

# BULLETIN DE LA S. M. F.

F. LEJA

## **Sur une famille de séries trigonométriques doubles**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 59 (1931), p. 119-127

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1931\\_\\_59\\_\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__119_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE FAMILLE DE SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DOUBLES.

PAR M. F. LEJA.

1. Soient  $r$  et  $s$  deux nombres non négatifs assujettis à la relation

$$(1) \quad r + s = 1, \quad r \geq 0, \quad s \geq 0,$$

et  $\alpha$  et  $\beta$  deux variables réelles quelconques. Le but de cette Note est d'examiner la convergence <sup>(1)</sup> des séries trigonométriques doubles de la forme

$$(2) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu + \nu} e^{i(\mu\alpha + \nu\beta)},$$

où la sommation s'étend à tous les indices  $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$  à l'exception des indices  $\mu = \nu = 0$ .

Observons que, si la série (2) converge, la convergence ne peut pas être absolue car, si l'on pose

$$A_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu + \nu}$$

et

$$M = \min(m, n), \quad N = m + n,$$

on obtient les inégalités

$$(3) \quad \sum_{k=1}^M \frac{(r + s)^k}{k} \leq A_{mn} \leq \sum_{k=1}^N \frac{(r + s)^k}{k},$$

(1) Une série double  $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$  est dite convergente (au sens de M. Pringsheim)

si la suite double  $s_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu}$  tend vers une limite  $s$ , c'est-à-dire si à chaque  $\varepsilon > 0$  correspond un indice  $p$  tel qu'on ait  $|s_{mn} - s| < \varepsilon$  pour  $m > p$  et  $n > p$ .

d'où il suit d'après (1) que la suite  $A_{mn}$  tend vers l'infini avec  $m$  et  $n$ .

2. La série (2) reste dans une intime liaison avec la fonction analytique de deux variables

$$\ln \frac{1}{1-x-y},$$

dont le développement en série de Taylor a la forme suivante :

$$(4) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} \frac{x^{\mu} y^{\nu}}{\mu+\nu} \quad (\mu+\nu > 0).$$

Cette série converge absolument dans le domaine (1)

$$(5) \quad |x| + |y| < 1$$

et diverge dans le domaine complémentaire, ce qui résulte des inégalités (3) si l'on y pose  $|x| = r, |y| = s$ . Aux points frontières du domaine (5), où

$$x = r e^{i\alpha}, \quad y = s e^{i\beta} \quad (r+s=1),$$

la série (4) devient identique avec la série (2).

Je vais démontrer le théorème que voici :

THÉORÈME. — *Quels que soient  $r$  et  $s$  assujettis aux conditions (1) et les variables  $\alpha, \beta$ , où*

$$(6) \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta < 2\pi,$$

*la série trigonométrique (2) converge si*

$$(7) \quad r\alpha + s\beta > 0$$

*et diverge si*

$$r\alpha + s\beta = 0 \quad (?).$$

Avant de passer à la démonstration nous prouverons quelques

(1) Dans ce domaine la somme de la série (4) est égale à la valeur principale du

$$\ln \frac{1}{1-x-y}.$$

(2) Il est probable que ce théorème peut être généralisé aux séries trigonomé-

inégalités préliminaires. Posons  $a_{00} = 0$  et

$$(8) \quad a_{\mu\nu} = \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^\mu s^\nu}{\mu + \nu} \quad \text{pour } \mu + \nu > 0;$$

on peut montrer que :

Quels que soient  $r$  et  $s$ ,  $r + s = 1$ , on a

$$(9) \quad 0 \leq a_{\mu\nu} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu\nu(\mu + \nu)}} \quad \text{pour } \mu > 0, \nu > 0.$$

En effet, en vertu de la formule de Stirling

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} e^{\varepsilon_n},$$

où

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{8n},$$

on obtient de (8)

$$a_{\mu\nu} = \left(\frac{\mu + \nu}{\mu} r\right)^\mu \left(\frac{\mu + \nu}{\nu} s\right)^\nu \frac{\Lambda}{\sqrt{\mu\nu(\mu + \nu)}} \quad \text{si } \mu, \nu > 0,$$

où l'on a posé

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\varepsilon_{\mu+\nu} - \varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu}.$$

