

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HAAG

## **La théorie du spiral et ses applications à la chronométrie**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 58 (1930), p. 60-89

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1930\\_\\_58\\_\\_60\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__60_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LA THÉORIE DU SPIRAL ET SES APPLICATIONS A LA CHRONOMÉTRIE;

PAR M. J. HAAG.

## I. — Théorie générale.

1. *Énoncé mathématique du problème.* — Rapportons le spiral à deux axes rectangulaires liés à la montre et dont l'origine O est sur l'axe du balancier. L'origine des arcs étant le point A d'encastrement avec le piton, appelons  $s$  l'abscisse curviligne d'un point courant quelconque M,  $\varphi$  l'angle polaire de la tangente en ce point et  $x, y$  ses coordonnées. Le balancier étant écarté de l'angle  $\theta$  de sa position d'équilibre, désignons par X, Y les composantes de la réaction d'encastrement exercée par la virole et par  $\frac{EI}{L}\theta + N$  le moment résultant de cette réaction et du couple d'encastrement par rapport à O. Le couple N sera appelé *couple complémentaire*.

En affectant de l'indice zéro les quantités correspondant à l'état naturel<sup>(1)</sup>, on sait que l'équation fondamentale de la déformation est

$$(1) \quad \frac{d(\varphi - \varphi_0)}{ds} = \frac{\theta}{L} + \frac{N - xY + yX}{EI}.$$

L'angle  $\theta$  ayant une valeur donnée, il s'agit de déterminer les trois constantes X, Y, N et les trois fonctions de  $\varphi, x, y$  de  $s$ , de telle manière que l'équation (1) soit vérifiée indistinctement, ainsi que les suivantes :

$$(2) \quad x = a + \int_0^s \cos \varphi ds, \quad y = b + \int_0^s \sin \varphi ds,$$

où  $a$  et  $b$  désignent les coordonnées du point A.

En outre, il existe des conditions aux limites.

---

(1) Nous supposons que cet état naturel est réalisé pour  $\theta = 0$ , ce qui arrive toujours si le spiral a été bien posé.

D'abord, on doit avoir

$$(3) \quad \varphi - \varphi_0 = 0, \quad \text{pour } s = 0,$$

à cause de l'encastrement au pignon.

L'encastrement à la virole exige ensuite que l'on ait, pour  $s = L$ ,

$$(4) \quad \varphi - \varphi_0 = 0,$$

$$(5) \quad x = x_B = x_{0B} \cos \theta - y_{0B} \sin \theta, \quad y = y_B = x_{0B} \sin \theta + y_{0B} \cos \theta,$$

où  $x_{0B}$ ,  $y_{0B}$  désignent les coordonnées du point d'encastrement B avec la virole, dans la position d'équilibre.

2. *Calcul des réactions, connaissant la forme du spiral.* — Supposons connue la forme exacte  $\Gamma$  du spiral et proposons-nous de calculer  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ .

Nous avons d'abord, en intégrant (1) de 0 à  $s$ ,

$$(6) \quad \varphi = \varphi_0 + \theta \frac{s}{L} + \frac{s}{EI} (N - \xi Y + \eta X),$$

où  $\xi$ ,  $\eta$  désignent les coordonnées du centre de gravité de l'arc  $s$  dans sa forme actuelle.

Pour  $s = 0$ , on obtient identiquement la condition (3). Pour  $s = L$ , il vient, en tenant compte de (4),

$$(7) \quad N = \xi_1 Y - \eta_1 X,$$

où  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  désignent les coordonnées du centre de gravité G du spiral entier (1).

Les conditions (5) s'écrivent enfin

$$(8) \quad x_B = a + \int_0^L \cos \varphi \, ds, \quad y_B = b + \int_0^L \sin \varphi \, ds.$$

Il s'agit de tirer  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  du système (7), (8).

3. Considérons, dans la formule (6),  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  comme des

(1) La formule (7) montre que l'on pourrait supprimer le couple complémentaire à condition d'appliquer la réaction d'encastrement au point G et non au point B.

variables indépendantes et  $\xi, \eta$  comme des fonctions données et continues de  $s$ . Posons, pour simplifier l'écriture,

$$(9) \quad z = z_0 + 0 \frac{s}{L}, \quad \varepsilon = \frac{s}{\Gamma L} (N - \xi Y + \eta X).$$

Les équations (8) s'écrivent

$$x_R - a = \int_0^L \cos(z + \varepsilon) ds, \quad y_R - b = \int_0^L \sin(z + \varepsilon) ds.$$

Posons maintenant

$$(10) \quad u = x_R - a = \int_0^L \cos z ds, \quad v = y_R - b = \int_0^L \sin z ds.$$

Les équations ci-dessus deviennent

$$(11) \quad u = \int_0^L [\cos(z + \varepsilon) - \cos z] ds, \quad v = \int_0^L [\sin(z + \varepsilon) - \sin z] ds.$$

Je dis que les seconds membres sont des *fonctions entières* de  $X, Y, N$ .

On a, par exemple,

$$(12) \quad \cos(z + \varepsilon) - \cos z = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^h}{h!} \cos\left(z + h \frac{\pi}{2}\right).$$

La série qui est au second membre est convergente quels que soient  $z$  et  $\varepsilon$ . D'autre part, les variables  $X, Y, N$  ayant des valeurs complexes quelconques, la variable  $\varepsilon$  a un module qui est une fonction continue de  $s$ . Si  $s$  varie de 0 à  $L$ , ce module admet une certaine limite supérieure  $M$ . Donc, dans tout cet intervalle, la série (12) est majorée par la série convergente  $\sum \frac{M^h}{h!}$ . Il s'ensuit qu'elle est uniformément convergente et peut être intégrée terme à terme, par rapport à  $s$ , entre 0 et  $L$ . On obtient ainsi un développement de la première intégrale (11) suivant les puissances de  $X, Y, N$  et ce développement est convergent quelles que soient les valeurs complexes attribuées à ces variables. Il constitue donc bien une fonction entière, que nous appellerons  $F(X, Y, N)$ . Le même raisonnement s'applique à la seconde intégrale, que nous appellerons  $G(X, Y, N)$ .

Les équations (11) s'écrivent alors

$$(13) \quad F(X, Y, N) = u, \quad G(X, Y, N) = v.$$

Considérons maintenant  $u$  et  $v$  comme des variables indépendantes.

Le système (7), (13) définit  $X, Y, N$  comme fonctions implicites de  $u, v$ , soit

$$(14) \quad X = f(u, v), \quad Y = g(u, v), \quad N = h(u, v).$$

Je dis que ces fonctions sont holomorphes au voisinage des valeurs définies par les formules (10), pourvu que les fonctions de  $s$  par lesquelles nous avons tout à l'heure remplacé  $\xi$  et  $\eta$  soient assez voisines des valeurs qu'elles ont effectivement sur la courbe  $\Gamma$ .

Pour le prouver, il suffit de faire voir que le jacobien du système est différent de zéro, quand on y remplace  $X, Y, N$  par les valeurs qu'ont effectivement ces réactions et les fonctions  $\xi, \eta$  par les valeurs qu'elles ont effectivement sur  $\Gamma$ .

On a, d'après (6),

$$\frac{\partial F}{\partial X} = - \int_0^L \sin \varphi \frac{s \eta}{EI} ds.$$

Mais, la valeur actuellement attribuée à  $\varphi$  est exactement égale à l'angle polaire de la tangente à  $\Gamma$ . On peut donc écrire

$$\int_0^L s \eta \sin \varphi ds = \int_A^B s \eta dy = [s \eta y]_A^B - \int_0^L y^2 ds = L(\eta_1 y_1 - q_1^2),$$

en appelant  $Lq_1^2$  le moment d'inertie du spiral par rapport à  $Ox$ , calculé avec une densité linéaire égale à un.

On peut répéter un calcul analogue pour les autres dérivées partielles, en introduisant le moment d'inertie  $Lp_1^2$  par rapport à  $Oy$  et le produit d'inertie  $Ln_1$ . Finalement, le jacobien s'écrit, au facteur  $\left(\frac{L}{EI}\right)^2$  près,

$$J = \begin{vmatrix} q_1^2 - y_1 \eta_1 & \xi_1 y_1 - n_1 & \eta_1 - y_1 \\ x_1 \eta_1 - n_1 & p_1^2 - x_1 \xi_1 & x_1 - \xi_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1^2 & -n_1 & \eta_1 \\ -n_1 & p_1^2 & -\xi_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 & 1 \end{vmatrix},$$

en utilisant des combinaisons de lignes évidentes.

