,u)\,\varphi_{jk}(u,t)\qquad (s\leqq u\leqq t).$$

Ici $\varphi_{ik}(s,t)$ est une fonction de deux variables continues s, t et de deux indices entiers i, k qui ne peuvent prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, r$.

La relation (F_r) a au moins le système de solutions obtenu en prenant tous les $\varphi_{ik}(s,t)$ nuls. Nous laisserons toujours de côté cette solution. Il y a encore en évidence d'autres solutions, par exemple le système de solutions où tous les $\varphi_{ik}(s, t)$ sont égaux à $\frac{1}{r}$. Considérons le système le plus général de solutions non toutes nulles; nous allons voir que deux cas se présentent. Pour cela, désignons par $D(s, t)$ le déterminant d'un système de solutions $\varphi_{ik}(s, t)$. On aura en vertu de (F_r)

$$(F_1) \qquad D(s, t) = D(s, u)\, D(u, t) \qquad \text{pour } s \leqq u \leqq t.$$

Or observons que cette relation auxiliaire (F_1) est celle à laquelle se réduit l'équation fonctionnelle (F_r) dans le cas où $r = 1$, cas où $D(s, t)$ se réduit à $\varphi_{11}(s, t)$. Il sera donc utile de résoudre d'abord cette équation fonctionnelle, d'abord parce que la discussion qui en résulte nous éclairera sur les valeurs du déterminant des φ_{ik} pour $r \neq 1$, ensuite parce que la résolution du cas $r = 1$ nous guidera vers la solution du cas $r \geqq 1$.

Remarque sur la condition (L). — Faisons auparavant une remarque. On a

$$\varphi_{jk}(u, u) = \sum_i \varphi_{ji}(u, u)\, \varphi_{ik}(u, u).$$

Considérons les équations obtenues pour k fixe, $j = 1, \ldots, r$:

$$\varphi_{j1}(u, u)\, \varphi_{1k}(u, u) + \ldots + \varphi_{jk}(u, u)[\varphi_{kk}(u, u) - 1] + \ldots \\ + \varphi_{jr}(u, u)\, \varphi_{rk}(u, u) = 0.$$

On peut les envisager comme des équations linéaires et homogènes en $\varphi_{1k}(u, u), \ldots, \varphi_{kk}(u, u) - 1, \ldots, \varphi_{rk}(u, u)$, dont le déterminant des coefficients est $D(u, u)$. Donc, si $D(u, u) \neq 0$, on a

$$(L) \qquad \varphi_{jk}(u, u) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k. \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases}$$

conditions analogues aux conditions (L'). Réciproquement si les conditions (L) ont lieu, $D(u, u) \neq 0$. Ainsi *les conditions* (L) *sont entièrement équivalentes à la condition que* $D(u, u) \neq 0$, c'est-à-dire que le déterminant $D(s, t)$ des solutions φ_{jk} de (F_r) est $\neq 0$ pour $s = t = u$.

Solution continue la plus générale de l'équation fonctionnelle (F_1).

Soit à résoudre l'équation fonctionnelle

$$(F_1) \qquad D(s, t) = D(s, u)D(u, t) \qquad \text{pour} \quad s \leqq u \leqq t.$$

Nous déterminerons plus loin les solutions continues du problème. Mais pour commencer, *cherchons d'abord les solutions* du problème *qui ne sont jamais nulles*. On les obtient immédiatement. Soit en effet u_0 un point quelconque. On a les cas suivants :

$$D(s, t) = \frac{D(s, u_0)}{D(t, u_0)} \qquad \text{pour} \quad s \leqq t \leqq u_0,$$

$$D(s, t) = D(s, u_0)D(u_0, t) \qquad \text{pour} \quad s \leqq u_0 \leqq t,$$

$$D(s, t) = \frac{D(u_0, t)}{D(u_0, s)} \qquad \text{pour} \quad u_0 \leqq s \leqq t.$$

On peut donc écrire, dans tous ces cas,

$$(1) \qquad D(s, t) = \frac{A(t)}{A(s)} \qquad \text{pour} \quad s \leqq t,$$

en posant

$$(2) \qquad A(s) = D(u_0, s) \qquad \text{pour} \quad u_0 \leqq s,$$

$$(3) \qquad A(s) = \frac{1}{D(s, u_0)} \qquad \text{pour} \quad s \leqq u_0.$$

Dans ces formules, $A(s)$ et $A(t)$ sont toujours, par hypothèse, finis et $\neq 0$.

C'est d'ailleurs la solution jamais nulle de (F) *la plus générale*, si l'on prend inversement pour $A(s)$ une fonction *entièrement arbitraire* — pourvu que cette fonction $A(s)$ soit partout *finie et* $\neq 0$ — en vertu de l'identité

$$\frac{A(t)}{A(s)} = \frac{A(t)}{A(u)}\frac{A(u)}{A(s)}.$$

Ce qui précède subsiste d'ailleurs si l'on suppose $D(s, t)$ défini seulement (et toujours $\neq 0$) à l'*intérieur* d'un segment (S, T) ou d'une demi-droite $(-\infty, T)$ ou $(S, +\infty)$.

Que $D(s, t)$ soit continu ou non, puisse ou non s'annuler, on observe encore que

$$D(t, t) = D(t, t)D(t, t).$$

Donc $D(t, t)$ ne peut jamais prendre que les valeurs o ou 1. D'autre part, on a évidemment

$$D(s, t) = D(s, u)D(u, u)D(u, t) = D(u, u)D(s, t),$$

si $s \leqq u \leqq t$. Dès lors, pour tout point u d'un intervalle (s, t) tel que $D(s, t) \neq 0$, on a $D(u, u) = 1$.

De tout ce qui précède, on va déduire les solutions continues de (F_1). Nous laisserons de côté la solution continue évidente $D(s, t) \equiv 0$. Pour toute solution $D(s, t)$ continue, la fonction continue $D(t, t)$ ne pouvant prendre que les valeurs o ou 1 gardera constamment la même valeur. Si la solution continue $D(s, t)$ n'est pas identiquement nulle, il y aura au moins un couple s, t tel que $D(s, t) \neq 0$ et au moins un point u appartenant à (s, t) tel que $D(u, u) = 1$. Il en résulte que $D(t, t) = 1$ pour toute valeur de t.

Mais alors $D(s, t)$ reste toujours positif. Car s'il existait un couple s, t tel que $D(s, t) \leqq 0$, on aurait nécessairement $s < t$, et non $s = t$) et si u est le milieu de (s, t), on aurait :

$$D(s, u)D(u, t) \leqq 0,$$

donc

$$D(s, u) \leqq 0 \qquad \text{ou} \qquad D(u, t) \leqq 0.$$

On formerait alors une suite d'intervalles — chacun (s_n, t_n), contenu dans le précédent (s_{n-1}, t_{n-1}) et de longueur moitié — pour lesquels $D(s_n, t_n) \leqq 0$. Il y aurait un point limite t' pour lequel on aurait $D(t', t') \leqq 0$ et non $D(t', t') = 1$. D'où la contradiction annoncée.

Enfin, quand $D(s, t)$ est continue, non $\equiv 0$ et donnée, l'expression de $A(s)$ donnée par les formules (2) et (3) sera positive et continue Réciproquement, si $A(s)$ est une fonction toujours $\neq 0$ et donnée arbitrairement, alors pour que le quotient $D(s, t) = \frac{A(t)}{A(s)}$ soit continu par rapport à l'ensemble (s, t), il suffit évidemment et de plus il faut que $A(t)$ soit continue. Car si t_0 est pris arbitrairement, on peut prendre $s_0 < t_0$ et alors, pour $t > s_0$,

$$A(t) = D(s_0, t)A(s_0)$$

est continue près de t_0 qui est arbitraire. De plus $A(t)$ étant continue et $\neq 0$ garde un signe constant; alors en écrivant, au besoin,

$$D(s, t) = \frac{-A(t)}{-A(s)},$$

on pourra supposer que $A(s)$ reste > 0.

En résumé, toute solution continue $D(s, t)$ de l'équation (F_1) ou bien est $\equiv 0$, ou bien est constamment > 0. Et *la solution continue non identiquement nulle la plus générale de* (F_1) *est représentable sous la forme*

$$D(s, t) = \frac{A(t)}{A(s)},$$

où $A(s)$ *est une fonction continue positive arbitrairement choisie.*

Ainsi nous venons de déterminer la solution continue la plus générale de (F_1) et même nous avons déterminé plus haut la solution — continue ou non — mais partout $\neq 0$, la plus générale. C'est ce qui nous suffira pour l'étude qui suit de l'équation plus générale (F_r). Il est intéressant cependant de montrer qu'on peut obtenir la solution la plus générale de (F_1). Mais ce résultat, moins utile pour les applications, va être reporté à la fin de ce Mémoire, sous le titre de *Note additionnelle.*

Retour à l'équation fonctionnelle (F_r).

