BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GRYNAEUS

Sur les systèmes de Pfaff

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 74-97
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__74_0>

SUR LES SYSTÈMES DE PFAFF;

Par M. E. Grynaeus.

INTRODUCTION (*).

Après l'introduction de la méthode des « formes à multiplication extérieure » par M. E. Cartan, la théorie des systèmes de Pfaff faisait de grands progrès par les travaux de MM. E. Cartan et E. Goursat. D'un autre côté le calcul de Ricci exigeait à reprendre cette même théorie suivant ses propres méthodes. Le premier pas dans cette direction fut fait par M. J. A. Schouten, concernant le problème de Pfaff proprement dit dans son Livre sur le « Calcul de Ricci ».

Dans la théorie des p-vecteurs (non seulement simples), M. E. Goursat envisage quatre régions covariantes, celles de la dérivée alternée $W_{[\mu\lambda_1\ldots\lambda_p]}$, du p-vecteur $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$, de la quantité $W_{[\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} w_{\nu_1\ldots\nu_p]}$ relativement aux p premiers indices, de même celles des systèmes de quantités, obtenus par l'adjonction du p-vecteur aux quantités précédentes. Or il se trouve que, dans la théorie des p-vecteurs *simples*, il est plus satisfaisant d'introduire au lieu de la seconde région covariante mentionnée celle de la quantité $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p-2}[\lambda_{p-1}\lambda_p} w_{\nu_1\ldots\nu_p]}$. On a ainsi quatre régions covariantes, celles de $W_{[\mu\lambda_1\ldots\lambda_p]}$ de $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p-2}[\lambda_{p-1}\lambda_p} w_{\nu_1\ldots\nu_p]}$ et celles des systèmes de quantités obtenus par l'adjonction du p-vecteur aux quantités précédentes, dont les dimensionalités étant respectivement c', γ', c et γ, le premier de ces nombres est le rang de la dérivée alternée, le troisième la classe du p-vecteur, et le dernier la classe du système de Pfaff correspondant au p-vecteur.

(*) Qu'il me soit permis d'exprimer toute ma reconnaissance à M. J. A. Schouten pour les encouragements qu'il m'a donnés au cours de ce travail.

Comme on démontre dans la suite, ces nombres sont liés par relations respectives suivantes :

$$\text{(A)} \qquad r = \begin{cases} c', \\ c'+1, \\ p; \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \gamma' = \begin{cases} c'-1, \\ c', \\ 0; \end{cases}$$

$$\text{(C)} \qquad \gamma = \begin{cases} c-1, \\ c. \end{cases}$$

(A) permet de répartir les p-vecteurs simples d'une E_n d'une manière invariante en trois types : I, II, III, distincts.

(B) permet de distinguer trois sous-types de p-vecteurs simples appartenant au type I : sous-types I a, I b, I c.

Les p-vecteurs simples du type II se répartissent en deux sous-types : II a et II b.

Les p-vecteurs simples du type III sont les produits-gradients d'ordre p de la E_n.

Quant à (C) avec son aide on démontre que la réduction d'un système de Pfaff à sa forme réduite se fait par une transformation de la forme

$$^{*}w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \sigma w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$$

On trouve enfin que les systèmes de Pfaff d'une E_n (à une transformation de la forme envisagée près) sont de trois types : ceux du premier correspondent aux p-vecteurs simples du type I b ; ceux du second sont de deux sous-types, correspondant respectivement aux p-vecteurs du type II a et II b ; ceux du troisième sont les systèmes de Pfaff complètement intégrables d'ordre p de la E_n.

I.

1. La *région contrevariante* d'un système de quantités covariantes $\overset{x}{v}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p_x}}$ $(x = 1, \ldots, r)$ dans une E_n [1] est l'ensemble des solutions indépendantes du système d'équation en w^{λ}

$$(1) \qquad w^{\lambda_y} \overset{x}{v}_{\lambda_1 \ldots \lambda_y \ldots \lambda_{p_x}} = 0 \qquad (x = 1, \ldots, r;\ y = 1, \ldots, p_x) \quad (^2).$$

La *région covariante* est l'ensemble des vecteurs covariants contenant toutes les directions de la région contrevariante.

La *région contrevariante* d'une quantité covariante $v_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ par rapport aux q premiers indices est l'ensemble des solutions indépendantes du système d'équation en w^{λ}

$$(2) \qquad w^{\lambda_y} v_{\lambda_1 \ldots \lambda_y \ldots \lambda_p} = 0 \qquad (y = 1, \ldots, q).$$

Le nombre des solutions indépendantes étant s la région covariante a la *dimensionalité* $n - s$ et elle définit à un facteur scalaire près un $(n - s)$-vecteur covariant simple, le $(n - s)$-vecteur de la région covariante. Le nombre $n - s$ sera appelé le *rang* du système $\overset{x}{v}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p_x}}$ respectivement de $v_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ par rapport aux indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$.

2. Étant donné un p-vecteur simple $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ la région covariante de sa dérivée alternée

$$(3) \qquad W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \nabla_{[\mu} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]}$$

sera appelée R', sa dimensionalité c' et son c'-vecteur $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}}$. On peut évidemment choisir (et cela plus d'une manière) $c' - p - 1$ vecteurs $\overset{p+2}{u}_{\lambda} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda}$ tels que

$$(4) \qquad G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = W_{[\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} \overset{p+2}{u}_{\lambda_{p+2}} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]}.$$

La région covariante des deux quantités $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ et $W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ sera appelée R, sa dimensionalité c et son c-vecteur $H_{\lambda_1 \ldots \lambda_c}$. c' est le rang de $W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p}$, c s'appelle la *classe* de $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ (³).

3. Si $W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est identiquement égal à zéro, on sait que $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est produit-gradient, $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \overset{1}{S}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p}{S}_{\lambda_p]}$ (⁴). Donc $c' = 0$; $R' = 0$; $c = p$. La région R est définie par le p-vecteur $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ lui-même : $H_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$. Réciproquement, si $c' = 0$, ou bien si $c = p$, $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est produit-gradient.

4. *Les conditions d'intégrabilité du système d'équations aux* *différentielles totales*

$$(5) \qquad dx^\lambda \overset{y}{u}_\lambda = 0 \qquad (y = 1, \ldots, r),$$

les $\overset{y}{u}_\lambda (y = 1, \ldots, r)$ *étant linéairement indépendantes ou non, sont*

$$(6) \qquad (\nabla_{[\mu} \overset{y}{u}_\lambda) V_{\lambda_1 \ldots \lambda_s]} = 0 \qquad (y = 1, \ldots, r),$$

$V_{\lambda_1 \ldots \lambda_s} (s \leqq r)$ *étant le s-vecteur de la région covariante des* $\overset{y}{u}_\lambda (y = 1, \ldots, r)$.