Au facteur  $\left(\frac{L}{EI}\right)^3$  près, ce déterminant n'est autre que le discriminant de la forme quadratique

$$(15) \quad W_1 = \frac{L}{EI} (q_1^2 X^2 + p_1^2 Y^2 + N^2 - 2n_1 XY + 2\eta_1 NX - 2\xi_1 NY),$$

que j'ai introduite dans un précédent Mémoire <sup>(1)</sup>. Cette forme quadratique s'écrit, d'autre part,

$$(16) \quad W_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L (N - xY + yX)^2 ds.$$

Elle ne peut s'annuler que si l'on a identiquement

$$N - xY + yX = 0.$$

Si le spiral n'est pas rectiligne, ceci n'est possible que pour  $X = Y = N = 0$ . On en conclut que  $W_1$  est une forme quadratique définie positive. Donc, son discriminant n'est pas nul.

C. Q. F. D.

4. *Continuité des fonctions  $f, g, h$  par rapport aux fonctions  $\xi, \eta$ .* — Supposons qu'on fasse varier infiniment peu les fonctions  $\xi$  et  $\eta$  servant à définir  $\varepsilon$ . Il revient au même de dire qu'au lieu de les calculer sur la courbe  $\Gamma$ , on les calcule sur une courbe voisine  $\Gamma'$ . Convenons, par exemple, que l'écart entre ces deux courbes est de l'ordre d'une certaine quantité constante  $\alpha$ , jouant le rôle d'infiniment petit principal. Ceci veut dire que les coordonnées de deux points  $M$  et  $M'$ , ayant même abscisse curviligne  $s$  sur  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , diffèrent par des quantités de la forme  $\alpha f(s)$ ,  $f(s)$  désignant une fonction finie dans l'intervalle  $(0, L)$ .

Les coefficients des séries entières  $F(X, Y, N)$  et  $G(X, Y, N)$  subissent évidemment des variations de l'ordre de  $\alpha$ . On en conclut que les coefficients des développements en série des trois fonctions  $f, g, h$  subissent aussi des variations de cet ordre.

5. *Ordre de grandeur de  $X, Y, N$ .* — Si l'on se reporte aux

---

<sup>(1)</sup> J. HAAG, Sur le calcul de certaines déformations élastiques, avec application au spiral de montre (Bulletin de la Soc. math. de France, t. 56, p. 249).

développements en série des fonctions  $F$  et  $G$  du n° 3, on constate qu'aucun d'eux ne possède de terme constant. Il en est de même de l'équation (7). On en conclut que les fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , qui, rappelons-le, sont holomorphes en  $u$  et  $v$ , ne possèdent pas non plus de terme constant. Nous verrons, d'autre part, que  $u$  et  $v$  sont, dans la pratique, des *quantités très petites*. Convenons de les considérer comme des infiniment petits du premier ordre. Nous pouvons affirmer immédiatement que  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  sont des infiniment petits d'ordre au moins égal à un.

Nous verrons, par ailleurs, que  $\xi_1$  et  $\eta_1$  sont du premier ordre. Dès lors, l'équation (7) nous montre que, si  $X$  et  $Y$  sont d'ordre  $p$ ,  $N$  est d'ordre  $p + 1$ . On en conclut que  $p = 1$ , car si  $p$  dépassait cette valeur,  $u$  et  $v$  seraient, en vertu des équations (13), d'un ordre infinitésimal supérieur à un, contrairement à l'hypothèse.

Finalement, *les composantes  $X$ ,  $Y$  de la réaction d'encastrement sont du premier ordre, tandis que le couple complémentaire  $N$  est du second ordre.*

6. *Détermination de la forme du spiral et calcul des réactions par la méthode des approximations successives.* — Imaginons que l'on connaisse une courbe  $\Gamma'$  très voisine de la forme exacte  $\Gamma$  du spiral et supposons que l'écart entre les deux courbes soit d'ordre  $k$ . Calculons  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  par les formules (14), mais en évaluant les coefficients des fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  à partir de la courbe connue  $\Gamma'$ . Nous obtenons ainsi les *valeurs approchées*  $X'$ ,  $Y'$ ,  $N'$ .

Les erreurs commises sur les coefficients de  $f$  et de  $g$  sont d'ordre  $k$ , d'après ce qu'on a vu au n° 4. Comme  $u$  et  $v$  sont du premier ordre et que les développements de  $f$  et  $g$  commencent par des termes du premier degré, on voit que *l'erreur commise sur  $X$  et sur  $Y$  est d'ordre  $k + 1$* . La formule (7) nous montre ensuite que *l'erreur commise sur  $N$  est d'ordre  $k + 2$* .

Calculons maintenant l'angle  $\varphi'' = z + \varepsilon''$  par la formule

$$(17) \quad \varepsilon'' = \frac{s}{EI} (N' - \xi' Y' + \eta' X');$$

puis  $x''$  et  $y''$  par les formules

$$x'' = a + \int_0^s \cos \varphi'' ds, \quad y'' = b + \int_0^s \sin \varphi'' ds.$$

Nous obtenons *une nouvelle courbe*  $\Gamma''$ , voisine de  $\Gamma$ .

D'après ce que nous venons de voir sur les erreurs dont sont entachés  $X'$ ,  $Y'$ ,  $N'$ , nous pouvons conclure que l'erreur imputable à  $\varphi''$  est d'ordre  $k+1$ . Il en est par suite de même des erreurs imputables à  $x''$  et  $y''$ . Donc, *l'écart entre  $\Gamma$  et  $\Gamma''$  est d'ordre  $k+1$ . L'ordre d'approximation est augmenté d'une unité.*

En répétant sur  $\Gamma''$  les opérations faites sur  $\Gamma'$ , nous obtenons  $X''$ ,  $Y''$  avec l'approximation d'ordre  $k+2$ ,  $N''$  avec l'approximation d'ordre  $k+3$  et  $\Gamma'''$  avec l'approximation d'ordre  $k+2$ . En continuant indéfiniment, on obtient une solution de plus en plus approchée et, *à la limite, on aurait la solution exacte.*

Nous pouvons donc considérer que *le problème de la déformation du spiral et du calcul des réactions à la virole est théoriquement résolu, avec une approximation illimitée.*

**7. Première approximation.** — Elle est obtenue en supposant que  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  sont nuls, donc  $\varphi = z$ . On est ainsi conduit à la loi de déformation habituellement admise en Chronométrie.

L'erreur commise sur  $\varphi$  est  $\epsilon$ ; elle est du premier ordre, d'après le n° 5. La première approximation est donc une *approximation du premier ordre.*

**8. Calcul de  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  en deuxième approximation.** — Pour le calcul de  $X'$ ,  $Y'$ ,  $N'$ , nous pouvons réduire les fonctions  $F$  et  $G$  à leurs termes du premier degré, car nous commençons ainsi une erreur du second ordre, d'après ce que nous avons vu au n° 5 sur l'ordre de grandeur de  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ . On peut donc écrire

$$F = - \int_0^L \epsilon'' \sin z \, ds, \quad G = \int_0^L \epsilon'' \cos z \, ds.$$

On peut transformer  $F$ , par exemple, de la manière suivante :

$$F = - \int_0^L \epsilon'' \, dy' = - [\epsilon'' y']_0^L = - \int_0^L y' \frac{d\epsilon''}{ds} \, ds = \int_0^L y' \frac{d\epsilon''}{ds} \, ds,$$

puisque  $\epsilon''$  s'annule pour  $s=0$  et  $s=L$ , d'après (17) et (7).

D'autre part,

$$\frac{d\epsilon''}{ds} = \frac{1}{EI} (N' - x'Y' + y'X').$$



Donc,

$$V = \int_0^L \frac{Y'}{EI} (N' - X'Y' + Y'X') ds.$$

En se reportant à la formule (16) et faisant un calcul analogue pour G, on obtient finalement les équations

$$(18) \quad u = \frac{1}{2} \frac{\partial W_1'}{\partial X'}, \quad v = \frac{1}{2} \frac{\partial W_1'}{\partial Y'}, \quad w = \frac{1}{2} \frac{\partial W_1'}{\partial N'}.$$

Introduisons la forme adjointe <sup>(1)</sup>

$$(19) \quad V_1 = \frac{EI}{LD_1} [(p_1^2 - \xi_1^2)u^2 + (q_1^2 - \eta_1^2)v^2 + (p_1^2 q_1^2 - n_1^2)w^2 + 2(n_1 - \xi_1 \eta_1)uw + 2(n_1 \xi_1 - p_1^2 \eta_1)uw + 2(q_1^2 \xi_1 - n_1 \eta_1)vw],$$

avec

$$D_1 = p_1^2 q_1^2 - n_1^2 - q_1^2 \xi_1^2 - p_1^2 \eta_1^2 + 2n_1 \xi_1 \eta_1.$$

Les équations (18) donnent

$$(20) \quad X' = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1'}{\partial u}, \quad Y' = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1'}{\partial v}, \quad N' = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1'}{\partial w},$$

où l'on doit remplacer  $u$  et  $v$  par les valeurs (10) et  $w$  par zéro

9. Ces formules peuvent être considérablement simplifiées, si l'on a égard à l'approximation qu'elles supposent. Nous savons que l'erreur commise sur  $X'$ ,  $Y'$  est du second ordre. Donc, nous pouvons, pour le calcul de ces quantités, supprimer, dans les coefficients de  $V_1$ , tous les termes qui sont au moins du premier ordre. En particulier, nous pouvons annuler  $\xi_1$  et  $\eta_1$  (n° 5).