Revenons maintenant au cas général où $r \geqq 1$. Il est clair que si les $\varphi_{ik}(s, t)$ sont des fonctions continues du couple (s, t), il en sera de même de leur déterminant $D(s, t)$. Dès lors, celui-ci étant une solution continue de (F_1) ou bien est identiquement nul ou bien est partout > 0.

En résolvant, comme nous allons le faire, l'équation fonctionnelle (F_r) dans le cas général où $D(s, t)$ reste $\neq 0$, on aura donc effectué une résolution qui comprend comme cas très particulier le cas où l'on suppose que les $\varphi_{ik}(s, t)$ sont continues et que leur déterminant est $\neq 0$ pour au moins un couple (s, t). D'ailleurs, dans le cas où sont vérifiées les conditions

$$(L) \qquad \varphi_{jk}(s, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases}$$

analogues aux conditions (L′) de l'application aux probabilités, on aura évidemment $D(s, s) = 1$.

Par conséquent la solution continue la plus générale de l'ensemble des équations (F_r) et (L) est, en particulier, une solution continue de (F_r) telle que $D(s, t)$ reste > 0.

D'ailleurs, la résolution de (F_r) quand $D(s, t)$ reste $\neq 0$ donnera aussi des résultats utiles dans le cas général où l'on ne fait aucune hypothèse sur $D(s, t)$. En effet, s'il existe un couple (s_0, t_0) tel que $D(s_0, t_0) \neq 0$, alors il existe au moins un intervalle tel que $D(s, t)$ soit $\neq 0$ quand s, t sont intérieurs à cet intervalle, et tel, par conséquent, qu'on puisse appliquer à l'intérieur de cet intervalle la solution que nous allons déterminer.

Solution la plus générale de (F_r) quand le déterminant des $\varphi_{jk}(s, t)$ reste $\neq 0$.

Supposons que $D(s, t)$ soit $\neq 0$ pour $s \leqq t$ ou au moins quand s, t sont intérieurs à un intervalle fixe (S, T) $(S < s \leqq t < T)$.

Soit alors u_0 un point fixe intérieur à (S, T). Comme on l'a fait plus haut pour $D(s, t)$, on va, pour obtenir l'expression des $\varphi_{ik}(s, t)$, considérer trois cas :

I. $u_0 \leqq s \leqq t$; on a alors

$$\varphi_{ik}(u_0, t) = \sum_j \varphi_{ij}(u_0, s)\, \varphi_{jk}(s, t).$$

Pour chaque système de valeurs fixes de k, de s et de t, les $\varphi_{jk}(s, t)$ sont solutions des équations en X_j :

$$\varphi_{ik}(u_0, t) = \sum_{j=1}^{j=r} \varphi_{ij}(u_0, s)\, X_j \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Puisque $D(u_0, s) \neq 0$, ce système a un système unique de solutions donné par la règle de Cramer. On a donc

$$\varphi_{jk}(s, t) = \frac{1}{D(u_0, s)} \sum_i \Phi_{ij}(u_0, s)\, \varphi_{ik}(u_0, t),$$

où les $\Phi_{ij}(u_0, s)$ sont les coefficients des $\varphi_{ij}(u_0, s)$ dans le développement de $D(u_0, s)$.

II. $s \leqq u_0 \leqq t$; on a dans ce cas

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \varphi_{ji}(s, u_0)\, \varphi_{ik}(u_0, t).$$

III. $s \leqq t \leqq u_0$; et par suite

$$\varphi_{ji}(s, u_0) = \sum_k \varphi_{jk}(s, t)\, \varphi_{ki}(t, u_0) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

D'où comme plus haut, puisque $D(t, u_0) \neq 0$:

$$\varphi_{jk}(s, t) = \frac{1}{D(t, u_0)} \sum_i \Phi_{ki}(t, u_0)\, \varphi_{ji}(s, u_0).$$

On voit qu'on peut alors mettre ces trois expressions de $\varphi_{jk}(s, t)$ sous la forme (commune à ces trois cas, c'est-à-dire valable si $S < s \leqq t < T$) :

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t). \tag{4}$$

Il suffit de poser

$$a_{ji}(s) = \begin{cases} \varphi_{ji}(s, u_0) & \text{pour} \quad s \leqq u_0, \\ \dfrac{\Phi_{ij}(u_0, s)}{D(u_0, s)} & \text{pour} \quad u_0 \leqq s; \end{cases} \tag{5}$$

$$b_{ki}(t) = \begin{cases} \dfrac{\Phi_{ki}(t, u_0)}{D(t, u_0)} & \text{pour} \quad t \leqq u_0, \\ \varphi_{ik}(u_0, t) & \text{pour} \quad u_0 \leqq t. \end{cases} \tag{6}$$

D'ailleurs, on ne peut choisir indépendamment les fonctions $a_{ji}(s)$, $b_{ik}(t)$. On voit en effet qu'on a

$$\sum_i a_{ij}(s)\, b_{ik}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(s, u_0)} \displaystyle\sum_i \varphi_{ij}(s, u_0)\, \Phi_{ik}(s, u_0) & \text{si} \quad s \leqq u_0, \\ \dfrac{1}{D(u_0, s)} \displaystyle\sum_i \Phi_{ji}(u_0, s)\, \varphi_{ki}(u_0, s) & \text{si} \quad u_0 \leqq s \end{cases}$$

et par suite, quel que soit s :

$$\sum_i a_{ij}(s)\, b_{ik}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k, \\ 1 & \text{si} \quad j = k. \end{cases} \tag{7}$$

Et de même

$$\sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k, \\ 1 & \text{si} \quad j = k. \end{cases}$$

Inversement, donnons-nous arbitrairement un système de fonctions $a_{ij}(s)$, $b_{kl}(s)$ biorthogonal et normé par rapport aux seconds indices, c'est-à-dire vérifiant les conditions (7). Et considérons les fonctions définies par

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t). \tag{8}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_i \varphi_{ji}(s, u)\,\varphi_{ik}(u, t) &= \sum_i \left[\sum_h a_{jh}(s)\, b_{ih}(u)\right]\left[\sum_l a_{il}(u)\, b_{kl}(t)\right] \\ &= \sum_{h,l}\left\{a_{jh}(s)\, b_{kl}(t) \sum_i a_{il}(u)\, b_{ih}(u)\right\} \\ &= \sum_l a_{jl}(s)\, b_{kl}(t) = \varphi_{jk}(s, t).\end{aligned}$$

D'autre part, si $D(s)$, $d(s)$ sont les déterminants des $b_{ki}(s)$ et des $a_{ki}(s)$, on voit que le produit $D(s)\,d(s)$ est un déterminant dont les termes sont nuls sauf ceux de la diagonale principale, tous égaux à 1. On a donc

$$d(s)\, D(s) = 1.$$

Donc $d(s)$, $D(t)$ restent $\neq 0$. Or $D(s, t) = d(s) . D(t)$. Donc $D(s, t) \neq 0$.

En résumé, *la solution (continue ou non en s, t) $\varphi_{ik}(s, t)$ de (F_r), la plus générale parmi celles pour lesquelles le déterminant $D(s, t)$ des $\varphi_{ik}(s, t)$ reste $\neq 0$ est de la forme*

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t),$$

où les $a_{ji}(s)$, $b_{ki}(s)$ sont un système biorthogonal et normé par rapport aux seconds indices, mais par ailleurs arbitraire.

Ce résultat s'applique, qu'on fasse varier les s, t arbitrairement sur la droite ou à l'intérieur d'un intervalle fixe S, T.

Observons d'ailleurs qu'on peut choisir les $a_{ji}(s)$ presque arbitrairement, les $b_{kl}(s)$ étant alors déterminés. En effet, on a vu que $d(s) \neq 0$. D'autre part, l'ensemble des conditions exprimant que le système des a, b est biorthogonal et normé est équivalent au système (obtenu par simple résolution) :

$$b_{ki}(s) = \frac{A_{ki}(s)}{d(s)},$$

où $A_{ki}(s)$ est le coefficient de $a_{ki}(s)$ dans le développement de $d(s)$.

En résumé, *la solution (continue ou non)*, $\varphi_{ik}(s, t)$, *de l'équation fonctionnelle* (F_r), *la plus générale parmi celles pour lesquelles le déterminant des* $\varphi_{ik}(s, t)$ *reste* $\neq 0$, *est de la forme*

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s) \frac{A_{ki}(t)}{d(t)}, \tag{9}$$

où les $a_{ji}(s)$ *sont des fonctions qui peuvent être arbitrairement choisies pourvu que leur déterminant* $d(s)$ *reste* $\neq 0$ *et où* $A_{ki}(t)$ *est le coefficient de* $a_{ki}(t)$ *dans le déterminant* $d(t)$.

