BULLETIN DE LA S. M. F.

L.V. AHLFORS

Quelques propriétés des surfaces de Riemann correspondant aux fonctions méromorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 197-207

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__197_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURFACES DE RIEMANN CORRESPONDANT AUX FONCTIONS MÉROMORPHES (¹);

PAR M. L. V. AHLFORS.

1. Dans la théorie des fonctions uniformes, les investigations sont partagées entre deux problèmes principaux. L'un de ces problèmes a pour but d'étudier l'allure de la fonction même dans son domaine d'existence, l'autre consiste en la recherche des propriétés caractéristiques du domaine riemannien engendré par les valeurs de la fonction. C'est à ce dernier point de vue que je me placerai dans cette conférence. Ce que nous chercherons c'est donc uniquement les relations qu'il y a entre, d'une part, le domaine d'existence d'une fonction uniforme; d'autre part, le domaine riemannien correspondant. Par contre, nous laisserons de côté les propriétés pour ainsi dire métriques de la fonction elle-même.

Les fonctions inverses des fonctions uniformes peuvent être caractérisées comme des fonctions *univalentes*, bien que, en général, *multiformes*. L'univalence consiste en ce que les valeurs de la fonction correspondant à deux éléments de fonction différents sont toujours distinctes. Il s'ensuit non seulement que la fonction prend des valeurs différentes en des points différents, mais aussi que deux branches différentes prennent au même point des valeurs distinctes.

Désignons par $z(w)$ une telle fonction, et considérons l'ensemble des valeurs prises par cette fonction. Cet ensemble peut comprendre toutes les valeurs complexes; c'est un cas spécial où $z(w)$ est la fonction inverse d'une fonction rationnelle. En excluant ce cas il existe toujours une valeur que la fonction ne prend pas; nous pouvons supposer que ce soit la valeur infinie.

(¹) Conférence faite à la Sorbonne le 17 juin 1932.

Les fonctions $z(w)$ satisfaisant à ces conditions peuvent être classées en deux catégories bien différentes, suivant que l'infini est la seule valeur que la fonction ne prend pas, ou qu'il existe une valeur finie qui est également une valeur lacunaire de la fonction $z(w)$. Si le premier cas se présente nous dirons que la fonction $z(w)$ est du type *parabolique*, dans le second cas elle est dite du type *hyperbolique*. Toute fonction parabolique est la fonction inverse d'une fonction méromorphe ou entière dans tout le plan fini. Par contre, les fonctions hyperboliques sont les inverses des fonctions ayant au moins une singularité essentielle finie.

Au lieu de parler des fonctions paraboliques et hyperboliques on pourrait aussi considérer leurs surfaces de Riemann, et l'on aurait un classement de toutes les surfaces riemanniennes, qui sont « schlichtartig », en des surfaces paraboliques et hyperboliques. Seulement la notion de la fonction multiforme est infiniment plus simple que celle d'une surface de Riemann, qui *a priori* n'est pas rattachée à une fonction analytique, et c'est pourquoi je préfère introduire cette distinction entre les fonctions elles-mêmes plutôt qu'entre leurs surfaces de Riemann. En le faisant nous pourrons aussi nous passer des théorèmes profonds concernant l'uniformisation des fonctions analytiques, qui n'ont au fond rien de commun avec les questions élémentaires que nous traiterons ici.

2. La première question qui se pose à propos du type d'une fonction est la suivante :

Quelle doit être la distribution des singularités algébriques et transcendantes de la fonction $z(w)$ pour qu'elle soit du type parabolique, ou pour qu'elle soit du type hpperbolique ?

Ce problème est, ou devait être, le problème central dans la théorie des fonctions. Il est évident que sa solution complète nous donnerait, d'un seul coup, tous les théorèmes de caractère purement qualitatif sur les fonctions méromorphes. Après il serait probablement facile de trouver leurs généralisations au point de vue de la métrique, ou ce que M. Bloch appelle leur traduction en termes finis.

Malheureusement les résultats qu'on a obtenus sur ce sujet ne sont pas nombreux. En effet il y en a si peu, que je peux les énumérer ici à peu près tous. La tendance de ces théorèmes est toujours la suivante : *Une fonction admettant très peu de singularités est du type parabolique, tandis que les fonctions ayant beaucoup de singularités, et d'ordre élevé, sont du type hyperbolique.* Tous les théorèmes que nous allons énoncer précisent seulement de différentes manières cette idée générale.