Or, si  $\mu$  et  $\nu$  sont fixes, la fonction de  $r$

$$g(r) = \left(\frac{\mu + \nu}{\mu} r\right)^\mu \left(\frac{\mu + \nu}{\nu} s\right)^\nu \quad (s = 1 - r)$$

atteint son maximum au point

$$r = \frac{\mu}{\mu + \nu}, \quad s = \frac{\nu}{\mu + \nu}$$

triques  $n$ -uples que voici :

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n)!}{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_n!} \cdot \frac{r^{\nu_1} r^{\nu_2} \dots r^{\nu_n}}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n} \cdot e^{i(\nu_1 \alpha_1 + \dots + \nu_n \alpha_n)},$$

où la sommation s'étend à tous les  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n = 0, 1, \dots$  pour lesquels  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n > 0$  et où  $r_k \geq 0, r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1$ .

Cette série semble être convergente si la somme  $r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_n \alpha_n$  est positive et divergente dans le cas contraire, étant supposé que  $0 \leq \alpha_k < 2\pi$ , pour  $k = 1, 2, \dots, n$ . Néanmoins la méthode dont je me sers plus bas n'est pas suffisante dans ce cas général.

donc on a  $g(r) \leq 1$ , quels que soient  $\mu, \nu, r$ . D'autre part, on a  $A < 1$  car  $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{8n}$ , donc les inégalités (9) sont vraies.

Nous aurons encore recours aux propriétés suivantes des expressions  $a_{\mu\nu}$  :

Si  $r$  et  $s$  sont positifs et fixes on a, quel que soit  $\mu = 0, 1, \dots$ ,

$$(10) \quad a_{\mu 0} < a_{\mu 1} < \dots < a_{\mu, \nu_\mu} \geq a_{\mu, \nu_\mu+1} > \dots > a_{\mu, \nu_\mu+k} > \dots$$

où l'on a posé (1)

$$(11) \quad \begin{cases} \nu_\mu = E\left(\frac{\mu s - 1}{r}\right), & \text{si } \frac{\mu s - 1}{r} \geq 0, \\ \nu_\mu = 0. & \text{si } \frac{\mu s - 1}{r} < 0. \end{cases}$$

Cela résulte immédiatement de (8). D'autre part, la série simple

$$(12) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu, \nu_\mu},$$

où  $r$  et  $s$  sont supposés positifs et fixes, est toujours convergente.

En effet, on a d'après (9)

$$0 \leq a_{\mu, \nu_\mu} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu \nu_\mu (\mu + \nu_\mu)}};$$

donc, étant en vertu de (11)

$$\nu_\mu > \frac{\mu s - 1}{r} - 1 = \mu \frac{s}{r} - \frac{1+r}{r},$$

on a pour  $\mu > \frac{1+r}{s}$

$$\begin{aligned} a_{\mu, \nu_\mu} &< \frac{1}{\sqrt{\mu \left(\mu \frac{s}{r} - \frac{1+r}{r}\right) \left(\mu \frac{1}{r} - \frac{1+r}{r}\right)}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{\mu^3}} \frac{r}{\sqrt{\left(s - \frac{1+r}{\mu}\right) \left(1 - \frac{1+r}{\mu}\right)}}, \end{aligned}$$

d'où résulte la convergence de la série (12).

#### 4. Démonstration du théorème. — Considérons deux nombres

---

(1)  $E(x)$  = le plus grand entier ne surpassant pas  $x$ .

fixes  $\alpha$  et  $\beta$  satisfaisant à l'inégalité (6), et supposons que la somme (7) soit positive et, par suite, qu'un des produits  $r\alpha$  ou  $s\beta$  soit positif. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que

$$(13) \quad s\beta > 0.$$

Posons

$$b_{\mu\nu} = e^{i(\mu\alpha + \nu\beta)}$$

et

$$B_{\mu\nu} = b_{\mu 0} + b_{\mu 1} + \dots + b_{\mu\nu} = e^{i\mu\alpha} \frac{1 - e^{i(\nu+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}};$$

donc on a, quels que soient  $\mu, \nu = 0, 1, \dots$ ,

$$(14) \quad |B_{\mu\nu}| < M.$$

où  $M$  est un nombre fixe, ne dépendant pas des  $\mu, \nu$ .