La démonstration se fait facilement, tenant compte du cas où les vecteurs $\overset{y}{u}_\lambda$ sont linéairement indépendants (5). En se rapportant à ce théorème on démontre :

Les c'- et c-vecteurs simples $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}}$ *et* $H_{\lambda_1 \ldots \lambda_c}$ *sont respectivement* $X_{n-c'}$- *et* X_{n-c}-*formant* (6).

Les conséquences de ce dernier théorème sont les suivantes :

a Les régions R' *et* R *peuvent être définies par des produits-gradients.* $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}}$ et $H_{\lambda_1 \ldots \lambda_c}$ étant respectivement $X_{n-c'}$- X_{n-c}-formant, ont la forme

$$(7) \qquad G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = \sigma \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{c'}{s}_{\lambda_{c'}]}; \qquad \overset{x}{s}_\lambda = \nabla_\lambda \overset{x}{s} \qquad (x = 1, \ldots, c'),$$

$$(8) \qquad H_{\lambda_1 \ldots \lambda_c} = \tau \overset{1}{z}_{[\lambda_1} \ldots \overset{c}{z}_{\lambda_c]}; \qquad \overset{y}{z}_\lambda = \nabla_\lambda \overset{y}{z} \qquad (y = 1, \ldots, c).$$

Les scalaires σ et τ n'entrant pas dans la définition des régions R' et R il est permis de choisir $\sigma = \tau = 1$.

b. Par suite de la définition de R, $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ *et* $W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ *ont, pour* $c' \neq 0$, *la forme*

$$(9) \begin{cases} (a) \qquad w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \displaystyle\sum_{(r_1 \ldots r_p)}^{c} \alpha^{r_1 \ldots r_p} \overset{r_1}{z}_{[\lambda_1} \ldots \overset{r_p}{z}_{\lambda_p]}, \\ (b) \qquad W_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} = \displaystyle\sum_{(r_1 \ldots r_{p+1})}^{c} \beta^{r_1 \ldots r_{p+1}} \overset{r_1}{z}_{[\lambda_1} \ldots \overset{r_{p+1}}{z}_{\lambda_{p+1}]}, \end{cases}$$

les sommations étant étendues aux combinaisons p à p respec-

tivement $(p+1)$ *à* $(p+1)$ *de* $(1, 2, \ldots, c)$, *les coefficients* $\alpha^{r_1 \ldots r_p}$ *et* $\beta^{r_1 \ldots r_{p+1}}$ *ne dépendant que des* $\overset{x}{z}(x = 1, \ldots, c)$ [7].

c. On peut encore dire que c *est le nombre minimum de variables indépendantes à l'aide desquelles* $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ *peut s'exprimer* [8]. $(9\,a)$ montre que $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ s'exprime au moyen de c-variables indépendantes $\overset{y}{z}(y = 1, \ldots, c)$. Qu'il ne peut pas s'exprimer par un nombre moindre, disons $\bar{c}(\bar{c} < c)$ variables indépendantes, cela résulte de ce que, si cela était possible, comme la dérivation n'introduit pas de nouvelles variables, $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ et $W_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}}$ auraient la forme $(9\,a)$ et $(9\,b)$ où ne figureraient que $\bar{c}$ variables. Mais alors R serait au plus de dimensionalité $\bar{c} < c$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

5. Les formules $(9a, 9b)$ donnent lieu à introduire une notion importante : celle du *rang d'un scalaire relativement au p-vecteur simple* $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ [9]. Soit s un scalaire. En posant $s =$ const. il peut se faire que par suite de cette relation la classe c de $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ s'abaisse. Comme il résulte de $(9a)$ un tel abaissement ne pourra se produire que si s est uniquement fonction des $\overset{x}{z}\,(x = 1, \ldots, c)$, donc si

$$(10) \qquad s_{[\lambda}\,H_{\lambda_1 \ldots \lambda_c]} = 0.$$

Supposons qu'il en soit ainsi et que la relation $s =$ const. abaisse la classe de $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ de r unités. M. Goursat appelle *le nombre r le rang du scalaire s relativement au p-vecteur* $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ et il démontre le théorème suivant :

Le $(p+1)$ *vecteur simple*

$$(11) \qquad \bar{w}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} = w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_p}\, s_{\lambda_{p+1}]}$$

étant différent de zéro et de classe $\bar{c}$, *le rang* r *de* s *par rapport à* $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ *est*

$$(12) \qquad r = c - \bar{c} + 1.$$

Si $\bar{w}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ *est égal à zéro,* s *est de rang* c *relativement à* $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$.

On peut aussi définir le rang d'un groupe de scalaires $\overset{1}{s} \ldots \overset{q}{s}$ par rapport à $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$. Si par suite des relations $\overset{x}{s} = \text{const.}$ $(x = 1 \ldots q)$ la classe du p-vecteur s'abaisse de r unités, r est le rang du groupe de scalaires $\overset{x}{s}$ $(x = 1 \ldots q)$ par rapport à $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$.

II.

6. Pour $c \neq p$, deux cas peuvent se présenter : la région R′ contient la région du p-vecteur $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$, ou bien elle ne la contient pas. Selon ces deux possibilités :

I. $$w_{\lambda_1\ldots[\lambda_p} G_{\nu_1\ldots\nu_{c'}]} = 0,$$
II. $$w_{\lambda_1\ldots[\lambda_p} G_{\nu_1\ldots\nu_{c'}]} \neq 0.$$

I. étant satisfait, $c' = c$, $R' = R$, $G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}} = H_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}}$ et $G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}}$ a la forme

$$G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}} = w_{[\lambda_1\ldots\lambda_p} \overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]}. \tag{13}$$

Pour discuter le cas II remarquons que

$$W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} = \sum_x^p \overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{x-1}{w}_{\lambda_{x-1}} \overset{x}{w}_{\mu\lambda_x} \overset{x+1}{w}_{\lambda_{x+1}} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_p]} \tag{14}$$
$$w_{\mu\lambda} = {}_{[\mu} w_{\lambda]}$$

et que par suite, quels que soient les deux facteurs $\overset{x}{w}_\lambda$ et $\overset{y}{w}_\lambda$,

$$\overset{x}{w}_{[\alpha} \overset{y}{w}_{\beta} W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p]} = 0, \tag{15}$$

donc, à cause de (4),

$$\overset{x}{w}_{[\alpha} \overset{y}{w}_{\beta} G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}]} = 0. \tag{16}$$

Ces préliminaires posées, nous pouvons toujours supposer, sans restreindre la généralité, que

$$\overset{p}{w}_{[\lambda} G_{\nu_1\ldots\nu_{c'}]} \neq 0. \tag{17}$$

La région covariante de $\overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}]}$ est complètement déterminée par $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ et $G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}}$ comme leur intersection; le choix de $\overset{p}{w}_\lambda$ offre une certaine liberté, puisqu'il peut être remplacé par $\overset{p}{w}_\lambda + \alpha_1 \overset{1}{w}_\lambda + \ldots + \alpha_{p-1} \overset{p-1}{w}_\lambda$.

