

# BULLETIN DE LA S. M. F.

CAMILLE JORDAN

**Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus  
dans les groupes linéaires**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 5 (1877), p. 175-177

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1877\\_\\_5\\_\\_175\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__175_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires ; par M. Camille JORDAN.*

(Séance du 27 juin 1877.)

Soient  $n$  un nombre premier impair ;  $\theta$  une racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité ;  $x_0, \dots, x_{n-1}$  des variables distinctes. Les substitutions

$$\theta = \begin{vmatrix} x_p & \theta x_p \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} x_p & \theta^p x_p \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} x_p & x_{p+1} \end{vmatrix}$$

ont pour déterminant 1, et, combinées ensemble, fourniront un groupe G d'ordre  $p^3$  dont les substitutions ont pour forme générale

$$\theta^e \mathbf{A}^a \mathbf{B}^b = \begin{vmatrix} x_p & \theta^{ap+e} x_{p+b} \end{vmatrix}.$$

Cherchons à construire le groupe H formé par les substitutions de déterminant 1 qui sont permutables à G.

Ce groupe contient, outre les substitutions  $\theta$ , A, B, la suivante :

$$C = \begin{vmatrix} x_p & \theta^{-\frac{p(p+1)}{2}} x_p \end{vmatrix},$$

laquelle transforme  $\theta$ , A, B en  $\theta$ , A, AB; et la substitution

$$D = \begin{vmatrix} x_p & a \sum \theta^{pm} x_m \end{vmatrix},$$

qui les transforme en  $\theta$ , B,  $A^{-1}$  (le coefficient  $a$  étant choisi de telle sorte que D ait pour déterminant 1).

Il est aisé de voir que H est dérivé des seules substitutions  $\theta$ , A, B, C, D, et a pour ordre  $(n^2 - 1)n^4$ .

En effet, soit  $s$  une substitution de H. Elle devra transformer A en une substitution de la forme  $\theta^\rho A^\alpha B^\beta$ , où  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  peuvent varier de zéro à  $p - 1$ . D'ailleurs  $\alpha$  et  $\beta$  ne peuvent s'annuler à la fois; car une substitution de la forme  $\theta^\rho$ , étant échangeable à toute substitution linéaire, ne pourrait être la transformée de A.

D'autre part, on vérifie immédiatement qu'en combinant les substitutions A, B, C, D on peut obtenir une substitution  $S'$  qui transforme A en  $\theta^\rho A^\alpha B^\beta$ , quels que soient  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , pourvu qu'on n'ait pas à la fois  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ .

Le nombre des transformées distinctes de A par les substitutions de H sera donc  $(n^2 - 1)n$ ; et l'on aura  $S = TS'$ , T étant une nouvelle substitution de H, échangeable à A.

Cette substitution T transformera  $\theta$ , A, B en  $\theta$ , A,  $\theta^\sigma A^\gamma B^\delta$ . On a d'ailleurs l'équation

$$AB = \theta BA,$$

laquelle deviendra, après la transformation,

$$A \theta^\sigma A^\gamma B^\delta = \theta \cdot \theta^\sigma A^\gamma B^\delta \cdot A = \theta^{1-\delta} A \theta^\sigma A^\gamma B^\delta;$$

donc  $\delta = 1$ .

Or on déduit immédiatement de la combinaison de B et de C une substitution  $T'$  qui transforme  $\theta$ , A, B en  $\theta$ , A,  $\theta^\sigma A^\gamma B$ , quels que soient  $\sigma$  et  $\gamma$ ; donc le nombre des transformées distinctes de B par les substitutions de l'espèce T sera  $n^2$ , et l'on aura  $T = UT'$ , U étant une nouvelle substitution de H, échangeable à  $\theta$ , A, B, laquelle ne pourra évidemment être qu'une des  $n$  puissances de  $\theta$ .

Donc l'ordre de H sera bien égal à  $(n^2 - 1)n \cdot n^2 n$ , et ses sub-

stitutions, étant de la forme  $UT'S'$ , seront dérivées de  $\theta, A, B, C, D$ .

Si  $n$  était égal à 2, au lieu d'être premier impair, les substitutions  $A, B, C$  auraient pour déterminant  $-1$ ; mais, en multipliant leurs coefficients par  $i$ , on obtiendrait des substitutions de déterminant 1, auxquelles on pourrait appliquer les raisonnements précédents.

On peut étendre aisément ces résultats au cas où le nombre des variables ne serait plus  $n$ , mais une puissance de  $n$ . Supposons-le égal à  $p^2$ , par exemple, et désignons les variables par  $x_{pq}$ , où  $p$  et  $q$  varient de zéro à  $p-1$ .

Nous considérerons le groupe  $G$ , d'ordre  $p^5$ , dérivé des substitutions

$$\begin{aligned}\theta &= | x_{pq} \quad \theta x_{pq} |, \\ A &= | x_{pq} \quad \theta^p x_{pq} |, \quad A_1 = | x_{pq} \quad \theta^q x_{pq} |, \\ B &= | x_{pq} \quad x_{p+1,q} |, \quad B_1 = | x_{pq} \quad x_{p,q+1} |.\end{aligned}$$

Le groupe  $H$ , formé des substitutions de déterminant 1 permutable à  $G$ , sera dérivé des substitutions de  $G$ , jointes aux suivantes :

$$\begin{aligned}C &= | x_{pq} \quad \theta^{-\frac{p(p+1)}{2}} x_{pq} |, \quad C_1 = | x_{pq} \quad \theta^{-\frac{q(q+1)}{2}} x_{pq} |, \\ D &= | x_{pq} \quad \alpha \sum \theta^{pm} x_{mq} |, \quad D_1 = | x_{pq} \quad \alpha \sum \theta^{qm} x_{pm} |, \\ E &= | x_{pq} \quad x_{qp} |, \quad F = | x_{pq} \quad \theta^{pq} x_{pq} |,\end{aligned}$$

lesquelles transforment respectivement  $A, B, A_1, B_1$  en  $A, AB, A_1, B_1$ ;  $A, B, A_1, A_1 B_1$ ;  $B, A^{-1}, A_1, B_1$ ;  $A, B, B_1, A^{-1}$ ;  $A_1, B_1, A, B$ ;  $A, A_1 B, A_1, AB_1$ . Ces substitutions, combinées à celles de  $G$ , permettront : 1° de transformer  $A$  en l'une quelconque des  $(n^4 - 1)n$  substitutions de la forme  $\theta^\alpha A^\alpha B^\beta A^\gamma A^\delta$  (où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ne sont pas nuls à la fois); 2° puis, sans altérer  $A$ , de transformer  $B$  en l'une quelconque des  $n^4$  substitutions  $\theta^\alpha A^\alpha B A^\gamma B$ ; 3° puis, sans altérer  $A$  ni  $B$ , de transformer  $A_1$  en une quelconque des  $(n^2 - 1)n$  substitutions de la forme  $\theta^\alpha A^\alpha B^\beta$ ; 4° puis, sans altérer  $A, B, A_1$ , de transformer  $B_1$  en l'une quelconque des  $n^2$  substitutions  $\theta^\alpha A^\alpha B_1$ . Enfin les  $n$  puissances de  $\theta$  laisseront  $A, B, A_1, B_1$  invariables. L'ordre de  $H$  sera donc  $(n^4 - 1)n \cdot n^4 \cdot (n^2 - 1)n \cdot n^2 \cdot n$ .