Si l'on tient compte maintenant de la quasi-symétrie du spiral par rapport aux axes de coordonnées, on peut admettre que les quantités  $n_1$  et  $p_1^2 - q_1^2$  sont de l'ordre de  $\frac{R^2}{\lambda}$ , en désignant par  $\lambda$  l'angle d'enroulement du spiral. Comme cet angle est toujours très grand, nous pouvons annuler  $n_1$  et remplacer  $p_1^2$ ,  $q_1^2$  par  $\frac{k^2}{2}$ , en appelant  $k$  le rayon de giration du spiral par rapport à

---

(1) Cf. loc. cit., p. 250.

*l'axe du balancier.* Dans ces conditions,  $V_1$  se réduit à

$$V_1 = \frac{EI}{L} \left[ \frac{2}{k^2} (u^2 + v^2) + w^2 \right]$$

et l'on a

$$(21) \quad X' = \frac{2EI}{Lk^2} u, \quad Y' = \frac{2EI}{Lk^2} v,$$

avec une erreur de l'ordre de  $\frac{u}{\lambda}$  et  $\frac{v}{\lambda}$ .

Appelons  $\vec{w}$  le vecteur <sup>(1)</sup> dont les composantes sont  $u$  et  $v$ . La réaction d'encastrement est <sup>(2)</sup>

$$(22) \quad \vec{F} = \frac{2EI}{Lk^2} \vec{w}.$$

10. Quant à  $N'$ , on l'obtient par la formule (7)

$$(23) \quad N' = \frac{2EI}{Lk^2} (\xi_1 v - \eta_1 u).$$

Mais, pour en avoir la partie principale, *il nous faut calculer les parties principales de  $\xi_1$  et de  $\eta_1$ .*

Il y a lieu d'observer tout de suite que ces parties principales *ne sont pas nécessairement les coordonnées  $\xi'_1$  et  $\eta'_1$  du centre de gravité de  $\Gamma'$ .* En effet, l'erreur commise sur  $\Gamma'$  est du premier ordre. Il en est donc de même de l'erreur commise sur  $\xi'_1$  et  $\eta'_1$ . Autrement dit, *cette erreur est du même ordre que les quantités  $\xi'_1$  et  $\eta'_1$  elles-mêmes.* On ne peut donc avoir les parties principales de  $\xi_1$  et de  $\eta_1$  qu'en *poussant le calcul de  $\Gamma$  jusqu'à la deuxième approximation.*

11. *Calcul de la forme du spiral en deuxième approximation.* — Nous commençons par calculer  $\varepsilon''$  par la formule (17), en y remplaçant  $X'$ ,  $Y'$  par les valeurs (21) et  $N'$  par zéro, puisque

<sup>(1)</sup> Ce vecteur peut être défini géométriquement de la manière suivante. Il a pour origine la position approchée de l'extrémité du spiral correspondant à la courbe  $\Gamma'$  et pour extrémité la position exacte.

<sup>(2)</sup> GROSSMANN (*Horlogerie théorique*, t. II, p. 228) donne la formule  $\vec{F} = K \cdot \vec{w}$  mais sans préciser le coefficient  $K$ . Au surplus, sa démonstration n'est ni claire, ni rigoureuse.

cette dernière quantité est du second ordre. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}x'' &= a + \int_0^s \cos(z + \epsilon'') ds = x' - \int_0^s \epsilon'' \sin z ds, \\y'' &= b + \int_0^s \sin(z + \epsilon'') ds = y' + \int_0^s \epsilon'' \cos z ds,\end{aligned}$$

en négligeant toujours le second ordre.

On peut écrire, en intégrant par parties,

$$\int_0^s \epsilon'' \sin z ds = \int_A^M \epsilon'' dy' = \epsilon'' y' - \int_0^s \frac{y'}{EI} (-x' Y' + y' X') ds.$$

En faisant un calcul analogue pour l'autre intégrale, on a

$$(24) \quad \begin{cases} x'' = x' + \frac{s}{EI} [X'(-y' \eta' + q'^2) + Y'(-n' + \xi' y')], \\ y'' = y' + \frac{s}{EI} [X'(x' \eta' - n') + Y'(p'^2 - x' \xi')], \end{cases}$$

en adoptant pour l'arc  $s$  des notations analogues à celles qui ont été introduites, au n° 3, pour le spiral entier.

Telles sont les équations paramétriques de la deuxième approximation  $\Gamma''$  du spiral.

**12. Calcul du centre de gravité.** — Commençons par calculer  $\xi'$  et  $\eta'$ . A cet effet, dérivons la formule

$$x' = \int_0^s \cos\left(\varphi_0 + \frac{\theta s}{L}\right) ds$$

par rapport à  $\theta$ . Il vient

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = -\frac{1}{L} \int_0^s s \sin z ds = -\frac{1}{L} \int_A^M s dy' = -\frac{1}{L} \left( s y' - \int_0^s y' ds \right)$$

ou

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = \frac{s}{L} (\eta' - y').$$

En faisant un calcul analogue sur  $y'$  et résolvant par rapport à  $\eta'$  et  $\xi'$ , on obtient les formules <sup>(1)</sup>

$$s \xi' = s x' - L \frac{\partial y'}{\partial \theta}, \quad s \eta' = s y' + L \frac{\partial x'}{\partial \theta}.$$

---

(1) Cf. J. HAAG, *loc. cit.*, p. 263 [formules (62)].

En particulier, pour  $s = L$ , il vient

$$(25) \quad \xi_1' = x_B' - \frac{dy_B'}{d\theta}, \quad \eta_1' = y_B' + \frac{dx_B'}{d\theta}.$$

Si l'on remarque, d'autre part, que l'on a, d'après (5),

$$\frac{dx_B}{d\theta} + y_B = 0, \quad \frac{dy_B}{d\theta} - x_B = 0.$$

les formules (25) deviennent, en y remplaçant  $x_B'$  et  $y_B'$  par  $x_B - u$  et  $y_B - v$ ,

$$(26) \quad \xi_1' = \frac{dv}{d\theta} - u, \quad \eta_1' = -\frac{du}{d\theta} - v.$$

On vérifie que ces quantités et, par conséquent,  $\xi_1$  et  $\eta_1$  sont du premier ordre, comme nous l'avions admis précédemment (n° 5) par anticipation.

13. Calculons maintenant la *seconde approximation*  $\xi_1''$ ,  $\eta_1''$ . En intégrant la première équation (24) de 0 à L et divisant par L, il vient

$$(27) \quad \xi_1'' = \xi_1' - \frac{X'}{EIL} \int_0^L s(q'^2 - y'y') ds + \frac{Y'}{EIL} \int_0^L s(\xi'y' - n') ds.$$

Or, on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^L s q'^2 ds &= L^2 q_1'^2 - \int_0^L s y'^2 ds; \\ \int_0^L s n' ds &= L^2 n_1' - \int_0^L s x' y' ds; \\ \int_0^L s \tau_1' y' ds &= \int_A^B s \tau_1' d(s \tau_1') = \frac{1}{2} L^2 \tau_1'^2; \\ \int_0^L s \xi_1' y' ds &= \int_0^L s x' y' ds - L \int_0^L y' \frac{dy'}{d\theta} ds = \int_0^L s x' y' ds - \frac{1}{2} L^2 \frac{d(q_1'^2)}{d\theta}. \end{aligned}$$

En portant dans (27), procédant de même pour  $\eta_1''$  et *négligeant des quantités de l'ordre de*  $\frac{w}{\lambda}$ , on trouve

$$(28) \quad \begin{cases} \xi_1'' = \xi_1' + \frac{X'L}{EI} (q_1'^2 - Q_1'^2) - \frac{Y'L}{2EI} \frac{d(q_1'^2)}{d\theta}, \\ \eta_1'' = \eta_1' + \frac{X'L}{2EI} \frac{d(p_1'^2)}{d\theta} + \frac{Y'L}{EI} (p_1'^2 - P_1'^2), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$L^2 P_1'^2 = \int_0^L s x'^2 ds, \quad L^2 Q_1'^2 = \int_0^L s y'^2 ds.$$

Comme au n° 9, nous pouvons, à l'ordre de  $\frac{1}{\lambda}$  près, remplacer  $p_1'^2$  et  $q_1'^2$  par  $\frac{k^2}{2}$ . De même, introduisons le *second moment d'inertie* du spiral par rapport à l'axe du balancier, défini par

$$(29) \quad L^2 h^2 = \int_0^L s r^2 ds,$$

qui correspond à la *densité linéaire fictive*  $s$ . Nous pouvons remplacer  $P_1'^2$  et  $Q_2'^2$  par  $\frac{h^2}{2}$  et les formules (28) deviennent finalement, en tenant compte de (21) et (26),

$$(30) \quad \begin{cases} \xi_1'' = \frac{dv}{d\theta} - \frac{h^2}{k^2} u - \frac{v}{2k^2} \frac{d(k^2)}{d\theta}, \\ \eta_1'' = -\frac{du}{d\theta} - \frac{h^2}{k^2} v + \frac{u}{2k^2} \frac{d(k^2)}{d\theta}. \end{cases}$$

Dans ces formules,  $h^2$  et  $k^2$  doivent être calculés à partir de la courbe  $\Gamma'$ . Voyons quelle est l'influence de  $\theta$  sur ces quantités.