Avant de passer à l'énumération des différentes conditions connues, il convient de faire une remarque importante. Puisque le plan parabolique (c'est-à-dire le plan complexe fini) est simplement connexe, il faut évidemment que la surface de Riemann d'une fonction parabolique soit aussi simplement connexe. Nous avons là une condition nécessaire pour le cas parabolique de nature purement topologique, qui est tout à fait différente des autres critères connus. Grâce à cette condition on pourrait se restreindre, dans le problème de la détermination des types, à la considération des surfaces simplement connexes. Toutefois, il faut admettre que la détermination effective de l'ordre de connexion d'une surface donnée présente de très grandes difficultés, et que le théorème en question est donc d'une utilité restreinte. En réalité, cette remarque revient seulement à ce que dans les conditions suffisantes pour le cas parabolique, il faut supposer expressément que la surface soit simplement connexe, tandis que dans les conditions suffisantes pour le cas hyperbolique une telle hypothèse est naturellement superflue.

3. Passons maintenant à l'énumération des conditions connues servant à la distinction entre le cas parabolique et le cas hyperbolique, en commençant par les conditions suffisantes pour le cas parabolique ([1]). Il y en a seulement deux, et tous les deux sont assez faibles, étant remplies seulement pour des fonctions qui sont, pour ainsi dire, très proches des fonctions algébriques. La surface de Riemann de la fonction $z(w)$ étant supposée simplement connexe, les deux conditions peuvent être énoncées de la manière suivante :

([1]) *Voir* pour cette énumération aussi R. Nevanlinna, *Ueber Riemansche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten* (*Acta math.*, t. 58, p. 298).

1° NEVANLINNA (1) : *Si la fonction $z(w)$ n'admet qu'un nombre fini de singularités algébriques ou logarithmiques différentes, elle est du type parabolique.*

2° AHLFORS (2) : *Supposons que la fonction $z(w)$ n'ait que des singularités algébriques, et soit $n(r)$ le nombre de ces singularités, comptées avec la multiplicité de leur ordre, qu'on peut atteindre d'un élément donné en prolongeant suivant un chemin de longueur inférieure à r. Pour que $z(w)$ soit une fonction parabolique, il suffit que l'intégrale*

$$\int^{\infty} \frac{dr}{rn(r)}$$

diverge.

Pour que cette condition soit remplie, il faut que les singularités algébriques soient très rares et d'ordre peu élevé.

Les conditions suffisantes pour le cas parabolique sont donc toutes d'une date récente et encore peu connues. Par contre, les conditions suffisantes pour le cas hyperbolique comprennent, comme cas particuliers, des théorèmes tout à fait classiques.

Citons d'abord la condition suivante, énoncée et démontrée d'une manière rigoureuse, pour la première fois, par M. Iversen, d'ailleurs dans une forme beaucoup plus précise que celle que je donne ici :

3° *Si l'une des branches de la fonction $z(w)$ admet une ligne singulière, cette fonction est du type hyperbolique.*

Deuxièmement, il faut citer le théorème sur l'étoile de M. Gross :

4° *Prenons un élément quelconque de la fonction $z(w)$ et prolongeons-le suivant tous les rayons issus du centre de cet élément. Si l'ensemble des directions dans lesquelles on trouve une singularité à distance finie est de mesure positive, la fonction $z(w)$ est hyperbolique.*

---

(1) *Loc. cit.*

(2) *Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 3, 2).

Ces deux théorèmes supposent que l'ensemble des points transcendants soit non dénombrable et s'appliquent, par conséquent, seulement dans des cas très compliqués. Les critères suivants sont d'une nature plus simple.

Le troisième critère suit, dans sa forme générale, des théorèmes généraux de M. Nevanlinna, sur les fonctions méromorphes.

5° *Considérons dans le plan des w les q points $a_1, \ldots, a_q$. Supposons que le point a_ν soit, pour toutes les branches de la fonction $z(w)$, ou une singularité transcendante ou bien un point critique algébrique d'ordre au moins égal à $m_\nu - 1$* (c'est-à-dire qu'il existe au moins m_ν déterminations de chaque branche qui se permutent autour de a_ν). *Alors, si les nombres m_ν satisfont à la condition*

$$\sum_1^q \frac{1}{m_\nu} < q - 2,$$

la fonction est hyperbolique.

Il y a essentiellement *cinq* systèmes de nombres satisfaisant à cette condition, à savoir :

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } q = 5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2 \\
\text{»} \quad q = 4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2,\ 2,\ 2,\ 3 \\
\text{»} \quad q = 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} 3,\ 3,\ 4 \\ 2,\ 4,\ 6 \\ 2,\ 3,\ 7 \end{array}\right.
\end{array}$$

toute autre condition étant comprise dans l'une de ces cinq.