Nous démontrons que dans ces conditions on a en même temps

$$(18)\quad \begin{cases} (a) & w_{\lambda_1\ldots[\lambda_p} \overset{p}{w}_{\nu_1} G_{\nu_2\ldots\nu_{c'+1}]} = 0, \\ (b) & W_{\mu\lambda_1\ldots[\lambda_p} \overset{p}{w}_{\nu_1} G_{\nu_2\ldots\nu_{c'+1}]} = 0. \end{cases}$$

Mais s'il en est ainsi, alors $c = c' + 1$ et $H_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'+1}} = \overset{p}{w}_{[\lambda_1} G_{\lambda_2\ldots\lambda_{c'+1}]}$. (18 b) est évident d'après la signification de $G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}}$, et (18 a) est conséquence de (16). Dans le cas II, on peut toujours déterminer une telle décomposition de $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ en facteurs simples, $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_p]}$ que l'on ait

$$(19)\qquad G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}} = \overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}} \overset{p}{u}_{\lambda_p} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]}.$$

Un p-vecteur simple sera dit d'être du type I, II, ou III, selon qu'il satisfait à I ou II ou bien si $c = p$. Les p-vecteurs simples du type III sont donc les produit-gradients d'ordre p de la E_n.

7. *Les p-vecteurs simples du type I.* — Par suite de (13) $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est une somme de p-vecteurs simples construits à l'aide des vecteurs $\overset{x}{w}_\lambda$, $\overset{y}{u}_\lambda$ $(x = 1 \ldots p, y = p+1 \ldots c')$. En rangeant les termes de cette somme suivant le nombre des facteurs $\overset{x}{w}_\lambda$ qu'ils contiennent, on obtient

$$(20)\quad W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} = t_{[\mu} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]} \\ \sum_{x}^{p} \sum_{yz}^{p+1\ldots c'} \gamma^{xyz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{1}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{x+1}{w}_{\lambda_{x-1}} \overset{z}{u}_{\lambda_x} \overset{x-1}{w}_{\lambda_{x+1}} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_p]},$$

t_μ étant un vecteur dépendant linéairement des u_λ et $\gamma^{xyz} = -\gamma^{xzy}$. A cause de (15) il n'y aura pas de termes où deux ou plusieurs facteurs $\overset{x}{w}_\lambda$ manquent. Remarquons qu'il est est impossible que deux ou plusieurs des vecteurs u_λ n'entrent pas dans la triple somme du second membre de (20), car dans ce cas R′ ne pourrait pas être de dimensionalité c'. Il peut bien arriver qu'un des vecteurs u_λ n'entre pas dans la triple somme, mais alors il figure sûrement dans l'expression de t_μ, car dans le cas contraire R′ serait de dimensionalité moindre que c'. Il peut enfin arriver que l'expression (20) de $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$ se réduise à son premier terme, la triple somme étant égale à zéro.

Généralement, excepté la troisième possibilité mentionnée, $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$ se présentera sous la forme (20) tous les $\overset{y}{u}_\lambda$ $(y = p+1\ldots c')$ figurant dans la triple somme, même s'il est possible de la ramener, par un choix convenable des u_λ, à une forme telle qu'un des vecteurs u_λ n'entre pas dans la triple somme du second membre de (20). Nous avons donc trois possibilités.

I *a*. *La triple somme n'étant pas nulle, il est possible de choisir les u_λ de telle manière que l'un des vecteurs u_λ n'entre dans l'expression de $W_{\mu\lambda\ldots\lambda_p}$ que par l'intermédiaire de t_μ.*

I *b*. *La triple somme n'étant pas nulle, un tel choix des u_λ est impossible.*

I *c*. *La triple somme est nulle.*

On peut caractériser ces trois possibilités d'une manière invariante et à cet effet nous allons introduire la série de quantités suivantes :

$$W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p-k}[\lambda_{p-k+1}\ldots\lambda_p}w_{\nu_1\ldots\nu_p]} \qquad (k = 1\ldots p). \tag{21}$$

Or il est clair, par suite de (14), que pour $k \geqq 3$ ces quantités sont identiquement égales à zéro ([10]); il ne nous reste que deux d'entre elles

$$W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p-1}[\lambda_p}w_{\nu_1\ldots\nu_p]} \quad \text{pour } k = 1, \tag{22}$$

$$W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p-2}[\lambda_{p-1}\lambda_p}w_{\nu_1\ldots\nu_p]} \quad \text{pour } k = 2. \tag{23}$$

La région covariante de la première coïncidant avec R', elle ne nous donne rien de nouveau. Quant à la seconde, *sa région covariante R'_1 étant de la dimensionalité γ'* nous démontrons qu'*on a*

$$\gamma' = \begin{cases} c'-1, \\ c' \end{cases}$$

ou bien

$$\gamma' = 0;$$

le premier cas se présentant pour la possibilité I *a*, *le second pour* I *b*, *le troisième pour* I *c et réciproquement.*

Par suite de (20) la région contrevariante de la quantité (23) est définie par les solutions indépendantes du système d'équations en e^{μ}

$$(24)\quad \begin{cases} (a)\ \displaystyle\sum_{x}^{1\ldots p}\ \sum_{yz}^{p+1\ldots c'} \gamma^{xyz} e^{\mu} \overset{1}{w}_{[\mu} \overset{2}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{x-1}{w}_{\lambda_{x-2}} \overset{x+1}{w}_{\lambda_{x-1}} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_{p-2}]} \overset{y}{u}_{[\lambda_{p-1}} \overset{x}{u}_{\lambda_p} w_{\nu_1\ldots\nu_p} = 0, \\ (b)\ \displaystyle\sum_{x}^{1\ldots p}\ \sum_{yz}^{p+1\ldots c'} \gamma^{xyz} \overset{1}{w}_{[\mu} \overset{2}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{x-1}{w}_{\lambda_{x-2}} \overset{x+1}{w}_{\lambda_{x-1}} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_{p-2}} e^{\lambda_p} \overset{y}{u}_{[\lambda_{p-1}} \overset{x}{u}_{\lambda_p} w_{\nu_1\ldots\nu_p} = 0. \end{cases}$$

Chaque solution de (24 b) est aussi solution de

$$(25)\qquad e^{\lambda_1} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = 0,$$

donc, $F_{\lambda_1\ldots\lambda_{\gamma'}}$ désignant le γ'-vecteur de R_1', $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est contenu dans $F_{\lambda_1\ldots\lambda_{\gamma'}}$. De son côté $F_{\lambda_1\ldots\lambda_{\gamma'}}$ est contenue dans $G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}}$.