La distance  $r$  du point courant à l'axe du balancier peut être confondue avec le rayon de courbure du spiral en ce point. Or, on a, en première approximation, donc pour  $\Gamma'$ ,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\theta}{L};$$

d'où

$$r = \frac{r_0}{1 + \frac{r_0}{L} \theta};$$

d'où, en négligeant  $\frac{1}{\lambda^2}$ ,

$$r^2 = r_0^2 \left( 1 - \frac{2r_0}{L} \theta \right).$$

On en conclut d'abord que la dérivée  $\frac{d(r^2)}{d\theta}$  a pour partie principale  $-r_0^2 \frac{2r_0}{L}$ ; elle est de l'ordre de  $\frac{r_0^2}{\lambda}$ . Donc,  $\frac{d(k^2)}{d\theta}$  est de l'ordre de  $\frac{k^2}{\lambda}$  et les troisièmes termes des formules (30) peuvent être négli-

gés. Pour la même raison, on peut, en négligeant toujours des quantités de l'ordre de  $\frac{w}{\lambda}$ , remplacer, dans les seconds termes,  $h^2$  et  $k^2$  par leurs valeurs naturelles. En définitive, les coordonnées du centre de gravité du spiral sont données par les formules suivantes

$$(31) \quad \xi_1 = \frac{dv}{d\theta} - ju, \quad \eta_1 = -\frac{du}{d\theta} - jv,$$

en posant

$$(32) \quad j = \frac{h^2}{k^2},$$

ce rapport pouvant être calculé à l'état naturel.

14. *Calcul du couple complémentaire.* — Portant (31) dans (23), nous obtenons

$$(33) \quad N' = \frac{EI}{Lk^2} \frac{d(u^2 + v^2)}{d\theta},$$

avec une erreur de l'ordre de  $\frac{w^2}{\lambda}$  (<sup>1</sup>).

15. *Influence du poids du spiral.* — Si les forces appliquées au système balancier-spiral dérivent d'une fonction de forces U, l'équation différentielle du mouvement est

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dU}{d\theta},$$

en négligeant l'inertie du spiral, dont j'ai calculé l'influence dans un autre travail (<sup>2</sup>). Le couple appliqué au balancier est donc  $\frac{dU}{d\theta}$ .

Si U subit l'accroissement  $\Delta U$ , le couple perturbateur est  $\frac{d(\Delta U)}{d\theta}$ .

Cela posé, si  $m$  désigne la masse du spiral, son poids dérive de la fonction de force  $\vec{mg} \cdot \vec{\zeta}$ , en appelant  $\vec{\zeta}$  le vecteur  $\vec{OG}$ . D'autre part, sous l'action de ce poids, l'énergie de déformation du spiral ne subit qu'un accroissement du second ordre en  $m$  (<sup>3</sup>). On

(<sup>1</sup>) Au facteur  $\frac{EI}{Lk^2}$  près.

(<sup>2</sup>) J. HAAG, *loc. cit.*, p. 263 et suiv..

(<sup>3</sup>) Plus généralement, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit un corps élastique, encastré en différents points fixes et

a donc

$$\Delta U = m g \cdot \vec{\zeta}$$

et le couple perturbateur est  $m g \cdot \frac{d\vec{\zeta}}{dt}$ .

## II. — Calcul des perturbations de marche.

16. *Calcul de u et v.* — Introduisons les nombres complexes

$$w = u + iv, \quad z = x + iy,$$

où  $x, y$  désignent les coordonnées du point M du spiral, à l'état naturel. Les formules (10) équivalent à la suivante

$$w = z_B e^{i\theta} - z_A - \int_0^L e^{i\varphi} e^{i\theta} \frac{ds}{L}$$

ou, en intégrant par parties,

$$(34) \quad w = \frac{i\theta}{L} \int_A^B z e^{i\theta} \frac{ds}{L}.$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtiendrait  $u$  et  $v$ . Mais, ce calcul est inutile (1). Retenons simplement que le vecteur  $\vec{w}$  est le vecteur représentatif de l'imaginaire  $w$ .

*n'étant soumis à aucune autre force que les réactions d'encastrement. Appliquons-lui des forces extérieures F infiniment petites du premier ordre. L'énergie de déformation subit, de ce fait, une augmentation qui n'est que du second ordre.*

En effet, cet accroissement est égal au travail de toutes les forces extérieures pendant la déformation infiniment petite D produite par les forces F. Or, les forces d'encastrement ne travaillent pas. D'autre part, le travail des forces F pour le déplacement D est du second ordre. Donc, l'accroissement de l'énergie de déformation est du second ordre.

G. Q. F. D.

(1) En développant  $w$  suivant les puissances de  $\theta$ , on obtient

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} Y_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} X_{2n},$$

$$v = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} X_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} Y_{2n},$$

où  $X_p, Y_p$  désignent, suivant la terminologie de M. Keelhoff (cf. *loc. cit.*, p. 257) les coordonnées du centre de gravité d'ordre  $p$ , à l'état naturel.

17. *Calcul du centre de gravité.* — Le nombre complexe correspondant au vecteur  $\vec{\zeta} = \vec{OG}$  <sup>(1)</sup> est, d'après les formules (31),

$$\zeta = \xi + i\eta = -i \frac{dw}{d\theta} - jw$$

ou

$$(35) \quad \zeta = \frac{1}{L} \int_A^B z e^{i\theta \frac{s}{L}} \left[ 1 + i\theta \left( \frac{s}{L} - j \right) \right] ds.$$

On en déduit

$$(36) \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{L} \int_A^B z e^{i\theta \frac{s}{L}} \left[ i \left( \frac{2s}{L} - j \right) - \theta \frac{s}{L} \left( \frac{s}{L} - j \right) \right] ds.$$

18. *Perturbation d'isochronisme.* — Si l'on a un couple perturbateur  $f(\varphi)$ , la perturbation subie par la durée d'oscillation est donnée par la formule générale <sup>(2)</sup>,

$$(37) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{L}{2\pi\theta_0 EI} \int_0^{2\pi} f(\theta_0 \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

Appliquons ceci au couple

$$f(\theta) = -N = -\frac{EI}{Lk^2} \frac{d(u^2 + v^2)}{d\theta}.$$

Si  $\bar{z}$  désigne le nombre imaginaire conjugué de  $z$ , on a, d'après (34),

$$u^2 + v^2 = \frac{\theta^2}{L^2} \int \int \bar{z} z' e^{i\theta \frac{s-s'}{L}} ds ds' \quad (0 < s < L, 0 < s' < L).$$

D'où

$$\frac{d(u^2 + v^2)}{d\theta} = \frac{\theta}{L^2} \int \int \bar{z} z' e^{i\theta \frac{s-s'}{L}} \left( 2 + i\theta \frac{s-s'}{L} \right) ds ds'.$$

Portant dans (37), il vient

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2\pi k^2 L^2} \int \int \bar{z} z' ds ds' \int_0^{2\pi} e^{im \cos \varphi} (2 + im \cos \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi,$$

en posant

$$m = \theta_0 \frac{s-s'}{L}.$$

<sup>(1)</sup> Nous supprimons dorénavant l'indice 1 correspondant au centre de gravité  $G_1$  du spiral entier.

<sup>(2)</sup> Cf. J. HAAG, *loc. cit.*, p. 271.



L'intégrale définie qui se trouve sous le signe  $\int \int$  s'exprime immédiatement au moyen des *fonctions de Bessel*, en utilisant la *formule de Sommerfeld* <sup>(1)</sup>,

$$(38) \quad \int_0^{2\pi} e^{i x \cos \varphi} e^{i n \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{i x \cos \varphi} e^{-i n \varphi} d\varphi = 2\pi i^n J_n(x).$$

On a

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} e^{i m \cos \varphi} (2 - i m \cos \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i m \cos \varphi} \left[ \frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2} + 1 + i m \frac{e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi}}{8} \right] d\varphi \\ &= 2\pi \left[ -J_2(m) + J_0(m) - m \frac{J_3(m) - 3J_1(m)}{4} \right] \\ &= 2\pi [J_0(m) - m J_1(m)], \end{aligned}$$

en utilisant des identités connues <sup>(2)</sup>.