En vertu de (13) et (1) on a  $0 < s \leq 1$ . Si  $s = 1$ , on a  $r = 0$  et la série double (2) se réduit à la série simple

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{i\beta\nu}}{\nu},$$

bien connue, qui est convergente car  $0 < \beta < 2\pi$ . Supposons que  $0 < s < 1$  et, par suite, que  $0 < r < 1$ .

Les sommes partielles de la série (2)

$$s_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^\mu s^\nu}{\mu + \nu} e^{i(\mu\alpha + \nu\beta)} \quad (\mu + \nu > 0)$$

peuvent être écrites comme il suit

$$s_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} b_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} (B_{\mu\nu} - B_{\mu\nu-1})$$

ou

$$(15) \quad s_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{n-1} B_{\mu\nu} (a_{\mu\nu} - a_{\mu, \nu+1}) + \sum_{\mu=0}^m B_{\mu n} a_{\mu n}.$$

Or, la suite double

$$(16) \quad v_{mn} = \sum_{\mu=0}^m B_{\mu n} a_{\mu n}$$

tend vers zéro, si  $m$  et  $n \rightarrow \infty$ , car, d'après (14) et (8), on a

$$|v_{mn}| < M \frac{s^n}{n} \sum_{\mu=0}^m \binom{\mu + n - 1}{n - 1} r^\mu < M \frac{s^n}{n} \frac{1}{(1-r)^n},$$

d'où

$$|v_{mn}| < \frac{M}{n},$$

car  $1 - r = s$ . D'autre part, la suite double

$$(17) \quad u_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{n-1} B_{\mu\nu}(a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1})$$

est convergente car la série double

$$(18) \quad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu\nu}(a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1})$$

converge absolument. En effet, d'après (14), on a

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} |B_{\mu\nu}(a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1})| < M \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1}|$$

et d'après (10), on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1}| \leq 2a_{\mu,\nu_{\mu}};$$

donc la convergence absolue de la série (18) résulte de la convergence de la série (12). Il s'ensuit que la suite double (15) tend vers une limite dans le cas  $r\alpha + s\beta > 0$ .

Supposons maintenant qu'on ait  $r\alpha + s\beta = 0$ . Si l'on a  $r > 0$  et  $s > 0$ , on doit avoir  $\alpha = \beta = 0$  et dans ce cas la série (2) diverge en vertu de l'inégalité (3). D'autre part, si  $r = 0$ ,  $s = 1$ , on doit avoir  $\beta = 0$  et dans ce cas la série (2) se réduit à la série simple  $\sum \frac{1}{\nu}$  donc le théorème est démontré.

5. Il est facile de trouver la somme de la série (2). J'avais démontré ailleurs <sup>(1)</sup> que :

*Si une série entière double*

$$(19) \quad f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} :$$

---

(1) Voir ce Journal, t. 57, 1929, p. 72-77.

1° converge absolument dans le domaine

$$\{|x| < |x_0|, |y| < |y_0|\},$$

2° converge au point  $(x_0, y_0)$  et 3° si toutes les limites <sup>(1)</sup>

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup \left| \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} \right| \quad (\nu = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \sup \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} y^{\nu} \right| \quad (\mu = 0, 1, \dots)$$

sont finies, on a toujours

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x_0^{\mu} y_0^{\nu} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(xy).$$

Il suit de cette proposition que, si les conditions (1) sont remplies, on a, quels que soient  $r, s, \alpha$  et  $\beta$  satisfaisant à (6) et (7),

$$(20) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu + \nu} e^{i(\mu\alpha + \nu\beta)} = \ln \frac{1}{1 - r e^{i\alpha} - s e^{i\beta}},$$

où le terme de la série (20) correspondant aux indices  $\mu = \nu = 0$  est supposé être égal à zéro, et la partie imaginaire  $I$  du logarithme satisfait aux inégalités

$$-\pi < I \leq \pi.$$

Des deux séries réelles

$$(21) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu + \nu} \cos(\mu\alpha + \nu\beta) \quad (\mu + \nu > 0),$$

$$(22) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu + \nu} \sin(\mu\alpha + \nu\beta) \quad (\mu + \nu > 0),$$

convergentes si  $r\alpha + s\beta > 0$ , la seconde converge aussi dans le cas  $r\alpha + s\beta = 0$  vers la somme  $= 0$ . La somme de la série (21) est

(1) Où  $x$  doit rester dans le domaine  $\left\{ |x| < |x_0|, \frac{|x_0 - x|}{|x_0| - |x|} < \alpha \right\}$  et  $y$  dans le domaine  $\left\{ |y| < |y_0|, \frac{|y_0 - y|}{|y_0| - |y|} < \beta \right\}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des nombres  $\geq 1$  quelconques, mais finis.