Pour $q = 3$ il faut remarquer le cas spécial où les points a_1, a_2 et a_3 sont des points singuliers transcendants pour toutes les branches (correspondant aux nombres ∞, ∞, ∞). Ce cas particulier n'est autre chose que le théorème classique de M. Picard. Pour en tenir compte nous citerons le théorème 5 comme critère de Picard-Nevanlinna.

Le cas $q = 5$ est aussi particulièrement important. Il s'ensuit qu'il existe toujours, pour une fonction parabolique, une branche qui est régulière, dans l'un au moins de cinq points donnés.

La quatrième et dernière condition est due à M. Valiron.

M. Valiron a démontré la propriété suivante des fonctions paraboliques :

6° *Si $z(w)$ est une fonction parabolique, il existe dans le plan des w des cercles arbitrairement grands, où une branche de la fonction est partout régulière et par conséquent uniforme.*

Remarquons que ce théorème devient banal pour les fonctions inverses des fonctions méromorphes prenant effectivement la valeur infini. Par contre, il est d'une très grande portée pour les fonctions inverses des fonctions entières. Le théorème de Valiron est beaucoup plus connu dans son énoncé en termes finis, dû à M. Bloch.

4. Voilà tout ce qu'on sait à propos de notre problème de la détermination du type. Il faut admettre que ce n'est pas beaucoup, vu surtout la généralité restreinte de la plupart de ces théorèmes. Par exemple, le théorème de Picard-Nevanlinna est, malgré son importance, d'une nature très spéciale, puisqu'il exige que toutes les branches de la fonction soient ramifiées autour des mêmes points a_ν, propriété qui n'est plus vraie si l'on modifie la surface de Riemann de la fonction à l'aide d'une déformation continue, si légère que soit cette déformation. Quant au théorème de Valiron-Bloch il est plus général, mais par contre il s'applique seulement à des fonctions, dont la ramification est extrêmement rapide, bien qu'il soit évident qu'une ramification beaucoup plus modérée suffirait pour assurer le cas hyperbolique.

C'est M. Bloch qui dans son Mémoire intitulé *La conception actuelle de la théorie des fonctions entières et méromorphes* [1] a le premier reconnu l'insuffisance de ces résultats. En découvrant un nouveau principe important, qu'il appelle « principe de la continuité topologique », il a donné un moyen d'arriver à l'énoncé des propositions plus générales. Ce principe consiste en ce qu'*une proposition de nature qualitative, exacte avec un certain énoncé, demeure encore exacte si l'on modifie les données de la proposition, en leur faisant subir une déformation con-*

---

(1) *L'Enseignement mathématique*, 1926.

tinue. Bien entendu, il ne s'agit point d'un principe susceptible d'une démonstration rigoureuse, mais son rôle est seulement de faciliter les recherches et d'indiquer la voie par laquelle on pourrait espérer de trouver quelque chose de nouveau et de plus général. Encore faut-il dire que le principe ne peut servir qu'à l'énoncé des théorèmes nouveaux, mais nullement à leur démonstration. Au contraire, les difficultés d'une démonstration rigoureuse sont parfois insurmontables.

En appliquant le principe de Bloch au théorème de Picard-Nevanlinna, il est évident que les hypothèses de ce théorème peuvent être remplacées par des hypothèses moins spéciales. D'abord on pourrait faire varier les points de ramification a_ν des différentes branches librement à l'intérieur de certains *domaines* $G_1, \ldots, G_q$ extérieurs les uns aux autres, en supposant tout simplement que toute branche possède à l'intérieur du domaine G_ν un point de ramification d'ordre déterminé, sans fixer davantage sa position dans ce domaine. De plus, les points de ramification d'ordre supérieur à 1 peuvent être dissous en plusieurs points de ramification simples, tous situés à l'intérieur du même domaine G_ν. Ainsi un point de ramification d'ordre k pourrait être remplacé par k points de ramification simples. L'essentiel, c'est donc que toutes les branches de $z(w)$ définies dans G_ν forment des groupes de m_ν branches au moins, tels que toutes les branches d'un groupe sont liées entre elles à l'intérieur de G_ν.

On serait donc amené à la proposition suivante :

Considérons q domaines $G_1, \ldots, G_q$ *simplement connexes, extérieurs les uns aux autres, et supposons qu'en prolongeant une branche quelconque de la fonction* $z(w)$ *à l'intérieur de* G_ν *on trouve dans un point de ce domaine au moins* m_ν *déterminations différentes. Alors, si l'inégalité*

$$\sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu} < q - 2,$$

est satisfaite, la fonction est du type hyperbolique.