Posons <sup>(3)</sup>

$$(39) \quad F(x) = J_0(x) - x J_1(x) = \frac{d}{dx} [x J_0(x)]$$

Nous avons

$$(40) \quad \frac{\Delta T}{T} = - \frac{1}{k^2 L^2} \int \int z \bar{z} F \left( 0_0 \frac{s-s'}{L} \right) ds ds'.$$

Cette élégante formule peut se mettre sous une forme entièrement géométrique :

$$(41) \quad \frac{\Delta T}{T} = - \frac{1}{k^2 L^2} \int \int \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} F \left( 0_0 \frac{\widehat{MM'}}{L} \right) ds ds'.$$

**19. Perturbation de marche due au poids du spiral.** — Cette perturbation est donnée par la formule <sup>(4)</sup>

$$(42) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{m L}{EI} \vec{g} \cdot \vec{Z},$$

(1) Cf. JAHNKE und EMDE, *Funktionentafeln*, p. 169.

(2) Cf. *loc. cit.*, p. 165.

(3) Signalons que la fonction  $F(x)$  est une fonction paire.

(4) Je signale, à ce propos, que la perturbation due au poids du balancier a

$\vec{Z}$  désignant le vecteur représentatif du nombre imaginaire

$$Z = \frac{1}{2\pi\theta_0 L} \int_A^B z ds \int_0^{2\pi} e^{i\theta_0 \frac{s}{L} \cos \varphi} \\ \times \left[ i \left( \frac{2s}{L} - j \right) - \frac{s}{L} \left( \frac{s}{L} - j \right) \theta_0 \cos \varphi \right] \cos \varphi d\varphi.$$

En appliquant de nouveau la formule (38), l'intégrale en  $\varphi$  s'écrit

$$2\pi \left( j - \frac{2s}{L} \right) J_1 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) + \pi \left( j - \frac{s}{L} \right) \theta_0 \frac{s}{L} \left[ J_0 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) - J_2 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) \right] \\ = 2\pi \frac{s}{L} \left[ \left( j - \frac{s}{L} \right) \theta_0 J_0 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) - J_1 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) \right].$$

D'où

$$(43) \quad \vec{Z} = \frac{1}{L^2} \int_A^B \overrightarrow{OM} \cdot s \left[ \left( j - \frac{s}{L} \right) J_0 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) - \frac{1}{\theta_0} J_1 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) \right] ds.$$

**20. Règle du point d'attache.** — La formule (42) nous montre que la perturbation de marche due au poids du spiral est une *fonction sinusoïdale* de l'angle que fait la verticale avec une direction déterminée du chronomètre. On a l'*avance maximum* lorsque le vecteur  $\vec{Z}$  est dirigé verticalement et vers le haut.

Les régleurs s'efforcent de *fixer la position du point d'attache du spiral au balancier, de telle manière que cette avance maximum ait lieu lorsque la montre est au pendu* <sup>(1)</sup>. On voit qu'il suffit, pour cela, de s'arranger pour que le vecteur  $\vec{Z}$  soit dirigé vers le pendent.

été évaluée par Caspari sous la forme

$$\frac{\Delta T}{T} = - \frac{T^2 a g \cos \varphi}{\pi^2 R^3} S(\theta_0),$$

où  $R$  désigne le rayon de gyration du balancier,  $a$  et  $\varphi$  les coordonnées polaires de son centre de gravité par rapport à la verticale descendante et  $S$  une fonction dont Caspari a calculé le développement en série. En réalité, cette fonction est égale à  $\frac{J_1(\theta_0)}{\theta_0}$ , ainsi qu'on le trouve directement en procédant comme ci-dessus.

On peut aussi le vérifier, bien entendu, à partir du développement en série.

(1) Cf. GROSSMANN, loc. cit., p. 212.

Dans ce cas, la perturbation est nulle pour les positions « pendant à droite » et « pendant à gauche ». On a le retard maximum pour la position « pendant bas ».

### III. — Formules générales convenant à la fois au spiral cylindrique et au spiral plat.

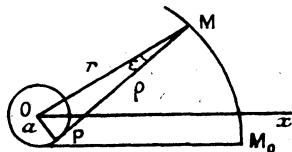
21. *Forme géométrique du spiral.* — Pour poursuivre l'application concrète de notre théorie, nous sommes obligés de supposer que le spiral a une forme géométrique déterminée.

Pour le spiral cylindrique, il n'y a pas de difficulté; on l'assimile à un cercle.

Pour le spiral plat, au contraire, les avis sont partagés. Certains auteurs prétendent que c'est une *spirale d'Archimède*; d'autres le considèrent comme une *développante de cercle*. Nous allons montrer, d'une manière précise, que ces deux formes géométriques sont *pratiquement équivalentes*.

Prenons une développante de cercle. Soient  $a$  le rayon

Fig. 1.



du cercle développé,  $\rho$  le rayon de courbure  $PM$ ,  $\varphi$  l'angle polaire de la normale. On a

$$\rho = \rho_0 - a\varphi.$$

Calculons l'équation polaire. On a

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2} = \rho \left( 1 + \frac{a^2}{2\rho^2} + \dots \right).$$

D'autre part,

$$\theta = \varphi - \epsilon, \quad \epsilon = \arctang \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\rho} + \dots$$

Donc

$$r = r_0 - a(0 + \varepsilon_1) + \frac{a^2}{2\rho} \dots = r_0 - a(0 + \frac{a^2}{2\rho} + \dots$$

Si l'on considère la spirale d'Archimède ayant pour équation

$$r' = r_0 - a\theta,$$

on voit que la distance MM' des points des deux courbes qui ont même angle polaire est

$$r' - r = \frac{a^2}{2\rho} + \dots$$

Voyons quel est l'ordre de grandeur de  $\frac{a^2}{2\rho}$ . Si R et R' sont les rayons extrêmes et n le nombre des spires, on a

$$a = \frac{R - R'}{2n\pi};$$

d'où

$$\frac{a^2}{2\rho} = \frac{(R - R')^2}{8n^2\pi^2\rho}.$$

Prenons, par exemple, R = 1<sup>mm</sup>, R' = 1, n = 10; on a

$$\frac{a^2}{2\rho} = \frac{1,14}{\rho} 10^{-3}.$$

*La distance MM' varie entre 1,14 et 0,28 millièmes de millimètre. La forme du spiral n'est évidemment pas déterminée avec une précision d'un millième de millimètre. Donc, il est pratiquement indifférent de représenter le spiral par l'une ou l'autre des deux courbes géométriques ci-dessus.*

On peut aussi se demander quelle est la différence des longueurs des deux courbes. La longueur de la développante de cercle est  $\frac{R^2 - R'^2}{2a}$ . Celle de la spirale d'Archimède est  $\frac{R^2 - R'^2}{2a} + \frac{a}{2} \log \frac{R}{R'}$ . La spirale d'Archimède est un peu plus longue que la développante de cercle. La différence est à peu près  $\frac{1}{10\pi}$ , soit  $\frac{1}{30}$  de millimètre, dans l'exemple ci-dessus, sur une longueur totale de 157<sup>mm</sup> environ. On voit que la différence est insignifiante.

Le calcul numérique que nous venons de faire nous apprend que, dans le calcul des coordonnées d'un point quelconque du spiral,

on peut négliger les quantités de l'ordre de  $\frac{a^2}{R}$ , qui seraient pratiquement illusoires.

Dans ce qui va suivre, nous assimilerons le spiral à la spirale d'Archimède définie par l'équation polaire

$$(44) \quad r = R - a\varphi.$$

On a

$$\frac{ds}{d\varphi} = r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous prendrons

$$(45) \quad ds = r d\varphi,$$

commettant ainsi une erreur relative de l'ordre de  $\frac{a^2}{r^2}$  et, par conséquent, inférieure à l'erreur relative inévitablement commise sur  $r$ .

**22. Vecteur correspondant à une densité fictive du spiral.** — Donnons au spiral une *densité linéaire fictive*, réelle ou imaginaire,  $f(M)$ ,  $M$  désignant le point courant. A cette densité nous ferons correspondre le vecteur défini par l'intégrale géométrique

$$(46) \quad \vec{V} = \frac{1}{L} \int_A^B \vec{OM} f(M) ds.$$

On pourra aussi considérer  $\vec{V}$  comme représentant l'imaginaire

$$(47) \quad V = \frac{1}{L} \int_A^B z f(M) ds.$$

Nous allons calculer approximativement ce vecteur, en faisant les hypothèses suivantes sur la fonction  $f(M)$  :

1° Son module est au plus de l'ordre de grandeur de l'unité, quelle que soit la position de  $M$  sur le spiral.