Il est clair qu'on peut aussi écrire

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \frac{B_{ji}(s)}{D(s)} b_{ki}(t), \tag{10}$$

où les $b_{ki}(t)$ sont choisies arbitrairement pourvu que leur déterminant $D(t)$ reste $\neq 0$ et où $B_{ji}(s)$ est le coefficient de $b_{ji}(s)$ dans le développement de $D(s)$.

On remarquera d'ailleurs qu'on aura

$$\varphi_{jk}(s, s) = \frac{1}{d(s)} \sum_i a_{ji}(s)\, A_{ki}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

De sorte que si $\varphi_{jk}(s, t)$ est une solution de (F_r) dont le déterminant $D(s, t)$ reste $\neq 0$, non seulement $D(s, s)$ reste égal à l'unité mais encore les termes de ce déterminant des $\varphi_{jk}(s, s)$ sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1, et par suite la condition (L) est nécessairement vérifiée. On verra plus loin (p. 259) que la réciproque est vraie pour les solutions continues.

Indétermination de la représentation des $\varphi_{jk}(s, t)$.

Observons que pour une solution $\varphi_{jk}(s, t)$ de (F_r), il y a une infinité de manières de la mettre sous la forme

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t). \tag{8}$$

Nous avons en effet déjà écrit, p. 253, des formules (5), (6), donnant au moins un système d'expressions de $a_{ji}(s)$, $b_{ki}(t)$ pour $\varphi_{jk}(s, t)$ donné; or ces expressions dépendaient d'un paramètre arbitraire u_0.

Nous allons même obtenir *l'expression la plus générale des* a_{ji}, b_{ki} *pour une solution* $\varphi_{jk}(s, t)$ *donnée.*

Soit donc une expression

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \alpha_{ji}(s)\,\beta_{ki}(t). \tag{11}$$

distincte ou non de la première. Nous allons d'abord montrer que si c'est une solution de (F_r), et si le déterminant des $\varphi_{jk}(s, t)$ est $\neq 0$, le système des α, β est biorthogonal et normé (et les déterminants des α et des β sont $\neq 0$). Tout d'abord, le déterminant des $\varphi_{jk}(s, t)$ est, d'après l'expression (11), égal au produit de déterminants des α et des β. Le premier étant supposé $\neq 0$, il en sera de même des deux derniers. D'autre part, en écrivant que l'expression (11) vérifie (F_r), on aura

$$\begin{aligned}\sum_i \alpha_{ji}(s)\,\beta_{ki}(t) &= \sum_{h,l} \alpha_{jh}(s)\,\beta_{kl}(t) \sum_i \beta_{ih}(u)\,\alpha_{il}(u)\\ &= \sum_{h,l} G_{lh}(u)\,\alpha_{jh}(s)\,\beta_{kl}(t),\end{aligned}$$

en posant

$$G_{lh}(u) = \sum_i \alpha_{il}(u)\,\beta_{ih}(u).$$

D'où

$$\sum_h \alpha_{jh}(s)\left[\beta_{kh}(t) - \sum_l G_{lh}(u)\,\beta_{kl}(t)\right] = 0.$$

Comme le déterminant des α est $\neq 0$, on voit que, pour chaque valeur de k, le crochet est nul. On a donc

$$\beta_{kh}(t) - \sum_l G_{lh}(u)\,\beta_{kl}(t) = 0,$$

et puisque le déterminant des $\beta_{kl}(t)$ est $\neq 0$, on a pour chaque valeur fixe de h :

$$\sum_i \alpha_{il}(u)\,\beta_{ih}(u) \equiv G_{lh}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = h,\\ 0 & \text{si } l \neq h,\end{cases}$$

comme il avait été annoncé.

Ceci étant, on a

$$\sum_k \alpha_{kh}(t)\,\varphi_{jk}(s,t) = \sum_i \alpha_{ji}(s)\left[\sum_k \alpha_{kh}(t)\,\beta_{ki}(t)\right] = \alpha_{jh}(s).$$

D'où

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{jh}(s) = \sum\limits_k \alpha_{kh}(t) \sum\limits_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t), \\ \text{c'est-à-dire} \\ \alpha_{jh}(s) = \sum\limits_i \gamma_{hi} a_{ji}(s), \end{array}\right.$$

où

$$\gamma_{hi} = \sum_k \alpha_{kh}(t)\, b_{ki}(t).$$

D'après cette expression γ_{hi} pourrait dépendre de t; mais les équations (12) ont pour h fixe, $j = 1, \ldots, r$, un système unique de solutions γ_{hi}, puisque $d(s) \neq 0$ et ces solutions ne peuvent dépendre de t. Donc γ_{hi} est bien une constante. De façon analogue, on aura

$$(13)\qquad \beta_{kl}(t) = \sum_i \delta_{li}\, b_{ki}(t), \qquad \text{où} \qquad \delta_{li} = \sum_j a_{ji}(s)\,\beta_{jl}(s) = \text{const.}$$

D'ailleurs les constantes γ_{hi} et δ_{il} ne sont pas indépendantes. Considérons en effet la somme

$$\sum_i \gamma_{hi}\,\delta_{li} = \sum_{k,j}\left[\sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(s)\right] \alpha_{kh}(s)\,\beta_{jl}(s).$$

Les a, b étant nécessairement biorthogonaux et normés relativement aux seconds indices le sont aussi par rapport aux premiers. On a donc

$$(14)\qquad \sum_i \gamma_{hi}\,\delta_{li} = \sum_j \alpha_{jh}(s)\,\beta_{jl}(s) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } h = l, \\ 0 & \text{si } h \neq l; \end{array}\right.$$

et par suite aussi

$$\sum_i \gamma_{ih}\,\delta_{il} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } h = l, \\ 0 & \text{si } h \neq l. \end{array}\right.$$

Réciproquement, si les a_{ji}, b_{ki} sont donnés, et si l'on prend pour α_{jh}, β_{kl} des fonctions déterminées par

$$\alpha_{jh}(s) = \sum_i \gamma_{hi}\, a_{ji}(s),$$

$$\beta_{kl}(t) = \sum_i \delta_{li}\, b_{ki}(t),$$

en prenant pour les γ_{ih} et δ_{il} un système quelconque de constantes qui soit biorthogonal et normé par rapport au second indice, alors on aura aussi

$$\sum_i \alpha_{ji}(s)\beta_{ki}(t) = \sum_{k,l} a_{jh}(s)\, b_{kl}(t) \sum_i \gamma_{ih}\delta_{il} = \sum_l a_{jl}(s)\, b_{kl}(t) = \varphi_{jk}(s, t).$$

Remarques. — Soient $\delta(s)$, $\Delta(t)$ les déterminants des $\alpha_{ji}(s)$, $\beta_{ki}(t)$; on aura évidemment $D(s, t) = \delta(s)\Delta(t)$. Comme on a vu que dans le cas actuel où $D(s, t)$ est supposé toujours $\neq 0$, on a $D(s, s) \equiv 1$, alors on voit que $\delta(s)\Delta(s) = 1$. Cela résulte aussi du fait que les α, β forment un système biorthogonal et normé. On en conclut :

$$D(s, t) = \frac{\delta(s)}{\delta(t)}.$$

II. Nous avons obtenu, d'une part, une représentation de la solution $\varphi_{jk}(s, t)$ de (F_r) sous la forme (4) en fonction d'un paramètre u_0, grâce aux formules (5), (6); d'autre part, la forme la plus générale d'une solution $\varphi_{jk}(s, t)$ donnée sous la forme (11). On pouvait se demander si la première méthode ne fournirait pas l'expression de $\varphi_{jk}(s, t)$ sous la forme (11) la plus générale quand on fait varier ce paramètre u_0. La réponse est négative. En effet, observons que si les $a_{ji}(s)$, $b_{ki}(t)$ sont obtenus par les formules (5) et (6), on a

$$a_{ji}(u_0) = b_{ji}(u_0) = \varphi_{ji}(u_0, u_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases} \tag{15}$$

Or, on peut choisir arbitrairement les fonctions $a_{ji}(s)$, pourvu que leur déterminant soit $\neq 0$, et il est clair qu'on peut les choisir de sorte que les $a_{ij}(s)$ ne satisfassent à la condition (15) pour aucune valeur de u_0. Il suffit, par exemple, de prendre pour les $a_{ji}(s)$ des constantes convenables.

Solutions continues de (F_r) *et* (L). — Considérons, en particulier, une solution $\varphi_{jk}(s, t)$ de (F_r) qui soit continue par rapport au couple (s, t) (pour $s \leqq t$). Alors le déterminant $D(s, t)$ est une fonction continue; or, c'est une solution de (F_1), et nous avons vu (p. 250) qu'une solution continue de (F_1) est toujours positive ou toujours nulle.