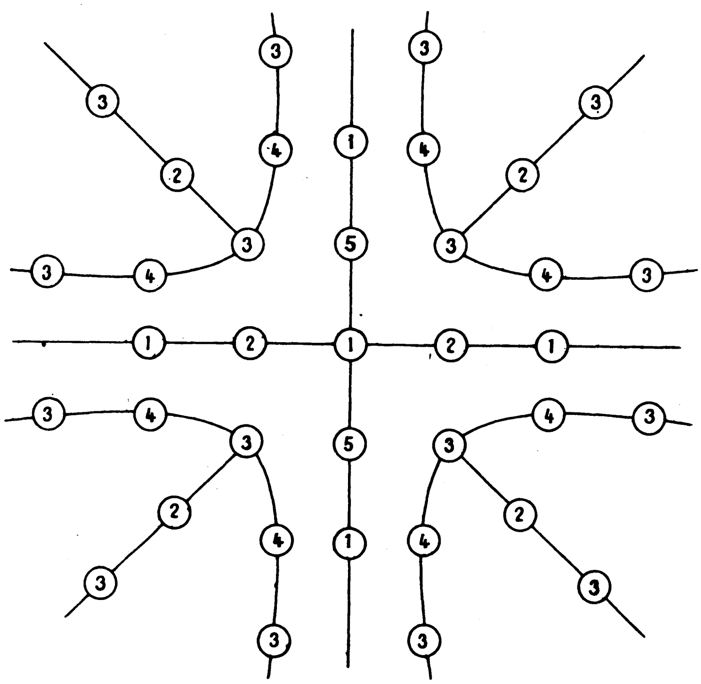
Cette proposition comprend naturellement les mêmes cinq cas différents que le théorème de Picard-Nevanlinna. J'ai réussi à trouver une méthode de démonstration qui permet d'établir séparément l'exactitude de la proposition dans tous ces cinq cas. Pour donner une idée de ma méthode, je vais indiquer brièvement la nature des considérations par lesquelles on peut arriver à ce résultat, en me bornant au cas le plus simple qui est celui où chaque branche de la fonction admet un point de ramification (simple ou multiple) à l'intérieur de chacun des cinq domaines $G_1, \ldots, G_5$.

Prenons dans le domaine G_ν un élément quelconque de la fonction $\overset{*}{z}(w)$ et prolongeons-le de toutes les manières possibles en restant toujours dans le même domaine G_ν. Les valeurs correspondantes prises par $z(w)$ forment, dans le plan des z, un certain domaine connexe que nous appelons Δ_ν. En recommençant avec des éléments différents, il sera en général possible de trouver une infinité dénombrable de domaines Δ_ν différents.

D'autre part, joignons les domaines $G_1, \ldots, G_5$ par des arcs c_ν dans un cycle fermé, et considérons dans le plan des z leurs courbes images γ_ν, qui joignent les différents domaines Δ. Ces domaines, ensemble avec les courbes γ_ν, forment un certain réseau, dont la structure est facile à déterminer. En effet, considérons un domaine Δ_1 quelconque. Puisque la branche correspondante de $z(w)$ a au moins deux déterminations différentes dans G_1, il existe deux courbes γ_1 partant de la frontière de Δ_1 et conduisant toutes deux à un domaine Δ_2. De chacun de ces domaines Δ_2 sort une nouvelle courbe γ_1 conduisant à un nouveau domaine Δ_1, et ainsi de suite. On obtient ainsi une chaîne illimitée de domaines Δ_1 et Δ_2 alternés, liés par des courbes γ_1. Cette chaîne sera désignée par $\Gamma_{1,2}$. D'autre part le domaine Δ_1 fait aussi partie d'une chaîne $\Gamma_{5,1}$, et l'on voit facilement que les deux chaînes n'ont qu'un seul domaine Δ_1 en commun, et qu'elles s'intersectent de telle manière que les deux buts d'une chaîne sont séparés par l'autre. La même construction peut être faite à partir d'un domaine Δ_ν quelconque.

Envisageons maintenant les quatre domaines angulaires, dans lesquels le plan des z est partagé par deux chaînes $\Gamma_{1,2}$ et $\Gamma_{5,1}$ se coupant dans un domaine Δ_1. Dans chacun de ces angles cherchons un domaine Δ_3 et formons les chaînes $\Gamma_{3,4}$ passant par ces domaines, et ensuite les chaînes $\Gamma_{2,3}$ bissectrices des angles extérieurs (*voir* la figure). Cela étant fait, choisissons encore dans chacun des huit angles obtenus un domaine Δ_5, construisons par ce domaine la chaîne $\Gamma_{5,4}$ et la chaîne bissectrice $\Gamma_{4,5}$. Ce procédé peut être continué indéfiniment.