2° Elle admet des dérivées successives par rapport à l'arc décrit par  $M$ , quand ce point suit le spiral. Si  $M$  suit le spiral en allant vers  $A$ , nous représenterons la dérivée première, par exemple, par la notation  $f'_A(M)$ . Si, au contraire,  $M$  va vers  $B$ , nous écrivons  $f'_B(M)$ .

3° La dérivée  $n^{\text{ième}}$  est au plus de l'ordre de  $\left(\frac{k}{L}\right)^n$ ,  $k$  désignant un nombre qui ne dépassera généralement pas 5.

23. *Vecteur associé à une courbe terminale.* — Soit la courbe terminale T, qui se raccorde en H' avec le spiral proprement dit et se termine en H; de sorte que la lettre H devra être, par la suite, remplacée par A ou B, selon qu'il s'agira de la *courbe extérieure* (côté piton) ou de la *courbe intérieure* (côté virole).

Le point courant M étant pris sur cette courbe, développons  $f(M)$  par la formule de Taylor; nous avons, en appelant  $s$  l'arc H'M,

$$(48) \quad f(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} f_{\text{H}}^{(n)}(H').$$

D'après la troisième hypothèse du n° 22, cette série converge rapidement.

Considérons maintenant le *centre de gravité*  $g_p$  d'ordre  $p$ , défini par

$$\vec{Og}_p = \frac{p}{l^p} \int_0^l \vec{OM} s^{p-1} ds,$$

$l$  désignant la longueur de la courbe. Nous avons

$$\vec{V} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\text{H}}^{(n-1)}(H')}{(n-1)!} \int_0^l \vec{OM} s^{n-1} ds$$

ou

$$(49) \quad \vec{V} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!} f_{\text{H}}^{(n-1)}(H') \cdot \vec{Og}_n.$$

Comme la série (48), cette série converge rapidement.

24. *Vecteur associé au spiral proprement dit.* — Appelons  $u$  le vecteur unitaire du rayon OM et  $\varphi$  son angle polaire, le sens positif de rotation étant le sens de l'enroulement. Nous avons

$$LV = \int_{A'}^{B'} r^2 f(M) e^{i\varphi} d\varphi$$

ou, en intégrant par parties et utilisant (44) et (45),

$$LV = [-ie^{i\varphi} r^2 f(M)]_A^B - \int_A^B [-2ra f(M) + r^3 f''(M)] i e^{i\varphi} d\varphi.$$

On pourrait répéter indéfiniment cette opération. Mais, dès la troisième, les termes intégrés sont de l'ordre de  $a^2$  ou de  $\frac{L^2 R^3}{L^2}$ ; il serait illusoire de les conserver. Nous nous contentons donc de deux intégrations et nous obtenons

$$(50) \quad \begin{aligned} \vec{LV} = & [(iR + 2a)f(A) + R^2 f'_A(A)] \cdot \vec{OA} \\ & - [(iR' + 2a)f(B) + R'^2 f'_B(B)] \cdot \vec{OB}. \end{aligned}$$

25. *Vecteur associé au spiral entier.* — Écrivons la formule (49), limitée à ses deux premiers termes, successivement pour les deux courbes terminales et ajoutons à (50); il vient

$$\begin{aligned} \vec{LV} = & f(A) \cdot (l \vec{Og}_1 + iR \vec{OA}) + f(B) \cdot (l' \vec{Og}'_1 - iR' \vec{OB}) \\ & + f_A(A) \cdot \left( \frac{l^2}{2} \vec{Og}_2 + R \vec{OA} \right) + f_B(B) \cdot \left( \frac{l'^2}{2} \vec{Og}'_2 + R' \vec{OB} \right) \\ & + 2a [f(A) \vec{OA} - f(B) \vec{OB}]. \end{aligned}$$

A chaque courbe terminale, associons les deux points définis de la manière suivante. Prenons, par exemple, la courbe AA'. Menons la perpendiculaire à OA' et, sur cette perpendiculaire, portons, du côté de la courbe,  $Op_1 = \frac{R^2}{l}$ . Sur la demi-droite opposée à OA', portons  $Op_2 = \frac{2R^3}{l^2}$ . Construisons les points analogues  $p'_1$  et  $p'_2$  pour la courbe BB'. On a

$$(51) \quad l \vec{Op}_1 = -iR \vec{OA}, \quad l' \vec{Op}'_1 = iR' \vec{OB};$$

$$(52) \quad l^2 \vec{Op}_2 = -2R^2 \vec{OA}, \quad l'^2 \vec{Op}'_2 = -2R'^2 \vec{OB}.$$

Dès lors, la formule ci-dessus devient

$$(53) \quad \begin{aligned} \vec{LV} = & lf(A) \vec{p}_1 g_1 + l'f(B) \vec{p}'_1 g'_1 \\ & + \frac{l^2}{2} f_A(A) \vec{p}_2 g_2 + \frac{l'^2}{2} f_B(B) \vec{p}'_2 g'_2 \\ & + 2a [f(A) \vec{OA} - f(B) \vec{OB}]. \end{aligned}$$

On vérifie, comme il fallait s'y attendre, que cette formule ne change pas quand on intervertit A et B, A' et B'.

26. A la courbe A'A, associons les axes suivants : OX suivant OA', OY perpendiculaire à OX et dirigé vers la courbe. Nous appellerons  $\varphi_1, \varphi_1'$  les coordonnées polaires du vecteur  $\frac{\vec{p}_1 \vec{g}_1}{O \vec{p}_1} = \frac{l^1 \vec{p}_1 \vec{g}_1}{R^2}$  et  $\varphi_2, \varphi_2'$  les coordonnées polaires du vecteur  $\frac{\vec{p}_2 \vec{g}_2}{O \vec{p}_2} = \frac{l^2 \vec{p}_2 \vec{g}_2}{R^3}$ . Ces quatre nombres se calculent à l'aide des formules suivantes :

$$(54) \quad \begin{cases} \varphi_1 \cos \varphi_1 = \frac{1}{R^2} \int_0^l X ds, & \varphi_1 \sin \varphi_1 = \frac{1}{R^2} \int_0^l Y ds - 1; \\ \varphi_2 \cos \varphi_2 = \frac{1}{R^3} \int_0^l s X ds - 1, & \varphi_2 \sin \varphi_2 = \frac{1}{R^3} \int_0^l s Y ds. \end{cases}$$

Nous désignerons par des lettres accentuées les quantités analogues relatives à la courbe BB'.

Appelons enfin  $\lambda$  l'angle de OA' avec OB', le sens positif de rotation étant le sens de l'enroulement, de sorte que cet angle est positif et mesure tout simplement l'angle d'enroulement du spiral proprement dit. Avec ces conventions, nous avons

$$\begin{aligned} l^1 \vec{p}_1 \vec{g}_1 &= R \varphi_1 e^{-i\varphi_1} O \vec{V}, & \frac{l^2}{2} \vec{p}_2 \vec{g}_2 &= R^2 \varphi_2 e^{-i\varphi_2} O \vec{V}; \\ l^1 \vec{p}_1 \vec{g}_1 &= R' \varphi_1' e^{i\varphi_1'} O \vec{B}', & \frac{l^2}{2} \vec{p}_2 \vec{g}_2 &= R'^2 \varphi_2' e^{i\varphi_2'} O \vec{B}'. \end{aligned}$$

En portant dans (53), il vient

$$(55) \quad \vec{LV} = \{ (R \varphi_1 e^{-i\varphi_1} - 2a) f(A) - R^2 \varphi_2 e^{-i\varphi_2} f_A(A) \} O \vec{V} \\ + \{ (R' \varphi_1' e^{i\varphi_1'} - 2a) f(B) - R'^2 \varphi_2' e^{i\varphi_2'} f_B(B) \} O \vec{B}'.$$

27. Conditions de Phillips. — Si les courbes terminales ont une forme quelconque, les formules (53) et (55) montrent que le vecteur  $\vec{V}$  est de l'ordre de  $\frac{R^2}{L}$  ou de  $\frac{R}{\lambda}$ . Il est infiniment petit du premier ordre, si l'on prend  $\frac{1}{\lambda}$  pour infiniment petit principal.

Pour l'abaisser au second ordre, quelle que soit la fonction  $f$ ,



il faut et il suffit que  $g_1$  soit en  $p_1$  et  $g'_1$  en  $p'_1$ . Ce sont les conditions de Phillips bien connues.

Pour l'abaisser au troisième ordre, il faut que  $a$  soit nul et que  $g_2$  soit en  $p_2$  et  $g'_2$  en  $p'_2$ . Autrement dit, le spiral doit être cylindrique et chaque courbe terminale doit satisfaire non seulement aux conditions de Phillips, mais encore aux deux conditions supplémentaires qui expriment que son centre de gravité du second ordre se trouve au point  $p_2$  défini au n° 25<sup>(1)</sup>.