Ceci posé, supposons que la possibilité I a se réalise. Alors sans restreindre la généralité on peut encore supposer $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$ mise sous la forme (20) où $\overset{c'}{u}_{\lambda}$ n'entre pas dans la triple somme, les coefficients γ^{xyz} sont donc égaux à zéro pour y ou $z = c'$. Les équations (24 a) et (24 b) correspondant à ce cas montrent que la région R_1' de la quantité (23) ne contiendra que les $c' - 1$ vecteurs $\overset{1}{w}_{\lambda} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda} \overset{p+1}{u}_{\lambda} \ldots \overset{c'-1}{u}_{\lambda}$ mais elle les contiendra tous. Donc

$$(26)\qquad \gamma' = c' - 1.$$

Supposons, réciproquement, que $\gamma' = c' - 1$. D'après ce qui vient d'être dit de $F_{\lambda_1\ldots\lambda_{\gamma'}}$ on peut choisir $\overset{c'}{u}_{\lambda}$ de telle manière que l'on ait

$$(27)\qquad G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}} = F_{[\lambda_1\ldots\lambda_{c'-1}} \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]} = w_{[\lambda_1\ldots\lambda_p} \overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]}.$$

En formant alors la quantité (23) on voit que l'on doit avoir $\gamma^{xyz} = 0$ pour y ou $z = c'$, car autrement $F_{\lambda_1\ldots\lambda_{\gamma'}}$, contiendrait $\overset{c'}{u}_{\lambda}$.

Dans le cas I b, puisque $\gamma' \geqq c' - 1$, on a $\gamma' = c'$, car si l'on avait $\gamma' = c' - 1$ on serait ramené à I a.

Enfin dans le cas I c on a $\gamma' = 0$; $c' = p + 1$; et réciproquement, si $\gamma' = 0$ on a $c' = p + 1$. $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est X_{n-p}-formant sans être produit-gradient.

8. Introduisons encore la région covariante R_1 du système

$$w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}, \qquad W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p-2}[\lambda_{p-1}\lambda_p} w_{\nu_1\ldots\nu_p]}.$$

R_1 coïncide avec R'_1 pour les types I a et I b ; pour I c, $\gamma = p$; R_1 étant définie par $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ lui-même. Le γ-vecteur de R_1 sera désigné par $K_{\lambda_1 \ldots \lambda_\gamma}$.

En résumé, les p-vecteurs simples du type I se répartissent en trois sous-types, ayant les caractères invariants suivants :

I a. $\quad R' = R ; \qquad R'_1 = R_1 ; \qquad c' = c ; \qquad \gamma' = \gamma = c' - 1,$

$$W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = t_{[\mu} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]} + \sum_{x}^{1 \ldots p} \sum_{yz}^{p+1 \ldots c'-1} \gamma^{xyz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{1}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{x-1}{w}_{\lambda_{x-1}} \overset{z}{u}_{\lambda_x} \overset{x+1}{w}_{\lambda_{x+1}} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_p]}.$$

$$F_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'-1}} = K_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'-1}} = w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_p} \overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{c'-1}{u}_{\lambda_{c'-1}]},$$

$$G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = H_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = t_{[\lambda_1} F_{\lambda_2 \ldots \lambda_{c'}]}.$$

I b. $\qquad R' = R = R'_1 = R_1 ; \qquad c' = c = \gamma' = \gamma.$

$$W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = t_{[\mu} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]} + \sum_{x}^{1 \ldots p} \sum_{yz}^{p+1 \ldots c'} \gamma^{xyz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{1}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{x-1}{w}_{\lambda_{x-1}} \overset{z}{u}_{\lambda_x} \overset{x+1}{w}_{\lambda_{x+1}} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_p]}$$

$$G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = H_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = F_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = K_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_p} \overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]}.$$

I c. $\quad R' = R, \qquad R'_1 = 0, \qquad c' = c = p + 1, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma = p.$

$$G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} = H_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} = W_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} = t_{[\lambda_1} w_{\lambda_2 \ldots \lambda_{p+1}]},$$

$$K_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} \qquad (F_{\lambda_1 \ldots \lambda_{\gamma'}} \text{ n'existe pas}).$$

$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ *est* X_{n-p}*-formant, sans être produit-gradient.*

9. *Les p-vecteurs du type II.* — On a, d'après (19),

$$G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = \overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}} \overset{p}{u}_{\lambda_p} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]} ; \tag{28}$$

cette expression de $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}}$ jointe à la formule (14) donne

$$W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \sum_{yz}^{p \ldots c'} \gamma^{yz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{1}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}} \overset{z}{u}_{\lambda_p]} \qquad (\gamma^{yz} = -\gamma^{zy}) ; \tag{29}$$

pour chaque valeur de y ($y = p \ldots c'$) un au moins des coefficients γ^{yz} ($z = p \ldots c'$) étant différent de zéro, car autrement R′ ne saurait être de dimensionalité c'. Les deux régions R'_1 et R_1 ont pour γ' respectivement γ-vecteurs

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} &= G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = \overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}} \overset{p}{u}_{\lambda_p} \ldots \overset{c'}{u}_{\lambda_{c'}]} & (\gamma' = c') \\ K_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'+1}} &= H_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'+1}} = \overset{p}{w}_{[\lambda_1} G_{\lambda_2 \ldots \lambda_{c'+1}]} & (\gamma = c = c' + 1). \end{aligned} \right.$$

En outre (29) montre que

$$(31)\qquad \overset{x}{w}_{[\lambda} W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p]} = - \overset{x}{w}_{[\mu\lambda} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]} = 0 \qquad (x = 1 \ldots p-1),$$

$$(32)\qquad \overset{p}{w}_{[\lambda} W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p]} = - \overset{p}{w}_{[\mu\lambda} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]} = - u_{[\lambda\mu} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]}.$$

en désignant par $u_{\mu\lambda}$ le bivecteur $\sum\limits_{yz}^{p\ldots c'} \gamma^{yz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{z}{u}_{\lambda]}$, donc on a aussi

$$(33)\ \begin{cases} (a) & \overset{x}{w}_{\mu\lambda} = \sum\limits_{r}^{1\ldots p} q^{xr}_{\mu} \overset{r}{w}_{\lambda} \qquad (x = 1 \ldots p-1), \\ (b) & \overset{p}{w}_{\mu\lambda} = \sum\limits_{r}^{1\ldots p} q^{pr}_{\mu} \overset{r}{w}_{\lambda} + u_{\mu\lambda}. \end{cases}$$

(29) aussi bien que (33) montrent que l'on a

$$(34)\qquad c' = p - 2k - 1; \qquad c = p - 2k,$$

le rang du bivecteur $u_{\mu\lambda}$ étant $2k$.