I. Si la condition (L) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire s'il y a au moins une valeur de u et un couple j, k tel que $\varphi_{jk}(u, u) \neq 0$ si $j \neq k$, ou tel que $\varphi_{j,k}(u, u) \neq 1$ si $j = k$, alors, comme on l'a vu (p. 255), $D(s, t)$ ne peut rester $\neq 0$ et, par suite, $D(s, t) \equiv 0$.

Ainsi, *pour toute solution continue de* (F_r) *ne vérifiant pas* (L), *il existe un système de fonctions continues non toutes nulles* $U_k(s, t)$ *telles que*

$$\sum_k U_k(s, t)\, \varphi_{jk}(s, t) \equiv 0.$$

II. Si, au contraire, $\varphi_{jk}(s, t)$ est une fonction continue vérifiant à la fois (F_r) et (L), $D(s, s)$ reste égal à 1, donc $D(s, t)$ ne pouvant être identiquement nul reste positif.

En particulier, $D(s, t)$ restant $\neq 0$, $\varphi_{jk}(s, t)$ peut se mettre sous la forme (4) au moyen des formules (5), (6). D'après ces dernières formules, les $a_{ik}(s)$, $b_{ik}(t)$ sont des fonctions continues de s et de t. Mettons maintenant $\varphi_{jk}(s, t)$ sous la forme générale

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \alpha_{ji}(s)\, \beta_{ki}(t). \tag{11}$$

Nous avons vu (p. 257) que les $\alpha_{ji}(s)$ sont nécessairement des combinaisons linéaires des $a_{ji}(s)$; les $\alpha_{ji}(s)$ seront donc continues; de même, pour les $\beta_{ki}(t)$. Réciproquement, si les $\alpha_{ji}(s)$ et les $\beta_{ki}(t)$ sont continues, l'expression (11) est aussi continue.

Ainsi, *la solution continue la plus générale des équations simultanées* (F_r) *et* (L) *est représentable sous la forme* (11) *où les* $\alpha_{ji}(s)$, $\beta_{ki}(t)$ *sont des fonctions continues formant un système biorthogonal et normé arbitrairement choisi.* De plus, pour une solution continue $\varphi_{jk}(s, t)$ de (F_r) et de (L), *chacune* de ses représentations sous la forme (11) est nécessairement constituée par un système biorthogonal et normé de fonctions continues.

On voit aussi que *la solution continue la plus générale des équations simultanées* (F_r) *et* (L) *est de la forme*

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s) \frac{A_{ki}(t)}{d(t)}$$

où $A_{ki}(t)$ *est le coefficient de* $a_{ki}(t)$ *dans le développement du déterminant* $d(t)$ *des* $a_{ki}(t)$ *et où les* $a_{ji}(s)$ *sont des fonctions continues dont le choix est arbitraire pourvu que leur déterminant* $d(s)$ *reste* $\neq 0$.

Notons que si c'est seulement à l'intérieur d'un intervalle — fini ou non — ST que $\varphi_{jk}(s, t)$ est solution continue simultanée de (F_r) et de (L), alors l'énoncé précédent subsiste quand on ne l'applique qu'à l'*intérieur* de l'intervalle (S, T).

Comportement asymptotique des solutions continues. — En vue des applications à la théorie des probabilités en chaîne, nous allons étudier ce que deviennent les solutions continues $\varphi_{jk}(s, t)$ du système (F_r), (L) quand, s restant fixe, t croît indéfiniment, suivant ce que sont les fonctions continues arbitraires $b_{ki}(t)$ dans l'expression

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \frac{B_{ji}(s)\, b_{ki}(t)}{D(s)}, \tag{16}$$

où $D(s)$ est le déterminant des $b_{ki}(s)$.

Toute cette étude se fera facilement si l'on se base sur ce que, comme on l'a vu pages 257 et 259 (en permutant les notations employées plus haut), les $b_{ki}(t)$ sont des combinaisons linéaires *à coefficients constants* des $\varphi_{ji}(u_0, t)$, soit

$$b_{ki}(t) = \sum_j \delta_{ij}\, \varphi_{jk}(u_0, t), \tag{17}$$

dès que t devient supérieur à un nombre u_0 fixé arbitrairement d'avance.

1° Pour qu'il existe au moins une valeur de s telle que les $\varphi_{ji}(s, t)$ restent bornés pour $t \geqq s$, il faut, d'après (17), et il suffit, d'après (16), que les $b_{ki}(t)$ soient bornés pour t assez grand. Et alors les $\varphi_{jk}(s, t)$ resteront bornés pour chaque valeur fixe de s quand t croît.

2° Pour qu'il existe au moins une valeur de s, telle que les

$\varphi_{jk}(s, t)$ tendent chacun vers une limite déterminée et finie quand t croît, s restant fixe, il faut, d'après (17), et il suffit, d'après (16), que les $b_{ki}(t)$ convergent quand t croît indéfiniment. Et alors, il en sera de même pour $\varphi_{jk}(s, t)$ pour toute valeur de s. Et si l'on a

$$\lim_{t \to +\infty} b_{ki}(t) = b_{ki},$$

on aura

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \frac{B_{ji}(s)}{D(s)} b_{ki} = \varphi_{jk}(s).$$

D'ailleurs, on peut présenter les choses plus simplement; il suffit de choisir pour les mêmes solutions $\varphi_{jk}(s, t)$ une autre représentation

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t).$$

Si la relation entre les b et les β est de la forme

$$b_{ki}(t) = \sum_j \lambda_{ij}\, \beta_{kj}(t),$$

et si les $\beta_{kj}(t)$ tendent vers des limites β_{kj}, alors les $b_{ki}(t)$ tendent vers des limites b_{ki}, et l'on a

$$b_{ki} = \sum_j \lambda_{ij}\, \beta_{kj}.$$

On sait que le déterminant des λ_{ij} est $\neq 0$. Donc le déterminant de b_{ki} et celui de β_{kj} sont en même temps nuls ou en même temps $\neq 0$.

Si le déterminant des b_{ki} est $\neq 0$, alors on pourra choisir les λ_{ij}, de sorte qu'on ait

$$\beta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

Il suffira de prendre $\lambda_{ik} = b_{ki}$. Ainsi, *quand* le déterminant des limites de $\varphi_{kj}(s, t)$ est $\neq 0$, on pourra toujours poser

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \alpha_{ji}(s)\, \beta_{ki}(t)$$

avec

$$\lim_{t \to \infty} \beta_{kj}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

On aura alors

$$\alpha_{jk}(s) = \lim_{t \to \infty} \varphi_{jk}(s, t).$$

3° Pour qu'il existe au moins une valeur de s, telle que les $\varphi_{jk}(s, t)$ convergent chacun vers une limite $\varphi_k(s)$ déterminée, finie et indépendante du premier indice, j, il faut, d'après (17), que les $b_{ki}(t)$ tendent vers des limites b_{ki}, finies, déterminées et de la forme de produits $w_k c_i$ d'une fonction de k par une fonction de i. Et alors, on aura

$$\varphi_k(s) = w_k \sum_i \frac{B_{ji}(s) c_i}{D(s)}.$$

Il faudra donc encore : *a*. ou bien que les limites des $b_{ki}(t)$ soient toutes nulles (et alors les limites des $\varphi_{jk}(s, t)$ sont toutes nulles, et inversement); *b*. ou bien que l'expression $\sum_i c_i B_{ji}(s)$ soit indépendante de j.

L'ensemble des conditions nécessaires qu'on vient d'établir est évidemment suffisant.

On notera que, dans ce cas, les lignes du déterminant limite des $b_{ik}(t)$ deviennent proportionnelles, donc $D(t)$ tend vers zéro. Et comme les $\varphi_{jk}(s, t)$ ont des limites finies, $D(s, t) = d(s) D(t)$ a une limite finie, et $d(t) = \frac{1}{D(t)}$ tend vers l'infini avec t.

4° Pour qu'il existe au moins une valeur de s, telle que les $\varphi_{jk}(s, t)$ soient des fonctions périodiques de t (de même période T), il faut, d'après (17), et il suffit, d'après (16), que les $b_{ki}(t)$ soient des fonctions périodiques de t (de période T). Et alors il en sera de même pour les $\varphi_{jk}(s, t)$, pour toute valeur de s, et la période sera indépendante de s.

5° Pour qu'il existe au moins une valeur de s telle que les fonctions $\varphi_{jk}(s, t)$ soient des fonctions asymptotiquement périodiques de t (et de même période asymptotique T), c'est-à-dire pour que $\varphi_{jk}(s, t)$ soit la somme d'une fonction de s et de t périodique en t (de période T indépendante de j, k) et d'une fonction de s et t qui converge vers zéro quand t croît — il faut, d'après (17), et il suffit, d'après (16), que les fonctions $b_{ki}(t)$ soient des fonctions asymptotiquement périodiques et de même période T. Et alors, il en sera de même, quel que soit s, et la période asymptotique sera indépendante de s.

