BULLETIN DE LA S. M. F.

J. CHAZY

Sur l'effet pendule sphérique dans l'expérience du pendule de Foucault

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 100-104
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__100_0>

SUR L'EFFET PENDULE SPHÉRIQUE DANS L'EXPÉRIENCE DU PENDULE DE FOUCAULT;

PAR M. JEAN CHAZY.

Les théories qu'on donne dans les Cours de Mécanique rationnelle sont insuffisantes pour expliquer complètement l'expérience de Foucault, et les expériences analogues faites avec des pendules d'un mètre de longueur, parce que dans ces expériences l'amplitude des oscillations ne peut être considérée comme très petite. On remarque cependant que dans l'expérience de Foucault la rotation des axes de l'ellipse, que nous appellerons l'*effet pendule sphérique*, est de sens direct comme la révolution sur l'ellipse, et ne saurait en rien expliquer la rotation rétrograde observée de ces axes. Mais *a priori* l'effet pendule sphérique pourrait être une fraction importante de cette rotation et la diminuer notablement, et, au contraire, si la révolution sur l'ellipse et l'effet pendule sphérique étaient rétrogrades, cet effet pourrait masquer la rotation due à la force centrifuge composée. Or l'on peut ajouter précisément que *dans l'expérience de Foucault l'effet pendule sphérique est une fraction extrêmement petite de la rotation rétrograde observée.* Ce résultat est nécessairement contenu (¹) dans les théories complètes données de l'expérience de Foucault; je voudrais le démontrer ici par un calcul qui sans doute ne peut trouver place dans un cours oral, mais cependant relativement simple.

Nous considérons l'angle Θ, variation de l'azimut du pendule quand il passe du parallèle inférieur au parallèle supérieur, et qui est donné en fonction du rayon l de la sphère et des cotes α et β de ces deux parallèles extrêmes, comptées à partir du centre

(¹) *Voir* notamment TISSERAND, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. 5, 1881, p. 453.

positivement vers le haut, par la formule connue [1]

$$2\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2l\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)(l-\alpha)(l-\beta)}\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)[(\alpha+\beta)z-l^2+\alpha\beta]}}.$$

Et nous allons mettre en évidence *le développement le plus direct de l'élément d'intégration suivant les puissances de la variable* $z+l$. Faisons le changement de variables

$$z+l=u, \qquad \alpha+l=u_0, \qquad \beta+l=u_1,$$

et développons cet élément suivant les puissances de u, pour arriver finalement au développement de l'angle θ suivant les puissances des nouvelles cotes u_0 et u_1. Remarquons que le dernier facteur placé sous le radical du dénominateur est égal à

$$(\alpha+\beta)(z+l)+(l-\alpha)(l-\beta).$$

L'expression considérée devient

$$2\theta = \int_{u_0}^{u_1} \frac{2l\sqrt{u_0u_1(2l-u_0)(2l-u_1)}\,du}{u(2l-u)\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)[(-2l+u_0+u_1)u+(2l-u_0)(2l-u_1)]}},$$

puis, selon les transformations,

$$\frac{(2l-u_0)(2l-u_1)+(-2l+u_0+u_1)u}{(2l-u_0)(2l-u_1)} = 1+\frac{(-2l+u_0+u_1)u}{2l(2l-u_0-u_1)+u_0u_1}$$

$$= 1-\cfrac{\cfrac{u}{2l}}{1+\cfrac{\cfrac{u_0u_1}{4l^2}}{1-\cfrac{u_0+u_1}{2l}}},$$

$$2\theta = \sqrt{u_0u_1}\int_{u_0}^{u_1}\frac{du}{u\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)}}\left(1-\frac{u}{2l}\right)^{-1}\left[1-\cfrac{\cfrac{u}{2l}}{1+\cfrac{\cfrac{u_0u_1}{4l^2}}{1-\cfrac{u_0+u_1}{2l}}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Il est évident d'abord, sous cette nouvelle forme, que les deux derniers facteurs de l'élément d'intégration sont tous deux supé-

---

[1] *Cf.* APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 1, 3e édition, 1909, p. 513.

rieurs à l'unité: car u_0, u_1 et, selon une propriété classique,

$$2l - u_0 - u_1 = -(\alpha + \beta)$$

sont positifs. Par suite l'angle 2Θ est supérieur à l'expression

$$\sqrt{u_0 u_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)}},$$

qui, par le changement de variables

$$u = \frac{1}{v}, \qquad u_0 = \frac{1}{v_0}, \qquad u_1 = \frac{1}{v_1},$$

devient

$$\int_{v_1}^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{(v-v_1)(v_0-v)}} = \pi.$$

D'où l'inégalité

$$\Theta > \frac{\pi}{2},$$

et la démonstration ainsi obtenue n'est *pas* sensiblement plus longue que telle autre démonstration de la même inégalité.