10. Les p-vecteurs du type II se répartissent en deux sous-types distincts selon que le $(p-1)$-vecteur simple $\overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}]}$ déterminé à un facteur scalaire près comme intersection de $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ et $G_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'}}$ est :

II a. X_{n-p+1}-formant ;
II b. N'est pas X_{n-p+1}-formant.

II a. Dans ce cas on a

$$(35)\quad \overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}]} = \sigma \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}]}, \qquad \overset{y}{s}_{\lambda} = \nabla_\lambda \overset{y}{s} \qquad (y = 1 \ldots p-1),$$

et par suite $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est le produit de ces $(p-1)$-vecteurs gradients par un vecteur w_λ .

$$(36)\qquad w_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} w_{\lambda_p]},$$

w_λ ne pouvant être ni vecteur gradient, ni produit d'un vecteur gradient par un scalaire, car alors $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ appartiendrait au type III respectivement I c.

11. Envisageons dans toute leur généralité les p-vecteurs simples de la forme (36); w_λ étant connu, soit sa classe (c_0). Le groupe de scalaires $\overset{1}{s} \dots \overset{p-1}{s}$ étant de rang r_0 par rapport à w_λ (11) deux cas peuvent se présenter :

$$(\alpha) \qquad c_0 - r_0 = 2k \text{ pair.}$$

$$(\beta) \qquad c_0 - r_0 = 2k + 1 \text{ impair.}$$

Introduisons $(n - p + 1)$ autres scalaires indépendants $\overset{p}{s} \dots \overset{n}{s}$, w_λ aura la forme

$$(37) \qquad w_\lambda = \sum_x^{1\dots n} \alpha_x \overset{x}{s}_\lambda.$$

Selon l'hypothèse, le vecteur

$$(38) \qquad \bar{w}_\lambda = \sum_x^{p\dots n} \alpha_x \overset{x}{s}_\lambda$$

est de la classe $c_0 - r_0$, si dans les coefficients α_x on regarde les $\overset{x}{s}$ $(x = s \dots p-1)$ comme des constantes. Il sera donc réductible suivant (α) ou (β) à l'une des formes

$$(39) \qquad \bar{w}_\lambda = \begin{cases} \overset{1}{z}\overset{2}{z}_\lambda + \dots + \overset{2k-1}{z}\overset{2k}{z}_\lambda, \\ \overset{0}{z}_\lambda + \overset{1}{z}\overset{2}{z}_\lambda + \dots + \overset{2k-1}{z}\overset{2k}{z}_\lambda, \end{cases}$$

les scalaires z étant indépendants, tant que les $\overset{x}{s}(x = 1 \dots p-1)$ sont regardés comme des constantes. On démontre alors facilement que les scalaires s et z sont indépendants et que w_λ — suivant (α) ou (β) — est de la forme

$$(40) \qquad w_\lambda = \sum_x^{1\dots p-1} \alpha_x \overset{x}{s}_\lambda + \begin{cases} \overset{1}{z}\overset{2}{z}_\lambda + \dots + \overset{2k-1}{z}\overset{2k}{z}_\lambda, \\ \overset{0}{z}_\lambda + \overset{1}{z}\overset{2}{z}_\lambda + \dots + \overset{2k-1}{z}\overset{2k}{z}_\lambda\,; \end{cases}$$

donc

$$(41) \begin{cases} (\alpha) \\ \qquad w_{\lambda_1\dots\lambda_p} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \dots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} w_{\lambda_p]} = \\ (\beta) \end{cases} \begin{cases} \displaystyle\sum_x^{1\dots k} \overset{2x-1}{z}\, \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \dots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} \overset{2x}{z}_{\lambda_p]}, \\ \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \dots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} \overset{0}{z}_{\lambda_p]} + \displaystyle\sum_x^{1\dots k} \overset{2x-1}{z}\, \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \dots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} \overset{2x}{z}_{\lambda_p]}, \end{cases}$$

les scalaires s et z étant indépendants.

Dans le cas (α), $w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ appartient au type I plus précisément au type I c si $k = 1$; au type I a si $k > 1$. Dans le cas (β) il appartient au type III étant produit gradient si $k = 0$; au type II, si $k > 0$, puisque

$$(42)\quad \begin{cases} G_{\lambda_1 \dots \lambda_{p+2k-1}} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \dots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} \overset{1}{z}_{\lambda_p} \dots \overset{2k}{z}_{\lambda_{p+2k-1}]} \\ H_{\lambda_1 \dots \lambda_{p+2k}} = \overset{1}{s}_{[\lambda_2} \dots \overset{p-1}{s}_{\lambda_p} \overset{0}{z}_{\lambda_1} \dots \overset{2k}{z}_{\lambda_{p+2k}]} = \overset{0}{z}_{[\lambda_1} G_{\lambda_2 \dots \lambda_{p+2k}]}. \end{cases}$$

En posant $\overset{x}{w}_\lambda = \overset{x}{s}_\lambda$ $(x = 1, \dots, p-1)$; $\overset{p}{w}_\lambda = w_\lambda$, on voit, d'après (42) et (41 β), que

$$(43)\quad \begin{cases} \overset{x}{w}_{[\lambda} G_{\lambda_1 \dots \lambda_{p+2k-1}]} = \overset{x}{s}_{[\lambda} G_{\lambda_1 \dots \lambda_{p+2k-1}]} = 0, \\ \overset{p}{w}_{[\lambda} G_{\lambda_1 \dots \lambda_{p+2k-1}]} = \overset{0}{z}_{[\lambda} G_{\lambda_1 \dots \lambda_{p+2k-1}]} \neq 0; \end{cases}$$

donc (41 β) $k > 0$ appartient bien au type II a.