Limites généralisées. — On a généralisé de diverses façons la limite d'une fonction de t lorsque t croît indéfiniment. Nous ne retiendrons dans la suite que celles de ces généralisations pour lesquelles : A. quelles que soient la constante P et les fonctions $f(t)$, $g(t)$, alors, si $f(t)$ et $g(t)$ ont pour limites généralisées respectives F et G, les fonctions $Pf(t)$, $f(t)+g(t)$ ont pour limites généralisées respectives PF et F + G; B. la convergence ordinaire entraîne la convergence généralisée avec la même limite.

Ceci étant, on voit que les énoncés 2° et 3° subsistent quand on remplace la limite ordinaire par la limite généralisée.

Remarque. — Les conditions A et B sont, par exemple, vérifiées par la définition suivante appliquée à des fonctions continues (ou même simplement sommables sur tout intervalle fini) : $f(t)$ converge au sens généralisé vers l si le rapport $\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}$ converge au sens ordinaire quand $x \to +\infty$. Et d'ailleurs, dans ce cas, il en est de même quand on remplace a par un nombre b quelconque; la limite généralisée l est indépendante de a, car on a

$$\frac{\int_b^x f(t)\,dt}{x-b} = \frac{\int_b^a f(t)\,dt}{x-b} + \frac{x-a}{x-b}\,\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}.$$

Condition (T). — Il est intéressant de chercher parmi les solutions de (F_r) de la forme (8) celles pour lesquelles la condition (T) est vérifiée. Elle devient ici

$$1 = \sum_k \varphi_{jk}(s,\, t) = \sum_k \sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t)$$

ou

$$\sum_i a_{ji}(s)\, c_i(t) = 1 \tag{18}$$

avec

$$c_i(t) = \sum_k b_{ki}(t).$$

D'ailleurs le déterminant $d(s)$ des $a_{ji}(s)$ étant supposé $\neq 0$, les équations (18) donnent

$$c_i(t) = \frac{1}{d(s)} \sum_k \mathrm{A}_{ki}(s) = \sum_k b_{ki}(s) = c_i(s).$$

Ainsi, il faut que les quantités $c_i(t)$ se réduisent à des nombres c_i indépendants de t, et que l'on ait

$$1 = \sum_i c_i a_{ji}(s).$$

Réciproquement, supposons les $a_{ji}(s)$ arbitraires sauf : 1° que leur déterminant $d(s)$ soit $\neq 0$; 2° qu'il existe des nombres indépendants de s, c_i, tels que

$$\sum_i c_i a_{ji}(s) = 1 \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Alors, on tire de ces équations comme plus haut

$$\sum_k b_{ki}(s) = c_i$$

et par suite

$$1 = \sum_i \left[\sum_k b_{ki}(t) \right] a_{ji}(s) = \sum_k \sum_i a_{ji}(s) b_{ki}(t) = \sum_k \varphi_{ik}(s, t).$$

L'ensemble des conditions 1°, 2° est donc nécessaire et suffisant pour assurer la condition

$$(\mathrm{T}) \qquad \sum_k \varphi_{ik}(s, t) = 1 \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Il est clair que $c_1, \ldots c_r$ ne peuvent être tous nuls. Si, par exemple, $c_r \neq 0$, on voit que pour assurer la condition 2°, il suffira de prendre les $a_{jr}(s)$ tels que

$$a_{jr}(s) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{i=r-1} c_i a_{ji}(s)}{c_r} \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

On peut aussi assurer la condition (T) d'une autre façon en profitant de l'indétermination du système des a, b. On a vu qu'on pouvait lui substituer un système α, β au moyen des formules (12), (13). Si (T) est vérifié, il y devra y avoir un système de constantes c_i, c'_h telles que

$$\sum_i c_i a_{ji}(s) = 1 = \sum_h c'_h \alpha_{jh}(s) = \sum_i a_{ji}(s) \sum_h c'_h \gamma_{hi}.$$

Comme $\sum_i c_i a_{ji}(s) = 1$, il suffit de prendre les c'_h tels que

$$c_i = \sum_h c'_h \gamma_{hi}.$$

Choisissons les c'_h.

Pour qu'on ait $c'_1 = 1$, $c'_2 = \ldots = c'_r = 0$, il suffit de prendre $\gamma_{1i} = c_i$. Si donc (T) est vérifiée, on pourra, — en prenant les $\gamma_{1i} = c_i$ (les c_i ne peuvent être tous nuls), puis les $\gamma_{ji} (j \neq 1)$ de sorte que le déterminant des γ soit $\neq 0$, puis en déterminant les δ_{ki} au moyen des γ et enfin les α, β au moyen des a, b, γ, δ, — mettre φ_{jk} sous la forme (11) avec $\alpha_{j1}(s) \equiv 1$. D'où

$$\varphi_{jk}(s, t) = \beta_{1k}(t) + \sum_{i=2}^{i=r} \alpha_{ji}(s) \beta_{ik}(t).$$

D'ailleurs, le système des α, β étant biorthogonal et normé par rapport aux seconds indices, on aura

$$\sum_j \alpha_{j1}(s) \beta_{jh}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 1 \\ 0 & \text{si } h \neq 1. \end{cases}$$

D'où

$$\sum_j \beta_{j1}(s) = 1, \qquad \sum_j \beta_{jh}(s) = 0, \qquad \text{pour } h \neq 1.$$

Par suite

$$\sum_k \varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \left[\alpha_{ji}(s) \sum_k \beta_{ki}(t) \right] = 1.$$

En résumé, *pour qu'une solution des équations simultanées* (F_r) *et* (L) *vérifie la condition* (T). $\sum_k \varphi_{jk}(s, t) = 1$, *il faut et il suffit que l'on puisse choisir l'une des manières de la mettre sous la forme* (11) *de façon que les* $\alpha_{j1}(s)$ *soient tous identiques à* 1, les α et β continuant à former un système biorthogonal et normé [et les α, β seront continues si la solution $\varphi_{jk}(s, t)$ est continue].

Le comportement asymptotique des solutions continues du système (F_r), (L) donne lieu à quelques remarques quand la condition (T) est vérifiée par ces solutions.

Tout d'abord si les $\varphi_{jk}(s, t)$ ont des limites $\varphi_{jk}(s)$ lorsque t croît indéfiniment, ces limites vérifieront évidemment aussi la condition, limite de (T) :

$$\sum_k \varphi_{jk}(s) = 1, \tag{19}$$

remarque évidente mais parfois très importante.

On voit aussi qu'on aura

$$\varphi_{jk}(s) = \sum_i \varphi_{ji}(s, u)\,\varphi_{ik}(u). \tag{20}$$

Si, en outre, les $\varphi_{jk}(s)$ sont des quantités $\varphi_k(s)$ indépendantes du premier indice, l'égalité précédente devient

$$\varphi_k(s) = \varphi_k(u)\sum_i \varphi_{ji}(s, u) = \varphi_k(u).$$

Ainsi *lorsqu'une solution continue* $\varphi_{jk}(s, t)$ *du système* (F_r), (L), (T) *converge quand t croît indéfiniment vers une limite indépendante du premier indice j, cette limite est aussi indépendante de la première variable s.*

D'ailleurs, *réciproquement*, si une solution continue $\varphi_{jk}(s, t)$ du système (F_r), (L) converge quand t croît indéfiniment vers une limite φ_k indépendante à la fois du premier indice j et de la première variable s, alors *ou bien cette limite est nulle quel que soit k, ou bien la solution* $\varphi_{jk}(s, t)$ *vérifie la condition* (T). Car l'égalité (20) devient

$$\varphi_k\left[1 - \sum_i \varphi_{ji}(s, u)\right] = 0.$$

Remarques sur les solutions non négatives. — Lorsque la solution $\varphi_{jk}(s, t)$ de (F_r) vérifie à la fois les conditions (T) et

$$\varphi_{jk}(s, t) \geqq 0, \tag{P}$$

on a aussi nécessairement $\varphi_{jk}(s, t) \leqq 1$. On en déduit (p. 260, formule 17) que, dans ce cas, si $D(s, t)$ reste $\neq 0$, alors quelle que soit la représentation (11) de $\varphi_{jk}(s, t)$, les $\beta_{ki}(t)$ restent bornés quand $t \to +\infty$.