égale à

$$\ln \frac{1}{2 \sqrt{r \sin^2 \frac{\alpha}{2} + s \sin^2 \frac{\beta}{2} - rs \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}}},$$

et celle de la série (22) est égale à l'argument  $\varphi$  de l'expression

$$\frac{(1 - r \cos \alpha - s \cos \beta) + i(r \sin \alpha + s \sin \beta)}{\sqrt{(1 - r \cos \alpha - s \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha + s \sin \beta)^2}}.$$

où  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

6. En terminant, je vais donner une application de notre théorème :

Le domaine de la convergence absolue d'une série entière double (19) est constitué par l'ensemble des points  $(x, y)$  satisfaisant à une certaine inégalité de la forme

$$(23) \quad |y| < \varphi(|x|) \quad \text{pour } |x| < R,$$

où  $\varphi(r)$  est une fonction positive non croissante, dépendant des coefficients  $a_{\mu\nu}$  de la série (19), et  $R$  est un nombre positif fini ou infini. J'ai démontré ailleurs <sup>(1)</sup> que, si  $\varphi(r) = \text{const.}$  dans un intervalle  $0 \leq r < R_0 \leq R$ , l'ensemble des points de divergence de la série (19) situés sur la partie

$$|y| = \varphi(|x|), \quad |x| < R_0,$$

de la frontière du domaine (23) n'a jamais de points isolés <sup>(2)</sup>.

Il s'élève la question, si la frontière du domaine (23) jouit de la même propriété dans le cas où  $\varphi(r)$  est une fonction décroissante.

Or, la réponse est négative. En effet, considérons la série entière double

$$(24) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{2^{\mu+\nu}}{(\mu + \nu)^2} x^{2\mu} y^{2\nu},$$

où le terme constant est supposé être égal à zéro. Cette série converge absolument à l'intérieur et sur la frontière de la sphère

<sup>(1)</sup> *Księga I Pol. Zjazdu Matem.* (Supplément aux *Annales de la Soc. polon. de Mathém.*, 1929, p. 127.)

<sup>(2)</sup> Bien que l'ensemble des points de convergence,  $y$  situés, peut avoir des points isolés.

à quatre dimensions

$$(25) \quad |x|^2 + |y|^2 < \frac{1}{2}$$

et diverge à son extérieur, ce qui résulte immédiatement de l'identité

$$\sum_{\mu+\nu=1}^n \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} \frac{2^{\mu+\nu}}{(\mu+\nu)^2} x^{2\mu} y^{2\nu} = \sum_{k=1}^n \frac{[2(x^2+y^2)]^k}{k^2}.$$

La sphère (25) est située avec sa frontière à l'intérieur du domaine

$$(26) \quad |x| + |y| < 1$$

excepté la variété à deux dimensions

$$(27) \quad x = \frac{1}{2} e^{i\alpha}, \quad y = \frac{1}{2} e^{i\beta} \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ quelconques}),$$

qui est située en même temps sur la frontière de la sphère (25) et sur celle du domaine (26).

D'après le paragraphe 2, la série

$$(28) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} \frac{x^{\mu} y^{\nu}}{\mu+\nu}$$

converge absolument à l'intérieur et sur la frontière de la sphère (25), à l'exception de la variété (27). Elle converge aussi, mais non absolument, sur la variété (27), excepté le seul point  $x = y = \frac{1}{2}$ , en lequel elle est divergente.

Considérons la série entière double égale à la somme des séries (24) et (28). Il suit de ce qui précède que :

1° *Le domaine de la convergence absolue de cette nouvelle série est identique avec la sphère (25) et que :*

2° *Cette série converge sur la variété frontière (à trois dimensions)*

$$|x|^2 + |y|^2 = \frac{1}{2}$$

*partout, à l'exception du seul point  $x = y = \frac{1}{2}$  en lequel elle est divergente.*

---