Exprimons maintenant la différence $2\Theta - \pi$. On voit qu'en fonction de u les deux derniers facteurs de l'élément d'intégration figurant dans l'expression considérée de 2Θ admettent respectivement comme points singuliers les deux points $u = 2l$ et

$$u = 2l\left(1 + \frac{\frac{u_0 u_1}{4l^2}}{1 - \frac{u_0 + u_1}{2l}}\right).$$

Cette seconde quantité est positive comme $2l$ et supérieure à $2l$. Donc les deux facteurs et leur produit sont développables en séries entières en u convergentes dans le cercle $|u| = 2l$.

Par intégration la différence $2\Theta - \pi$ sera d'abord le produit du facteur $\sqrt{u_0 u_1}$ par une série entière en les variables u_0 et u_1, dont les coefficients contiennent des puissances de l'expression

$$\frac{1}{1 + \frac{\frac{u_0 u_1}{4l^2}}{1 - \frac{u_0 + u_1}{2l}}}.$$

Mais cette expression est elle-même développable en série entière en $u_0 u_1$ et $u_0 + u_1$ si ces deux quantités sont assez petites. Au total la différence $2\Theta - \pi$ est le produit du facteur $\sqrt{u_0 u_1}$ par la somme d'une série entière, d'ailleurs symétrique, en les deux variables u_0 et u_0; soit, si l'on réduit cette série au terme constant et aux termes de degrés 1 et 2,

$$2\Theta = \pi + \frac{3\pi\sqrt{u_0 u_1}}{4l}\left[1 + \frac{5}{16}\,\frac{u_0 + u_1}{l} + \frac{35(u_0^2 + u_1^2) + 2u_0 u_1}{256\,l^2}\cdots\right].$$

Si l'on met en évidence, au lieu des cotes u_0 et u_1, les rayons b et a des parallèles inférieur et supérieur, selon les relations

$$b^2 = u_0(2l - u_0), \qquad a^2 = u_1(2l - u_1),$$

on obtient encore

$$2\Theta = \pi + \frac{3\pi ab}{8l^2}\left[1 + \frac{9(a^2 + b^2)}{32\,l^2} + \ldots\right];$$

$2a$ et $2b$ seront les axes de l'ellipse qui par approximation semblera tourner dans le plan horizontal.

Par suite, dans l'expérience de Foucault, la vitesse angulaire de l'effet pendule sphérique résulte sensiblement du second terme de la *dernière expression* de 2Θ, terme calculé déjà ([1]) par Resal, et, en fonction de la vitesse ω de révolution sur l'ellipse, comme la différence $2\Theta - \pi$ correspond à une demi-révolution, a pour valeur

$$\frac{3\omega ab}{8l^2}.$$

Le rapport de cette vitesse à la vitesse ω_1 du mouvement rétrograde dû à la force centrifuge composée est

$$\frac{\omega}{\omega_1}\,\frac{3ab}{8l^2} = \frac{a}{b}\,\frac{3ab}{8l^2} = \frac{3a^2}{8l^2},$$

puisque le rapport $\frac{\omega}{\omega_1}$ est égal au rapport $\frac{a}{b}$ des axes de l'ellipse. En définitive le rapport des deux vitesses angulaires est inférieur à $\frac{8}{1000}$.

([1]) *Traité de Mécanique générale*, t. I, 1873, p. 187.

Plus généralement, et par exemple dans les expériences faites avec les pendules d'un mètre de longueur, où l'on est amené nécessairement à donner au rapport $\frac{a}{l}$ des valeurs plus grandes, *l'effet pendule sphérique*, en raison de la présence du facteur $\sqrt{u_0 u_1}$, *reste très petit, quand la quantité u_0 est extrêmement petite, même si la quantité u_1 est finie :* c'est-à-dire pourvu que le pendule passe à chaque oscillation tout près de la verticale du point de suspension, même si aux extrémités des oscillations il s'écarte d'un angle fini de cette verticale. En d'autres termes la différence $2\Theta - \pi$, considérée en fonction de u_0, est nulle pour $u_0 = 0$, et fonction continue pour cette valeur.

Le même calcul s'applique au développement de l'intervalle de temps correspondant à l'angle Θ, en une série double en u_0 et u_1, ou en a et b, dont le terme constant est nécessairement $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$, et qui pour $u_0 = 0$ se ramène à la série classique du pendule circulaire.