De la même manière, on montre que les $\alpha_{ji}(s)$ sont bornés quand $s \to -\infty$. Par contre, ils peuvent être soit bornés, soit non bornés, quand $s \to +\infty$. On a en revenant aux notations a, b

$$(21) \qquad a_{ji}(s) = \frac{B_{ji}(s)}{D(s)} = B_{ji}(s)\, d(s)$$

les déterminants $B_{ji}(s)$ formés avec des termes $b_{ji}(s)$ qui restent bornés, quand $s \to +\infty$ restent aussi bornés. Pour que l'un au moins des $a_{ji}(s)$ ne soit pas borné, il suffit donc que $d(s)$ ne le soit pas. Inversement, il va de soi que si les termes $a_{ji}(s)$ sont bornés leur déterminant $d(s)$ sera borné. Ainsi : la condition nécessaire et suffisante pour que l'un au moins des $a_{ji}(s)$ ne soit pas borné quand $s \to +\infty$ est que leur déterminant $d(s)$ ne le soit pas non plus.

On voit l'importance du comportement de $d(s)$ quand $s \to +\infty$. Or on peut préciser celui-ci quand les conditions (P), (T) sont vérifiées. Commençons par examiner le déterminant $D(s, t)$ des $\varphi_{jk}(s, t)$.

D'une façon générale, si les termes u_{jk} d'un déterminant vérifient les conditions

$$u_{jk} \geqq 0, \qquad \sum_k u_{jk} \leqq 1,$$

la valeur absolue de ce déterminant est $\leqq 1$. En effet, les mêmes conditions seront vérifiées par les mineurs de ce déterminant. Si donc la propriété énoncée, évidemment vraie pour un déterminant d'ordre 2, est vraie pour les déterminants d'ordre $< r$, on aura en développant un déterminant Δ d'ordre r une expression de la forme

$$\Delta = \sum_k u_{jk} U_{jk},$$

et le déterminant U_{jk}, d'ordre $r - 1$, sera en valeur absolue $\leqq 1$. D'où

$$|\Delta| \leqq \sum_k |u_{jk}| \leqq 1.$$

Il en résulte que pour toute solution $\varphi_{jk}(s, t)$ de (F_r) vérifiant les conditions (P), (T), on aura

$$|D(s, t)| \leqq 1.$$

Si de plus pour cette solution $D(s, t)$ reste $\neq 0$, on aura

$$1 = D(s, s) = d(s)\,D(s),$$

d'où

$$D(s, t) = \frac{d(s)}{d(t)}$$

et enfin

$$\left|\frac{d(s)}{d(t)}\right| \leqq 1.$$

Ainsi, pour toute solution $\varphi_{jk}(s, t)$ de (F_r) vérifiant les conditions (P), (T) et dont le déterminant $D(s, t)$ reste $\neq 0$, la fonction $|d(s)|$ est positive et non décroissante.

Si, en outre, les $\varphi_{jk}(s, t)$ sont continues, $D(s, t)$ reste > 0, et $d(s)$ a un signe constant. En changeant au besoin de signe les $a_{i2}(s)$ par exemple [de sorte qu'on peut laisser les $a_{i1}(s) \equiv 1$] et en changeant en conséquence les $b_{ji}(t) = \frac{A_{ji}(t)}{d(t)}$, les $\varphi_{jk}(s, t)$ ne sont pas changés et $d(s)$ étant ainsi changé de signe pourra être supposé > 0.

En résumé, *si $\varphi_{jk}(s, t)$ est une solution continue de (F_r) qui vérifie les conditions (L), (P), (T), elle peut être mise sous la forme (9) où les $a_{ji}(s)$ sont des fonctions continues, bornées quand $s \to -\infty$, ou les $a_{j1}(s) \equiv 1$, où le déterminant $d(s)$ des $a_{ji}(s)$ est une fonction positive non décroissante de s, et où les termes $b_{ji}(t) = \frac{A_{ji}(t)}{d(t)}$ sont bornés quand $t \to +\infty$.*

Solution continue la plus générale de (F_r) vérifiant les conditions (L), (T), (P) *dans le cas où $r = 2$.* — Par exemple, si $r = 2$, on pourra toujours poser en vertu de (T)

$$\alpha_{11}(s) = 1, \qquad \alpha_{21}(s) = 1, \qquad \alpha_{12}(s) = -a(s), \qquad \alpha_{22}(s) = b(s);$$

on aura, en vertu des conditions d'orthogonalité des α, β,

$$d(s) = b(s) + a(s),$$

$$\beta_{11}(t) = 1 - \frac{a(t)}{d(t)}, \qquad \beta_{12}(t) = -\frac{1}{d(t)}, \qquad \beta_{21} = +\frac{a(t)}{d(t)}, \qquad \beta_{22}(t) = \frac{1}{d(t)},$$

d'où

$$
(22)\quad \begin{cases} \varphi_{11}(s,t) = 1 - \dfrac{a(t)-a(s)}{d(t)}, & \varphi_{12}(s,t) = \dfrac{a(t)-a(s)}{d(t)}, \\[2mm] \varphi_{21}(s,t) = \dfrac{b(t)-b(s)}{d(t)}, & \varphi_{22}(s,t) = 1 - \dfrac{b(t)-b(s)}{d(t)}. \end{cases}
$$

Pour $r = 2$, si les $\varphi_{jk}(s, t)$ sont continues et si la condition (L) et la condition (T) sont remplies, les φ_{jk} sont de cette forme avec $d(t)$ constamment $\neq 0$, donc $d(t)$ d'un signe constant. On peut supposer $d(s) > 0$, car si $d(s)$ était < 0, il suffirait de poser $a_1(s) = -a(s)$, $b_1(s) = -b(s)$ et alors $d_1(s) = -d(s)$ serait > 0.

Si l'on veut, de plus, que les $\varphi_{jk}(s, t)$ soient tous $\geqq 0$ et $\leqq 1$, il suffit, en vertu de (T), d'écrire qu'ils sont $\geqq 0$. Il faut d'abord $\varphi_{12} \geqq 0$ et $\varphi_{21} \geqq 0$, donc que $a(t) \geqq a(s)$ et $b(t) \geqq b(s)$ pour $s \leqq t$: autrement dit, $a(s)$ et $b(s)$ sont non décroissantes.

Les conditions nécessaires déjà formulées sont alors suffisantes. En effet pour $\varphi_{11} \geqq 0$, il suffit que $[b(t) + a(s)] \geqq 0$ et pour $\varphi_{22} \geqq 0$, que $b(s) + a(t) > 0$.

Or

$$b(t) + a(s) = [b(t) - b(s)] + d(s)$$

et

$$b(s) + a(t) = d(s) + [a(t) - a(s)]$$

et ces deux seconds membres sont $\geqq 0$ quand on suppose $d(s)$ toujours > 0 et les deux fonctions $a(s)$, $b(s)$ non décroissantes.

Ainsi les solutions continues les plus générales de l'application aux probabilités en chaîne sont données dans le cas de $r = 2$ *par les formules* (22) *où* $d(s) = b(s) + a(s)$ *et où* $a(s)$, $b(s)$ *sont des fonctions continues non décroissantes dont la somme reste positive.*

Il est d'ailleurs facile dans ce cas de déterminer l'allure asymptotique de $\varphi_{jk}(s, t)$ lorsque $t \to +\infty$.

En effet, les fonctions $a(t)$, $b(t)$ étant non décroissantes tendent chacune vers une limite finie ou vers $+\infty$. Or

$$\varphi_{11}(s,t) + \varphi_{12}(s,t) = 1 = \varphi_{21}(s,t) + \varphi_{22}(s,t),$$

$$\varphi_{21}(s,t) + \varphi_{12}(s,t) = 1 - \frac{d(s)}{d(t)},$$

$$\varphi_{11}(s,t) + \varphi_{22}(s,t) = 1 + \frac{d(s)}{d(t)}.$$

Pour que $d(t)=a(t)+b(t)$ ait une limite finie C quand $t\to+\infty$, il faut et il suffit que $a(t)$ et $b(t)$ tendent respectivement vers des limites finies que nous appellerons A et B.

Si $d(t)\to C$, alors $a(t)\to A$, $b(t)\to B$, et l'on voit immédiatement que l'on a

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_{11}(s,t)=\frac{B-a(s)}{B+A},\qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi_{12}(s,t)=\frac{A-a(s)}{B+A},$$
$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_{21}(s,t)=\frac{B-b(s)}{B+A},\qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi_{22}(s,t)=\frac{A+b(s)}{A+B}.$$

La limite de $\varphi_{jk}(s,t)$ n'est d'ailleurs jamais indépendante du premier indice dans le cas actuel.