Je n'ai pu trouver aucune courbe satisfaisant à ces quatre conditions. Mais, je pense néanmoins qu'il en existe. Faute de posséder une telle courbe, on peut chercher, parmi les courbes de Phillips connues, celles qui donnent la plus petite valeur à  $\rho_2$ . J'ai fait le calcul pour les courbes suivantes, empruntées à Grossmann (*loc. cit.*, p. 114 et suiv.).

- I. Un arc de cercle :  $\rho_2 = 1,045$ ;  $\varphi_2 = 151^\circ, 7$ .
- II. Deux quarts de cercle et une droite :  $\rho_2 = 1,316$ ;  $\varphi_2 = 102^\circ, 5$ .
- III. Deux arcs de cercle :  $\rho_2 = 1,048$ ;  $\varphi_2 = 147^\circ, 5$ .
- IV. Une droite <sup>(2)</sup> :  $\rho_2 = 1,48$ ;  $\varphi_2 = 82^\circ, 6$ .

On voit que les deux meilleures courbes sont les courbes I et III, qui sont à peu près équivalentes.

On pourrait pousser plus loin le développement de la formule (53) et, dans le cas du spiral cylindrique, reculer de plus en plus l'ordre de grandeur du vecteur  $\tilde{V}$ , en imposant de nouvelles conditions aux courbes terminales <sup>(3)</sup>. Mais, de tels calculs seraient pratiquement illusoires, à cause de l'indétermination de la forme géométrique du spiral <sup>(4)</sup>. Nous pensons donc que la for-

<sup>(1)</sup> Cf. J. HAAG, *Extension des conditions de Phillips concernant le spiral* (*Comptes rendus*, t. 189, 1909, p. 86).

<sup>(2)</sup> Je signale que, pour cette courbe, il y a lieu de faire des réserves sur la validité de la théorie. En effet, au point de raccordement avec le spiral, se trouve un point anguleux, dont le rayon de courbure est nul. Or, l'extension de la théorie de Saint-Venant au spiral n'est légitime que si l'épaisseur est infiniment petite vis-à-vis du rayon de courbure [cf. J. HAAG, *Extension de la théorie de Saint Venant aux fils élastiques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. 46, p. 105)].

<sup>(3)</sup> Cf. J. HAAG, *Extension des conditions de Phillips* (*loc. cit.*).

<sup>(4)</sup> On peut ajouter aussi que la formule fondamentale (1) est elle-même une formule approchée (cf. J. HAAG, *Extension de la théorie de Saint-Venant* (*loc. cit.*) dont l'approximation n'est pas illimitée.

mule (53), qui entraîne, pour  $\vec{V}$ , une *erreur du troisième ordre*, atteint le maximum de précision compatible avec les données *physiques* du problème.

28. *Calcul du vecteur  $\vec{\omega}$ .* — D'après (34), la densité fictive correspondante est

$$f(M) = i\theta e^{i\theta \frac{s}{L}}, \quad s = \widehat{AM}.$$

Portant dans (55), il vient

$$(56) \quad \vec{\omega} = \frac{\theta}{L} \left[ i(R\rho_1 e^{-i\varphi_1 + 2\alpha}) + \frac{\theta}{L} R^2 \rho_2 e^{-i\varphi_2} \right] \vec{OA}_0 \\ + \frac{\theta}{L} \left[ i(R'\rho'_1 e^{i\varphi'_1 - 2\alpha}) - \frac{\theta}{L} R'^2 \rho'_2 e^{i\varphi'_2} \right] \vec{OB}_0,$$

en appelant  $A_0$  et  $B_0$  les positions des points  $A'$  et  $B'$ , pour l'élongation 0 du balancier.

29. *Calcul du centre de gravité.* — D'après (35), la densité fictive correspondant au vecteur  $\vec{\zeta}$  est

$$f(M) = \left[ 1 + i\theta \left( \frac{s}{L} - j \right) \right] e^{i\theta \frac{s}{L}}, \quad s = \widehat{AM}.$$

Portant dans (55), il vient

$$(57) \quad L\vec{\zeta} = \left[ (R\rho_1 e^{-i\varphi_1 + 2\alpha})(1 - ij\theta) - R^2 \rho_2 e^{-i\varphi_2} \frac{\theta}{L} (2i + j\theta) \right] \vec{OA}_0 \\ + \left[ (R'\rho'_1 e^{i\varphi'_1 - 2\alpha})(1 + ij'\theta) + R'^2 \rho'_2 e^{i\varphi'_2} \frac{\theta}{L} (2i - j'\theta) \right] \vec{OB}_0.$$

Dans cette formule, on a posé  $j' = 1 - j$ . De plus, on a négligé, dans chaque crochet, des termes en  $\frac{l}{L}$  ou  $\frac{l'}{L}$ , qui sont toujours très petits vis-à-vis du terme principal.

Il nous reste à évaluer  $j$  et  $j'$ . On a, en négligeant les courbes terminales,

$$L^2 h^2 \approx \int_{R'}^R \frac{r^2(R^2 - r^2)}{2a^2} r dr = \frac{(R^2 - R'^2)^2 (R^2 + 2R'^2)}{24a^2} \approx \frac{L^2}{6} (R^2 + 2R'^2);$$

d'où

$$h^2 = \frac{R^2 + 2R'^2}{6}$$

et (1)

$$j = \frac{1}{3} \frac{R^2 + 2R'^2}{R^2 + R'^2}.$$

Pour le spiral cylindrique, on a  $j = j' = \frac{1}{2}$ .

Pour le spiral plat, on a, en négligeant  $R'^2$  devant  $R^2$ ,

$$j = \frac{1}{3}, \quad j' = \frac{2}{3}.$$

30. Calcul de la perturbation d'isochronisme. — Elle est donnée par la formule (41).

Le point  $M'$  étant fixe, prenons pour densité fictive  $F\left(\theta_0 \frac{\widehat{M'M}}{L}\right)$

et soit  $\vec{V}$  le vecteur correspondant. En lui appliquant la formule (53), il prend la forme

$$(58) \quad \vec{V} = \sum_{n=1}^6 f_n(M') \vec{U}_n.$$

en posant

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{U}_1 = \vec{p}_1 \vec{g}_1, & f_1(M') = \frac{l}{L} F\left(\theta_0 \frac{\widehat{A'M'}}{L}\right); \\ \vec{U}_2 = \vec{p}'_1 \vec{g}'_1, & f_2(M') = \frac{l'}{L} F\left(\theta_0 \frac{\widehat{B'M'}}{L}\right); \\ \vec{U}_3 = \vec{p}_2 \vec{g}_2, & f_3(M') = \frac{l^2}{2L^2} \theta_0 F'\left(\theta_0 \frac{\widehat{A'M'}}{L}\right); \\ \vec{U}_4 = \vec{p}'_2 \vec{g}'_2, & f_4(M') = \frac{l'^2}{2L^2} \theta_0 F'\left(\theta_0 \frac{\widehat{B'M'}}{L}\right); \\ \vec{U}_5 = \vec{O} \vec{A}', & f_5(M') = \frac{2a}{L} F\left(\theta_0 \frac{\widehat{A'M'}}{L}\right); \\ \vec{U}_6 = \vec{O} \vec{B}', & f_6(M') = -\frac{2a}{L} F\left(\theta_0 \frac{\widehat{B'M'}}{L}\right); \end{array} \right.$$

(1) Remarquer que

$$L k^2 = \int_{R'}^R \frac{r^3 dr}{a} = L \frac{R^2 + R'^2}{2};$$

d'où

$$k^2 = \frac{R^2 + R'^2}{2}.$$

en convénant que l'arc  $\widehat{A'M'}$  est compté positivement de  $A'$  vers  $B'$  et que l'arc  $\widehat{B'M'}$  est compté positivement de  $B'$  vers  $A'$  <sup>(1)</sup>.