La difficulté principale est maintenant de montrer qu'on peut



trouver les domaines Δ_3, Δ_5, Δ_7, ... successivement cherchés sans s'éloigner trop des sommets des angles respectifs. En effet la distance entre le sommet et le domaine cherché sera d'autant plus petite que l'angle considéré est mince, la largeur d'un « angle » étant définie par une certaine moyenne. Il s'ensuit, par un calcul assez facile, qu'il existe une suite d'angles intercalés, pour laquelle la somme de ces distances tendra vers une limite finie, de manière à engendrer à distance finie une singularité essentielle, ce qui montre que la fonction ne peut pas être parabolique. Voilà l'idée de la démonstration.

5. Quelles sont maintenant les conséquences de notre théorème

général? D'abord on voit tout de suite que le théorème contient une généralisation du théorème de Valiron-Bloch. En effet, d'après le premier cas de notre théorème, on peut se donner arbitrairement cinq cercles, ou même cinq domaines simplement connexes quelconques, extérieurs les uns aux autres, et l'on est sûr que toute fonction parabolique admet une branche uniforme dans l'un de ces domaines. Or, pour en déduire le théorème de Valiron, il suffit de prendre tous les cercles en dehors les uns des autres et de rayons supérieurs à un nombre donné. L'un de ces cercles sera alors un cercle d'uniformité pour une branche de la fonction. D'ailleurs notre théorème montre combien le choix d'un cercle d'uniformité est libre.

Ajoutons encore que notre théorème n'exige pas que les cinq cercles soient tous des cercles finis, mais on peut les choisir librement sur la sphère de Riemann de telle manière que l'un de ces cercles peut contenir le point à l'infini. Le théorème n'est donc pas, comme celui de M. Valiron, banal pour les fonctions méromorphes. Par contre, si l'on sait que $z(w)$ est l'inverse d'une fonction entière le résultat peut encore être précisé, car il suit alors du second cas de notre théorème général qu'il existe déjà parmi trois cercles finis un dans lequel une branche de la fonction reste uniforme. Le quatrième cercle peut en effet être choisi autour du point à l'infini et n'est certainement pas un cercle d'uniformité.

Les trois cas correspondant à $q = 3$ sont évidemment des généralisations directes du théorème de Picard. Ils comprennent comme cas particulier le théorème suivant, dont j'ai donné dans une Note (¹) une démonstration spéciale :

Étant donnés trois domaines simplement connexes G_1, G_2 *et* G_3, *extérieurs les uns aux autres, il existe une branche de la fonction parabolique* $z(w)$ *qui n'a qu'un nombre fini de déterminations à l'intérieur de l'un des trois domaines. Pour préciser, il existe une branche telle que le nombre des déterminations dans l'un des domaines est au plus égal à* 3.

Tous les résultats que j'ai énoncés peuvent être précisés au

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932, p. 245.

doint de vue de la métrique, ou traduits en termes finis pour employer l'expression de M. Bloch, ce qui suit immédiatement de leur démonstration. L'énoncé correspondant à notre théorème général sera évidemment :

Si la fonction $w = f(z)$ *est méromorphe dans un cercle* $|z| < R$, *pendant que sa fonction inverse satisfait à l'une des cinq conditions de notre théorème précédent, le rayon* R *de ce cercle doit satisfaire à une inégalité de la forme*

$$R = C : \frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2},$$

c'est-à-dire R *est inférieur à une certaine constante* C, *qui ne dépend que de la configuration des domaines* G_ν, *divisée par la valeur de la dérivée sphérique à l'origine.*

De ce théorème on peut ensuite tirer des limitations de la dérivée sphérique dans tout le cercle, une limitation de la fonction caractéristique de $f(z)$ et, si elle est régulière, de la fonction elle-même. Les théorèmes qu'on trouve sont des généralisations des théorèmes de Picard-Landau et de Schottky. D'autre part, le théorème donne aussi lieu à des nouveaux critères de familles normales et comme application de ces critères on trouve des théorèmes du genre Julia, des théorèmes sur les cercles de remplissage, etc. Si je n'insiste pas davantage sur ce point c'est parce que ces généralisations sont assez immédiates, mais aussi parce qu'elles sont, à mon avis, d'un moindre intérêt que le théorème original. Ces généralisations sont en effet sans importance pour le problème de la détermination du type d'une fonction, que je considère comme le problème central dans la théorie des fonctions méromorphes.