12. II b. Dans ce cas il existe au moins un nombre y $(1 \leqq y \leqq p-1)$ tel que dans (33 a)

$$(44)\quad \overset{yp}{q}_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p]} \neq 0.$$

Nous démontrons que, dans (33 b), $u_{\mu\lambda}$ peut être remplacé par un bivecteur simple [12]. Prenons la dérivée alternée de $\overset{y}{w}_{\mu\lambda}$ en remarquant qu'elle est identiquement égale à zéro [13]. On trouve

$$(45)\quad \sum_r^{1 \dots p} \overset{yr}{q}_{[\nu\mu} \overset{r}{w}_{\lambda]} + \sum_r^{1 \dots p} \overset{yr}{q}_{[\mu} \overset{r}{w}_{\nu\lambda]} = 0 \qquad (\overset{yr}{q}_{\nu\mu} = \nabla_{[\mu} \overset{yr}{q}_{\nu]}).$$

ou bien, en remplaçant dans (45) les $\overset{r}{w}_{\nu\lambda}$ $(r = 1 \dots p-1)$ par leurs expressions (33 a),

$$(46)\quad \sum_r^{1 \dots p} \overset{yr}{q}_{[\nu\mu} \overset{r}{w}_{\lambda]} + \sum_r^{1 \dots p-1} \sum_s^{1 \dots p} \overset{yr}{q}_{[\mu} \overset{rs}{q}_{\nu} \overset{s}{w}_{\lambda]} + \overset{yp}{q}_{[\mu} \overset{p}{w}_{\nu\lambda]} = 0,$$

multiplication alternée par $w_{\nu_1 \dots \nu_p}$ donne

$$(47)\quad \overset{p}{w}_{[\nu\lambda} \overset{yp}{q}_{\mu} w_{\nu_1 \dots \nu_p]} = 0,$$

d'où il résulte que $\overset{p}{w}_{\nu\lambda}$ est de la forme

$$(48)\quad \overset{p}{w}_{\nu\lambda} = \overset{1}{a}_{[\nu} \overset{1}{w}_{\lambda]} + \overset{2}{a}_{[\nu} \overset{2}{w}_{\lambda]} + \dots + \overset{p}{a}_{[\nu} \overset{p}{w}_{\lambda]} + \overset{p+1}{a}_{[\nu} \overset{yp}{q}_{\lambda]};$$

selon l'hypothèse $\overset{yp}{q}_{[\mu}\, w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]}\, o\neq$; il en est de même de $\overset{p+1}{a_\nu}$: $\overset{p+1}{a}_{[\nu}\, w_{\nu_1\ldots\nu_n]}\neq o$; car s'il n'en était pas ainsi, on aurait $\overset{p}{w}_{[\nu\lambda}\, w_{\nu_1\ldots\nu_p]}=o$, donc $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ serait X_{n-p} -formant par suite du type I c ou III et pas du type II. Posons alors

$$\overset{p-1}{a_\nu} = \overset{1}{V}_\nu; \qquad \overset{yp}{q_\nu} = \overset{2}{V}_\nu \tag{49}$$

et nous aurons

$$(50)\left\{\begin{array}{ll}(a) & \overset{x}{w}_{\mu\lambda} = \sum_r^{1\ldots p} \overset{xr}{q}_{[\mu}\, \overset{r}{w}_{\lambda]}, \\ (b) & \overset{p}{w}_{\mu\lambda} = \sum_r^{1\ldots p} \overset{pr}{q}_{[\mu}\, \overset{r}{w}_{\lambda]} + \overset{1}{V}_{[\mu}\overset{2}{V}_{\lambda]}\end{array}\right.$$

et

$$W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} = \overset{1}{V}_{[\mu}\, \overset{1}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}}\, \overset{2}{V}_{\lambda_p]}; \tag{51}$$

donc $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est simple, sans que $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ soit X_{n-p} -formant. On a encore

$$(52)\left\{\begin{array}{l} G_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}} = W_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}} = \overset{1}{V}_{[\lambda_1}\, \overset{1}{w}_{\lambda_2} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_p}\, \overset{2}{V}_{\lambda_{p+1}} \\ \qquad (c' = p+1);\ (c = \gamma' = \gamma = p+2) \\ F_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}} = H_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}} = K_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}} = \overset{p}{w}_{[\lambda_1}\, G_{\lambda_2\ldots p+2]}. \end{array}\right.$$

Réciproquement si $c' = p+1$, sans que $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ soit X_{n-p} -formant, ni de la forme (36), on a $c = p+2$, et $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ appartient au type II b. En effet, $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est par hypothèse simple, donc

$$G_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}} = W_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}}.$$

Comme en outre $w_{\lambda_1\ldots[\lambda_p}\, G_{\nu_1\ldots\nu_{c'}]} \neq o$, donc

$$W_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}} = \overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}}\, \overset{1}{V}_{\lambda_p}\, \overset{2}{V}_{\lambda_{p+1}]} \qquad (cf.\ \text{n}^\circ\ 6)$$

et

$$H_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}} = w_{[\lambda_1\ldots\lambda_p}\, \overset{1}{V}_{\lambda_{p+1}}\, \overset{2}{V}_{\lambda_{p+2}]}.$$

En résumé, les p-vecteurs simples du type II se répartissent

en deux sous-types différents :

II a. $\qquad R'$; $\qquad R = R_1 = R'_1$; $\qquad c' = p + 2k - 1$;

$$\gamma' = c = \gamma = p + 2k \qquad (k > 0)$$

$$G_{\lambda_1\dots\lambda_{p+2k-1}} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1}\dots\overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}}\overset{1}{z}_{\lambda_p}\dots\overset{2k}{z}_{\lambda_{p+2k-1}]},$$

$$F_{\lambda_1\dots\lambda_{p+2k}} = H_{\lambda_1\dots\lambda_{p+2k}} = K_{\lambda_1\dots\lambda_{p+2k}} = \overset{0}{z}_{[\lambda_1}G_{\lambda_2\dots\lambda_{p+2k}]},$$

$w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ *est de la forme canonique*

$$w_{\lambda_1\dots\lambda_p} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1}\dots\overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}}\overset{0}{z}_{\lambda_p]} + \sum_{x}^{1\dots k}\overset{2x-1}{z}\;\overset{1}{s}_{[\lambda_1}\dots\overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}}\overset{2x}{z}_{\lambda_p]}.$$

II b. R'; $\qquad R = R_1 = R'_1$; $\qquad c' = p + 1$; $\qquad c = \gamma = \gamma' = p + 2$.

$$G_{\lambda_1\dots\lambda_{p+1}} = W_{\lambda_1\dots\lambda_{p+1}} = \overset{1}{w}_{[\lambda_1}\dots\overset{p-1}{w}_{\lambda_{p-1}}\overset{1}{V}_{\lambda_p}\overset{2}{V}_{\lambda_{p+1}]}$$

$$F_{\lambda_1\dots\lambda_{p+2}} = H_{\lambda_1\dots\lambda_{p+2}} = K_{\lambda_1\dots\lambda_{p+2}} = \overset{p}{w}_{[\lambda_1}G_{\lambda_2\dots\lambda_{p+2}]},$$

$w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ *n'étant ni X_{n-p}-formant, ni de la forme* $\overset{1}{s}_{[\lambda_1}\dots\overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}}w_{\lambda_p]}$ *sa dérivée alternée est simple.*

On a vu, que les p-vecteurs simples du type III sont les produits-gradients d'ordre p de la E_n.