Si $d(t)\to+\infty$, on voit que, dans tous les cas, les quatre sommes

$$\varphi_{11}(s,t)+\varphi_{22}(s,t),\quad \varphi_{21}(s,t)+\varphi_{22}(s,t),$$
$$\varphi_{21}(s,t)+\varphi_{12}(s,t),\quad \varphi_{11}(s,t)+\varphi_{22}(s,t)$$

tendent vers l'unité. Mais il peut se trouver que $a(t)$ ou $b(t)$ ait une limite finie, on a donc les cas suivants :

$$a(t)\to A,\quad b(t)\to+\infty;\quad a(t)\to+\infty,\quad b(t)\to B;\quad a(t)\to+\infty,\quad b(t)\to+\infty.$$

Dans les deux premiers cas les $\varphi_{jk}(s,t)$ ont encore des limites déterminées :

$$\left.\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right\}\ (\text{si } b(t)\to+\infty);$$
$$\left.\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\ (\text{si } a(t)\to+\infty).$$

La limite de $\varphi_{jk}(s,t)$ est dans le cas actuel indépendante de j et de s.

Enfin si $a(t)$ et $b(t)$ tendent simultanément vers l'infini, et si $\varphi_{21}(s,t)$ et $\varphi_{12}(s,t)$ ont chacun une limite, les égalités

$$\frac{b(t)}{d(t)}=\varphi_{21}(s,t)+\frac{b(s)}{d(t)},$$
$$\frac{a(t)}{d(t)}=\varphi_{12}(s,t)+\frac{a(s)}{d(t)}$$

montrent que $\frac{b(t)}{d(t)}$ et $\frac{a(t)}{d(t)}$ tendent vers des limites respectives β et α (avec $\alpha+\beta=1$). Et réciproquement, cela suffit pour que les $\varphi_{jk}(s, t)$ convergent; avec

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{11}(s, t) = \beta = \lim_{t \to +\infty} \varphi_{21}(s, t),$$
$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{12}(s, t) = \alpha = \lim_{t \to +\infty} \varphi_{22}(s, t).$$

La limite de $\varphi_{jk}(s, t)$ est donc encore dans ce cas indépendante de j et de s.

On peut résumer ce qui précède en disant :

Pour que les quatre fonctions $\varphi_{jk}(s, t)$ convergent quand t croît indéfiniment, il faut et il suffit que la courbe plane $x = a(t)$, $y = b(t)$ soit bornée quand t croît ou que sa branche infinie, quand t croît, possède une direction asymptotique déterminée.

Pour que, dans ce cas, la limite de $\varphi_{jk}(s, t)$ soit indépendante de j (et alors nécessairement indépendante de s), il faut et il suffit que $d(t)$ tende vers $+\infty$ avec t.

Observons qu'on a, dans tous les cas,

$$\varphi_{11}(s, t) - \varphi_{21}(s, t) = \frac{d(s)}{d(t)} = \varphi_{22}(s, t) - \varphi_{12}(s, t).$$

Donc

$$\varphi_{11}(s, t) - \varphi_{21}(s, t) \quad \text{et} \quad \varphi_{22}(s, t) - \varphi_{12}(s, t)$$

convergent toujours vers une limite qui est nulle si $d(t) \to +\infty$ et qui est $\neq 0$ $\left(\text{et égale à } \frac{d(s)}{C} > 0\right)$ dans le cas contraire.

Donc, *si l'on attribue à chacune des quatre fonctions* $\varphi_{jk}(s, t)$ *une limite généralisée* (*satisfaisant aux conditions énoncées* p. 263), *la condition nécessaire et suffisante pour que, quand t croît, la limite généralisée de $\varphi_{jk}(s, t)$ soit indépendante de j* (*et alors indépendante de s*) *est que $d(t)$ tende vers $+\infty$ avec t.*

NOTE ADDITIONNELLE.

Solution la plus générale de l'équation fonctionnelle

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \mathbf{D}(s, t) = \mathbf{D}(s, u)\, \mathbf{D}(u, t) \qquad (s \leqq u \leqq t).$$

On a obtenu plus haut la solution *jamais nulle*, la plus générale de cette équation fonctionnelle, cette solution étant valable quand s, t varient à l'intérieur d'un intervalle ST fini ou non.

Passons maintenant à la recherche de la solution la plus générale (bornée ou non, mais partout finie) de l'équation (F_1) *quand on cesse de la supposer jamais nulle*. Il y a d'abord évidemment la solution $\equiv 0$ que nous écartons. Nous admettons donc qu'il existe au moins un couple s, t, ($s \leqq t$) tel que $D(s, t) \neq 0$.

Un premier cas est celui où aucun de ces couples n'est formé de nombres distincts. C'est-à-dire que $D(s, t) = 0$ pour $s < t$ et égal à 0 ou 1 (et au moins une fois égal à 1) pour $s = t$. Ce sera nécessairement une solution discontinue. Inversement *toute fonction définie de cette manière est évidemment une solution de* (F_1), quel que soit l'ensemble sur lequel $D(s, s) = 1$.

Il nous reste à chercher les solutions de (F_1) telles que $D(s, t)$ soit $\neq 0$ pour au moins un couple (s, t) avec $s < t$. Comme on a déjà obtenu la solution générale quand $D(s, t)$ est toujours $\neq 0$, on doit supposer qu'il existe aussi un couple (s', t'), tel que $D(s', t') = 0$.

Ceci étant, soit u_0 un point intérieur à un segment s, t ($s < u_0 < t$) tel que $D(s, t) \neq 0$. Alors $D(s, u_0) \neq 0$ et $D(u_0, t) \neq 0$. Soient S la borne inférieure des s tels que $D(s, u_0) \neq 0$ et $s < u_0$, T la borne supérieure des t tels que $D(u_0, t) \neq 0$ et $u_0 < t$ (S peut être $-\infty$, T peut être $+\infty$), on aura $S < u_0 < T$. Il est clair que si (s, t) est un intervalle *intérieur* à (S, T), on aura $D(s, t) \neq 0$. Et si s est un point *intérieur* à (S, T), on aura non seulement aussi $D(s, s) \neq 0$, mais encore $D(s, s) = 1$. Appelons un intervalle tel que ST, *un intervalle rouge*.

Il est clair que s'il y a plusieurs intervalles rouges, ils ne peuvent chevaucher et n'ont, au plus, deux à deux, qu'une extrémité commune. Ils forment donc une suite finie ou dénombrable d'intervalles $J_k \equiv (S_k, T_k)$.

D'après une remarque faite plus haut, il y a pour chaque J_k une fonction $A_k(s)$ finie et $\neq 0$ pour $S_k < s < T_k$, telle que

$$D(s, t) = \frac{A_k(t)}{A_k(s)}$$

pour ($S_k < s < T_k$).

Pour sortir de l'intérieur de J_k, posons encore $A_k(s) = 1$

pour $s < S_k$ et pour $s > T_k$, et enfin

$$A_k(S_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(S_k, u_k) = 0, \\ \dfrac{1}{D(S_k, u_k)} & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$$A_k(T_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u_k, T_k) = 0, \\ D(u_k, T_k) & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

[u_k étant le point intérieur à $S_k T_k$ choisi déjà pour définir $A_k(s)$ à l'intérieur de cet intervalle, comme u_0 pour ST].

Alors $A_k(s)$ est une fonction partout finie et $\neq 0$ et le rapport

$$D_k(s, t) = \frac{A_k(t)}{A_k(s)}$$

est aussi partout fini et $\neq 0$. On a

$$D_k(s, t) = D(s, t) \qquad \text{pour} \quad S_k < s \leqq t < T_k$$

et

$$D_k(s, t) = 1 \qquad \text{pour} \quad s \leqq t < S_k \text{ ou } T_k < s \leqq t \text{ ou } s < S_k < T_k < t.$$

Or s appartient à deux J_k au plus, t appartient à deux J_k au plus. En mettant à part au plus quatre intervalles rouges quand s et t sont donnés, tout autre intervalle rouge $S_k T_k$ est tel que

$$\begin{aligned} s \leqq t &< S_k < T_k, \\ S_k < T_k &< s \leqq t, \\ s < S_k &< T_k < t, \end{aligned}$$

et l'on a $D_k(s, t) = 1$.

Il en résulte que le produit fini ou infini

$$\Delta(s, t) = D_1(s, t) D_2(s, t) \ldots D_k(s, t) \ldots,$$

ne comprend aucun terme nul et comprend au plus quatre termes $\neq 1$. C'est donc un produit fini ou convergent. De plus, si $D(s, t) \neq 0$, s, t appartiennent à l'un, J_l, des J_k et si $S_l < s \leqq t < T_l$, on a

$$D_k(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq l \\ D(s, t) & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Donc

$$D(s, t) = \Delta(s, t)$$

quand $D(s, t) \neq 0$.