Nous avons maintenant

$$-k^2 \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{L} \int_0^L \vec{V} \cdot \vec{OM}' ds = \sum_n \vec{U}_n \cdot \int_0^L f_n(M') \vec{OM}' ds.$$

Appliquant de nouveau la formule (53), on a

$$(60) \quad \frac{\Delta T}{T} = - \frac{2}{R^2 + R'^2} \sum_n \sum_p g_{np} \vec{U}_n \cdot \vec{U}_p,$$

en posant

$$\begin{aligned} g_{n1} &= \frac{l}{L} f_n(A'), & g_{n2} &= \frac{l'}{L} f_n(B'), \\ g_{n3} &= \frac{l^2}{L} f'_{nA}(A'), & g_{n4} &= \frac{l^2}{L} f'_{nB}(B'), \\ g_{n5} &= \frac{2a}{L} f_n(A'), & g_{n6} &= - \frac{2a}{L} f_n(B'). \end{aligned}$$

En se reportant aux formules (59) et remarquant que

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = -\frac{3}{2},$$

on trouve

$$g_{np} = g_{pn}$$

et

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{l^2}{L^2}, & g_{12} &= \frac{ll'}{L^2} F(\theta_1), & g_{13} &= 0, & g_{14} &= \frac{ll'^2}{2L^3} \theta_0 F'(\theta_1), \\ g_{15} &= \frac{2al}{L^2}, & g_{16} &= - \frac{2al}{L^2} F(\theta_1); \\ g_{22} &= \frac{l'^2}{L^2}, & g_{23} &= \frac{l^2 l'}{2L^3} \theta_0 F'(\theta_1), & g_{24} &= 0, & g_{25} &= \frac{2al'}{L^2} F(\theta_1), \\ & & g_{26} &= - \frac{2al'}{L^2}; \\ g_{33} &= \frac{3l^3}{8L^4} \theta_0^2, & g_{34} &= \frac{l^2 l'^2}{4L^4} \theta_0^2 F'(\theta_1), & g_{35} &= 0, \\ & & g_{36} &= - \frac{al^2}{L^3} \theta_0 F'(\theta_1); \\ g_{44} &= \frac{3l'^3}{8L^4} \theta_0^2, & g_{45} &= \frac{al'^2}{L^3} \theta_0 F'(\theta_1), & g_{46} &= 0; \\ g_{55} &= g_{66} = \frac{4a^2}{L^2}, & g_{56} &= - \frac{4a^2}{L^2} F(\theta_1); \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Il faut remarquer que la fonction  $F(x)$  est impaire.

où l'on a posé

$$\theta_1 = \theta_0 \frac{L'}{L},$$

$L' = L - (l + l') =$  longueur du spiral proprement dit.

Les produits scalaires se calculent aisément et l'on trouve finalement

$$(61) \quad \frac{\Delta T}{T} = - \frac{2}{R^2 + R'^2} \left[ A + B \theta_0^2 + C F \left( \theta_0 \frac{L'}{L} \right) + D G \left( \theta_0 \frac{L'}{L} \right) + K H \left( \theta_0 \frac{L'}{L} \right) \right],$$

en posant

$$(62) \quad \begin{cases} G(z) = z F'(z) = -z [J_1(z) + z J_0(z)], \\ H(z) = z^2 F''(z) = z(1 + z^2) J_1(z) - 2z^2 J_0(z) \end{cases}$$

et

$$(63) \quad \begin{cases} A = \frac{R^4 \rho_1'^2 + R'^4 \rho_1'^2 + \{ \alpha (R^3 \rho_1 \cos \varphi_1 - R'^3 \rho_1' \cos \varphi_1') + \{ \alpha^2 (R^2 - R'^2) \}}{L^2}, \\ B = \frac{3}{2} \frac{R^6 \rho_2'^2 + R'^6 \rho_2'^2}{L^4}, \\ C = \frac{\{ R^2 R'^2 \rho_1 \rho_1' \cos(\lambda + \varphi_1 + \varphi_1') + 2 \alpha R R' [R' \rho_1' \cos(\lambda + \varphi_1') - R \rho_1 \cos(\lambda + \varphi_1) - 2 \alpha \cos \lambda] \}}{L^2}, \\ D = \frac{2 R R'}{L^2 L'} [R R'^2 \rho_1 \rho_2' \cos(\lambda + \varphi_1 + \varphi_2') + R^2 R' \rho_1' \rho_2 \cos(\lambda + \varphi_1' + \varphi_2) + 2 \alpha R'^2 \rho_2' \cos(\lambda + \varphi_2') - 2 \alpha R^2 \rho_2 \cos(\lambda + \varphi_2)], \\ K = \frac{2 R^3 R'^3 \rho_2 \rho_2' \cos(\lambda + \varphi_2 + \varphi_2')}{L^2 L'^2}. \end{cases}$$

On vérifie que si l'on échange les notations se rapportant aux deux extrémités du spiral, les formules ne changent pas <sup>(1)</sup>, comme cela est évident *a priori*.

31. La formule (53) ne nous donne le vecteur  $\vec{V}$  qu'au troisième ordre près <sup>(2)</sup>, lorsque la fonction  $f$  est de l'ordre de l'unité. Si elle est d'ordre  $n$ , l'erreur sur  $\vec{V}$  est d'ordre  $n + 3$ . Si les vecteurs  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$  ne sont pas infiniment petits, on en conclut que

(1). Ne pas oublier que  $\alpha$  change de signe.

(2) On suppose que  $\frac{l}{L}$  et  $\frac{l'}{L}$  sont de l'ordre de  $\frac{1}{\lambda}$ , c'est-à-dire du premier ordre.

L'erreur imputable à la formule (61) est du quatrième ordre. Donc, les termes du quatrième ordre des formules (63) sont, dans ce cas, illusoire. Ils ne doivent être conservés que si les courbes terminales satisfont aux conditions de Phillips, auquel cas l'erreur est du cinquième ordre.

32. *Répercussion d'une petite déformation du spiral.* — Soit  $\vec{u}$  le déplacement infiniment petit du point M sous l'action de cette déformation. On a, en tenant compte de la symétrie de l'intégrale (41),

$$\delta \left( \frac{\Delta T}{T} \right) = - \frac{2}{k^2 L^2} \int \int \vec{OM} \cdot \delta \vec{OM} F \left( \theta_0 \frac{s-s'}{L} \right) ds ds'.$$

En intégrant d'abord par rapport à  $s$  et appliquant la formule (58), ceci s'écrit

$$\delta \left( \frac{\Delta T}{T} \right) = - \frac{2}{k^2} \sum \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i.$$

en posant

$$(64) \quad \vec{v}_i = \frac{1}{L} \int_0^L f_i(M) \vec{u} ds.$$

Les densités  $f_1$  et  $f_2$  sont infiniment petites du premier ordre, tandis que les autres sont du second ordre. Dès lors, s'il n'y a pas de courbes de Phillips, on peut écrire

$$(65) \quad \delta \left( \frac{\Delta T}{T} \right) = - \frac{2}{k^2 L^2} \left[ \vec{p}_1 \cdot \int_0^L \vec{u} F \left( \theta_0 \frac{\widehat{AM}}{L} \right) ds + \vec{p}_2 \cdot \int_0^L \vec{u} F \left( \theta_0 \frac{\widehat{BM}}{L} \right) ds \right].$$

S'il y a des courbes de Phillips, l'ordre infinitésimal de la perturbation est reculé d'une unité.

On voit donc que la présence des courbes de Phillips, outre qu'elle améliore l'isochronisme, réduit considérablement les perturbations de marche provenant des petites déformations accidentelles du spiral.

33. *Calcul de la perturbation due au poids du spiral.* — Le

vecteur  $\vec{z}$ , défini par (43), correspond à la densité fictive

$$f(s) = \frac{s}{L} \left[ \left( j - \frac{s}{L} \right) J_0 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) - \frac{1}{\theta_0} J_1 \left( \theta_0 \frac{s}{L} \right) \right], \quad s = \widehat{AM}.$$

Appliquons-lui la formule (53). On a, en réduisant chaque second membre à sa partie principale,

$$f(A') = \frac{j}{L}, \quad f(B') = (j-1) J_0(\theta_0) - \frac{1}{\theta_0} J_1(\theta_0), \quad f_A(A') = -\frac{j}{L};$$

$$f_B(B') = \frac{1}{L} \left[ (j-1) J_0(\theta_0) - \frac{J_1(\theta_0)}{\theta_0} - J_0(\theta_0) - (j-1) \theta_0 J_1(\theta_0) - J_1(\theta_0) \right]$$

ou, en remplaçant  $J_1(\theta_0)$  par

$$J_0(\theta_0) - \frac{1}{\theta_0} J_1(\theta_0)$$

et se reportant à la formule (39),

$$f_B(B') = \frac{1}{L} [(j-1) F(\theta_0) - J_0(\theta_0)].$$

Portant dans (55), il vient

$$(66) \quad \vec{Z} = \frac{j}{L^2} [L(R\varphi_1 e^{-i\varphi_1} + 2a) - R^2\varphi_2 e^{-i\varphi_2}] \overrightarrow{OA'}$$

$$- \frac{1}{L} \left[ (R'\varphi_1 e^{i\varphi_1} - 2a) F_1(\theta_0) + \frac{R'^2}{L} \varphi_2 e^{i\varphi_2} F_2(\theta_0) \right] \overrightarrow{OB'}.$$

en posant

$$(67) \quad \begin{cases} F_1(x) = (1-j)J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}, \\ F_2(x) = 2J_0(x) + (1-j)F(x). \end{cases}$$

(A suivre.)