Donc *pour les p-vecteurs simples du type* III *on a*

III. $\qquad R' = R'_1 = 0$, $\qquad R = R_1$; $\qquad c' = \gamma' = 0$; $\qquad c = \gamma = p$.

$G_{\lambda_1\dots\lambda_{c'}}$ et $F_{\lambda_1\dots\lambda_{\gamma'}}$ *n'existent pas,*

$$H_{\lambda_1\dots\lambda_p} = K_{\lambda_1\dots\lambda_p} = w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$$

et

$$w_{\lambda_1\dots\lambda_p} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1}\dots\overset{p}{s}_{\lambda_p]}.$$

Il est à remarquer que pour $p = 1$, c'est-à-dire pour les vecteurs covarients de la E_n le sous-type Ib n'existe pas; les sous-types IIa et IIb n'existent non plus, les vecteurs covariants du type II sont les vecteurs covariants de classe impaire de la E_n [11].

13. *Les γ'- et γ-vecteurs simples $F_{\lambda_1\dots\lambda_{\gamma'}}$ et $K_{\lambda_1\dots\lambda_\gamma}$* ***sont respectivement*** *$X_{n-\gamma'}$- et $X_{n-\gamma}$-formant.*

Ce théorème n'est à démontrer que pour les p-vecteurs du type Ia et Ic. En effet, d'après les résumés des n^{os} **8** et **12**, pour les autres types $F_{\lambda_1\dots\lambda_{\gamma'}}$ n'existe pas, ou bien il est identique à $G_{\lambda_1\dots\lambda_{c'}}$ et $K_{\lambda_1\dots\lambda_\gamma}$ identique à $H_{\lambda_1\dots\lambda_c}$. Pour les p-vecteurs du type Ic

$F_{\lambda_1\ldots\lambda_\gamma}$ n'existe pas, $K_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est identique à $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$, lequel est X_{n-p}-formant. Puisque, en outre, pour les p-vecteurs du type **I**a $F_{\lambda_1\ldots\lambda_\gamma} = K_{\lambda_1\ldots\lambda_\gamma}$, tout revient à démontrer que pour ces p-vecteurs $F_{\lambda_1\ldots\lambda_\gamma}$ est $X_{n-\gamma}$-formant. Or on a dans ce cas (*cf.* n° 8) $\gamma = c' - 1$ et

$$(53) \qquad F_{\lambda_1\ldots\lambda_{c'-1}} = w_{[\lambda_1\ldots\lambda_p} \overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{c'-1}{u}_{\lambda_{c'-1}]}.$$

Nous avons donc à prouver qu'en posant pour brièveté

$$\overset{y}{u}_{\mu\lambda} = \nabla_{[\mu} \overset{y}{u}_{\lambda]},$$

on a ([5]),

$$(54) \begin{cases} (a) & \overset{x}{w}_{[\mu\lambda} F_{\nu_1\ldots\nu_{c'-1}]} = 0 & (x = 1 \ldots p), \\ (b) & \overset{y}{u}_{[\mu\lambda} F_{\nu_1\ldots\nu_{c'-1}]} = 0 & (y = p+1 \ldots c'-1), \end{cases}$$

or l'expression de $W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$ (n° 8) montre que

$$(55) \quad \overset{x}{w}_{[\mu\lambda} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]} = -\overset{x}{w}_{[\lambda} W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p]} = \sum_{yz}^{p+1\ldots x-1} \gamma^{xyz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{z}{u}_{\lambda} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]}$$

et que par suite

$$(56) \qquad \overset{x}{w}_{\mu\gamma} = \sum_r^{1\ldots p} \overset{xr}{q}_{[\mu} \overset{r}{w}_{\lambda]} + \sum_{yz}^{p+1\ldots c'-1} \gamma^{yxz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{z}{u}_{\lambda]}.$$

En tenant compte de cette relation, (54 a) est évidente. Prenant la dérivée alternée de (56), on trouve

$$(57)\ \nabla_{[\omega} \overset{x}{w}_{\mu\lambda]} = \sum_r^{1\ldots p} \overset{xr}{q}_{[\omega\mu} \overset{r}{w}_{\lambda]} + \sum_r^{p} \overset{xr}{q}_{[\mu} \overset{r}{w}_{\lambda\omega]}$$
$$+ \sum_{yz}^{p+1\ldots c'-1} \left\{ (\nabla_{[\omega} \gamma^{xyz}) \overset{y}{u}_{\mu} \overset{z}{u}_{\lambda]} + \gamma^{xyz} \nabla_{[\omega} (\overset{y}{u}_{\mu} \overset{z}{u}_{\lambda]}) \right\} = 0,$$

comme pour chaque valeur de y l'un au moins des coefficients γ^{xyz} ($x = 1, \ldots\ p$, $z = p+1, \ldots, c'-1$) est différent de zéro, soit $\gamma^{cy_0z_0} \neq 0$. Multiplions alors (57) en alternant sur tous les indices par $w_{\nu_1\ldots\nu_p} \overset{p+1}{u}_{\nu_{p+1}} \ldots \overset{z_0-1}{u}_{\nu_{z_0-1}} \overset{z_0+1}{u}_{\nu_{z_0+1}} \ldots \overset{c'-1}{u}_{\nu_{c'-1}}$, nous aurons

$$(58) \qquad \overset{y_0}{u}_{[\omega\mu} F_{\nu_1\ldots\nu_{z_0-1}\lambda\nu_{z_0+1}\ldots\nu_{c'-1}]} = 0.$$

Par un choix convenable des indices x, y_0, z_0, on parvient à établir toutes les relations (54 b), ce qui démontre le théorème.

14. *Si $\gamma \neq c$, il existe une telle transformation*

$$ {}^*w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \sigma w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}, \tag{59}$$

que ${}^*\gamma = {}^*c = c - 1$.

Ce théorème n'est à démontrer que pour les p-vecteurs du type I a et I c. Pour les autres on a en effet $\gamma = c$. D'ailleurs il est évident pour les p-vecteurs du type I c.