Enfin, $\Delta(s, t)$ est une solution de (F_1). Car, les A_k étant $\neq 0$, on peut écrire

$$\Delta(s, u)\Delta(u, t) = \Pi\left[\frac{A_k(u)}{A_k(s)}\right]\Pi\left[\frac{A_k(t)}{A_k(u)}\right] = \Pi\frac{A_k(t)}{A_k(s)} = \Delta(s, t).$$

Posons alors

$$\delta(s, t) = \frac{D(s, t)}{\Delta(s, t)}.$$

Il est clair que $\delta(s, t)$ est bien déterminé et fini pour tout couple $(s, t)(s < t)$ et que c'est une solution de (F_1), comme Δ et D. Mais $\Delta(s, t)$ est une solution toujours $\neq 0$, alors que $\delta(s, t)$ est nul en même temps que $D(s, t)$.

On a donc mis $D(s, t)$ sous la forme d'un produit de deux solutions de (F_1) de natures différentes :

$$D(s, t) = \Delta(s, t)\,\delta(s, t).$$

D'une part, $\Delta(s, t)$ étant toujours $\neq 0$ peut être mis sous la forme

$$\Delta(s, t) = \frac{U(t)}{U(s)},$$

où $U(t)$ est partout fini et $\neq 0$.

D'autre part, $\delta(s, t)$ présente les caractéristiques suivantes :

$\delta(s, t) = 1$ quand (s, t) est intérieur à un intervalle rouge;

$\delta(s, t) = 0$ quand s et t n'appartiennent pas à un même intervalle rouge.

Restent les cas où s, t appartiennent à un même intervalle rouge S_kT_k mais sans lui être tous deux intérieurs. On a, par exemple,

$$S_k = s \leqq t \leqq T_k,$$

ou

$$S_k \leqq s \leqq t = T_k.$$

Considérons d'abord le cas où $S_k = s < t < T_k$. On a

$$\delta(S_k, t) = 0 \quad \text{si} \quad D(S_k, t) = 0.$$

Lorsque $D(S_k, t) \neq 0$, alors

$$\Delta(S_k, t) = \Pi_l D_l(S_k, t).$$

Tout intervalle J_l est sans point commun avec (S_k, t) ou identique à J_k ou identique à J_j, en désignant par J_j un intervalle rouge, s'il en existe, dont l'extrémité droite coïncide avec S_k. Alors tous les $D_l(S_k, t)$ autres que $D_k(S_k, t)$ et — éventuellement — $D_j(S_k, t)$ sont égaux à 1.

Calculons d'abord

$$D_k(S_k, t) = \frac{A_k(t)}{A_k(S_k)}.$$

Comme $D(S_k, t) \neq 0$ et qu'on a

$$D(S_k, t) = D(S_k, u_k)\, D(u_k, t)$$

ou

$$D(S_k, u_k) = D(S_k, t)\, D(t, u_k),$$

avec $D(u_k, t) \neq 0$ ou $D(t, u_k) \neq 0$, on aura aussi $D(S_k, u_k) \neq 0$ et, par suite,

$$A_k(S_k) = \frac{1}{D(S_k, u_k)}.$$

D'après la définition de $A_k(t)$ (p. 249), on a donc

$$D_k(S_k, t) = D(S_k, t),$$

que $u_k - t$ soit $\geqq 0$ ou $\leqq 0$.

Alors, ou bien il n'existe pas d'intervalle rouge J_l contigu à J_k en S_k, et dans ce cas

$$\Delta(S_k, t) = D_k(S_k, t) = D(S_k, t),$$

ou bien on a

$$\Delta(S_k, t) = D(S_k, t)\, D_j(S_k, t).$$

Mais $D(u_j, u_k)$ est nécessairement nul, sans quoi la somme de J_j et de J_k serait un seul intervalle rouge. Donc

$$0 = D(u_j, u_k) = D(u_j, S_k)\, D(S_k, u_k),$$

avec $D(S_k, u_k) \neq 0$. Par suite,

$$D(u_j, T_j) \equiv D(u_j, S_k) = 0,$$

et alors

$$1 = A_j(T_j) = A_j(S_k), \qquad 1 = A_j(t), \qquad \text{d'où} \qquad D_j(S_k, t) = 1,$$

d'où encore

$$\Delta(S_k, t) = D(S_k, t),$$

et, par suite,

$$\delta(S_k, t) = 1.$$

Ainsi, pour $S_k < t < T_k$, on a

$$\delta(S_k, t) = 1$$

et de même

$$\delta(t, T_k) = 1.$$

On a donc aussi

$$\delta(S_k, T_k) = \delta(S_k, t)\,\delta(t, T_k) = 1.$$

Les seules valeurs de $\delta(s, t)$ qui restent à examiner sont celles telles que $\delta(S_k, S_k)$, $\delta(T_k, T_k)$, qui sont égales à o ou 1.

Finalement, la fonction $\delta(s, t)$ ne peut prendre que les valeurs o ou 1.

En résumé, *toute solution* (*continue ou non*) *de l'équation fonctionnelle* (F_1) *peut se mettre sous la forme du produit*

$$D(s, t) = \Delta(s, t)\,\delta(s, t),$$

de deux solutions de (F_1), *l'une* $\Delta(s, t)$, *qui n'est jamais nulle et peut se mettre sous la forme*

$$\Delta(s, t) = \frac{U(t)}{U(s)},$$

où $U(s)$ *est une fonction partout finie et* $\neq 0$, *l'autre* $\delta(s, t)$, *qui ne prend que les valeurs* o *ou* 1.

Il est clair que $\delta(s, t)$ aurait pu être directement défini comme $= 0$ si $D(s, t) = 0$ et à 1 si $D(s, t) \neq 0$; que, d'autre part, on aurait pu définir directement $\Delta(s, t)$ comme $= D(s, t)$ si $D(s, t) \neq 0$, et comme $\neq 0$ si $D(s, t) = 0$. Mais si, de cette façon, $\delta(s, t)$ est entièrement déterminé, $\Delta(s, t)$ ne l'est pas, et ce que nous avons fait a consisté à déterminer les valeurs encore indéterminées de $\Delta(s, t)$ quand $D(s, t) = 0$, et cela de sorte que $\Delta(s, t)$ vérifie (F_1).

On a obtenu la solution la plus générale en ce sens que, réciproquement, si $\Delta(s, t)$ et $\delta(s, t)$ sont deux solutions arbitraires de (F_1), leur produit est naturellement solution de (F_1); et nous voyons qu'on peut supposer $\Delta(s, t)$ partout $\neq 0$ et $\delta(s, t)$ constamment égal à o ou 1 (mais non nécessairement constant). Reste à voir comment construire les solutions $\Delta(s, t)$, $\delta(s, t)$ de la façon la plus générale.

Nous connaissons déjà la forme la plus générale de $\Delta(s, t)$, soit

$$\Delta(s, t) = \frac{U(s)}{U(t)},$$

où $U(s)$ est une fonction *arbitraire* mais *partout finie et* $\neq 0$.

En ce qui concerne la construction de $\delta(s, t)$, on a vu qu'il existe un nombre fini ou dénombrable d'intervalles I_k ne chevauchant pas et à l'intérieur desquels $\delta(s, t) = 1$. On pourra prendre *arbitrairement* la suite d'intervalles I_k, pourvu qu'ils ne chevauchent pas, poser $\delta(s, t) = 1$ quand (s, t) est intérieur à l'un quelconque de ces intervalles et poser $\delta(s, t) = 0$ quand s, t n'appartient pas entièrement à l'un de ces intervalles. Il reste à définir $\delta(s, t)$ quand s ou t ou s et t sont extrémités de l'un de ces intervalles. Si (s_k, t_k) est l'un d'eux, et si $s_k < s < t_k$, on prendra arbitrairement pour $\delta(s_k, s)$ la valeur 0 ou 1, mais cette valeur sera indépendante de s. De même, on prendra arbitrairement pour $\delta(s, t_k)$ la valeur 0 ou la valeur 1, mais la même quel que soit $s (s_k < s < t_k)$. Alors la valeur de $\delta(s_k, t_k)$ prise égale à $\delta(s_k, s)$ $\delta(s, t_k), (s_k < s < t_k)$ sera déterminée indépendamment de s. Seulement si deux intervalles $(s_j, t_j (s_k, t_k)$ ont une extrémité commune $t_j = s_k$ et si $s_i < s < t_j = s_k < t < t_k$, on prendra

$$\delta(s, t_j)\,\delta(s_k, t) = \delta(s, t) = 0.$$

Enfin, les quantités $\delta(s_k, s_k)$ et $(\delta t_k, t_k)$ seront prises égales à 1 si $\delta(s_k, t_k) = 1$; dans le cas contraire, elles seront prises arbitrairement égales à 0 ou 1.

Nous avons pu former *la solution la plus générale* (continue ou non, jamais nulle ou non, mais partout finie) *de l'équation fonctionnelle* (F_1). Bien entendu, cette solution partout finie peut n'être pas bornée.