Pour ceux du type I a on a (n° 8) $\gamma = c' - 1$ et, en outre,

$$ G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = t_{[\lambda_1} F_{\lambda_2 \ldots \lambda_{c'}]}, \tag{60}$$

$G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}}$ et $F_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'-1}}$ étant tous les deux produit-gradients, on peut, d'après un théorème de M. J. A. Schouten ([15]), remplacer t_λ dans (60) par un vecteur gradient $\overset{1}{z}_\lambda$ sans changer les autres facteurs

$$ G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{c'}} = \overset{1}{z}_{[\lambda_1} F_{\lambda_2 \ldots \lambda_{c'}]} = \overset{1}{z}_{[\lambda_1} w_{\lambda_2 \ldots \lambda_{p+1}} \overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+2}} \ldots \overset{c'-1}{u}_{\lambda_{c'}]}, \tag{61}$$

de sorte qu'on aura

$$ W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \alpha \overset{1}{z}_{[\mu} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]} + \sum_{k}^{p+1 \ldots c'-1} \alpha_k \overset{k}{u}_{[\mu} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]} + \sum_{x}^{p} \sum_{yz}^{p+1 \ldots c'-1} \gamma^{xyz} \overset{y}{u}_{[\mu} \overset{1}{w}_{\lambda_1} \ldots \overset{x-1}{w}_{\lambda_{x-1}} \overset{z}{u}_{\lambda_x} \overset{x+1}{w}_{\lambda_{x+1}} \ldots \overset{p}{w}_{\lambda_p]}, \tag{62}$$

$\alpha \neq 0$ et chacun des vecteurs $\overset{y}{u}_\lambda$ $(y = p+1, \ldots, c'-1)$ figurant *essentiellement* dans la triple somme, cela veut dire qu'il est impossible que $W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ puisse se mettre sous une forme telle que la triple somme contienne un nombre moindre de vecteurs u_λ que $c' - p - 1$.

Ceci posé, envisageons le p-vecteur ${}^*w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$. On aura

$$ {}^*W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = (\sigma_{[\mu} + \alpha \overset{1}{z}_{[\mu}) w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]} + \sigma \sum_{k}^{p+1 \ldots c'-1} + \sigma \sum_{x}^{p} \sum_{yz}^{p+1 \ldots c'-1} . \tag{63}$$

S'il est possible de déterminer le scalaire σ de telle manière que

$$ \sigma_\mu + \alpha \overset{1}{z}_\mu = \sum_{x}^{1 \ldots p} \beta_x \overset{x}{w}_\mu + \sigma \sum_{y}^{p+1 \ldots c'-1} \delta_y \overset{y}{u}_\mu, \tag{64}$$

alors (63) prendra la forme :

$$(65)\quad {}^{\star}\mathrm{W}_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} = \sigma\left\{\sum_{k}^{p+1\ldots c'-1}(\alpha_k + \delta_k)\overset{k}{u}_{[\mu}\,w_{\lambda_1\ldots\lambda_p]} + \sum_{x}^{1\ldots p}\sum_{kz}^{p+1\ldots c'-1}\right\}$$

et, d'après ce qui vient d'être dit sur la triple somme, il est clair que ${}^{\star}w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ appartiendra au type Ib avec

$$(66)\quad {}^{\star}c' = {}^{\star}c = {}^{\star}\gamma' = {}^{\star}\gamma = c' - 1 = c - 1.$$

Prenons la dérivée alternée de $\mathrm{W}_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p}$, remarquant qu'elle est identiquement égale à zéro ([13]). Alors (62), après dérivation et multiplication alternée par $\overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+1}}\ldots\overset{c'-1}{u}_{\lambda_{c'-1}}$, montre que

$$(67)\quad \alpha_{[\nu}\overset{1}{z}_{\mu}\,w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\overset{p+1}{u}_{\lambda_{p+1}}\ldots\overset{c'-1}{u}_{\lambda_{c'-1}]} = \alpha_{[\nu}\mathrm{G}_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{c'-1}]} = 0;$$

donc, d'après (8), α ne dépend que des scalaires $\overset{x}{z}(x = 1\ldots c)$. En outre la détermination de σ exigée par (64) prouve que l'on doit avoir $\sigma_{[\mu}\mathrm{H}_{\lambda_1\ldots\lambda_c]} = 0$ et que par suite

$$(68)\quad \sigma_{\mu} = -\alpha\overset{1}{z}_{\mu} + \gamma_2\overset{2}{z}_{\mu} + \ldots + \gamma_c\overset{c}{z}_{\mu}.$$

Tout revient donc à démontrer qu'on peut choisir σ de telle manière qu'il satisfasse à (68), α étant *donné* et ne dépendant que des $\overset{x}{z}(x = 1\ldots c)$, les facteurs γ étant indéterminés. Or il est clair qu'on peut satisfaire à cette condition d'une infinité de manières. En effet, les γ étant indéterminés, nous pouvons supposer qu'ils ne dépendent que des $\overset{x}{z}(x = 1\ldots c)$. Faisons alors le changement de variables $\overset{x}{z} = y^x(x = 1\ldots c)$; (68) devient

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y^1} = -\alpha;\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y^x} = \gamma_x\qquad (x = 2\ldots c);$$

l'unique condition à laquelle σ doit satisfaire est donc la suivante :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y^1} = -\alpha.$$

La détermination de σ n'exige donc qu'une simple quadrature.

Nous voyons que, généralement, par une transformation (59) convenablement choisie, le p-vecteur simple $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ du type Ia sera transformé dans un p-vecteur simple $^{*}w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ du type I b. Mais il y a deux exceptions :

1° Si $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ étant du type I a est de la forme $\overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p+1}{s}_{\lambda_{p-1}} w_{\lambda_p]}$, il est clair qu'il se ramènera par une transformation (59) à un p-vecteur du type II a. En effet, $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ étant ramené à sa forme canonique (41 α) le facteur σ peut être choisi parmi l'un des scalaires $\overset{2y-1}{z}$ ($y = 1 \ldots k$) en posant $\sigma^{-1} = \overset{2y-1}{z}$.

2° Si $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est de la classe $c = p + 3$, sans être de la forme $\overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} w_{\lambda_p]}$, le facteur σ étant choisi de telle manière que dans le cas général, $^{*}w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ sera de la classe $p + 2$, appartenant au type II b.

III.

14'. *p-vecteurs X_{n-q}-formant* ([16]). — Si $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ n'est pas X_{n-p}-formant, il peut encore être X_{n-q}-formant ($q > p$). On entend par là qu'il existe un système de $\infty^q X_{n-q}$ tel que la E_{n-p} du p-vecteur contient en chaque point la $(n - q)$-direction tangente de la X_{n-q} passant par ce point. Il résulte de cette définition :

Pour que $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ soit X_{n-q}-formant ($q \geq p$) il faut et il suffit :

1° *Qu'il existe un produit-gradient de q facteurs, dont la région covariante contient la $(n - p)$-direction de $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$, mais qu'il n'existe pas un tel, de moins que q facteurs; ou bien :*

2° *Qu'il existe $(q - p)$ scalaires indépendants $\overset{p+1}{s} \ldots \overset{q}{s}$, et pas d'autres en nombre moindre que $(q - p)$ tels que le q-vecteur $w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_p} \overset{p+1}{s}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{q}{s}_{\lambda_q]}$ soit X_{n-q}-formant.*

15. *Les p-vecteurs du type II, pour lesquels $c = p + 2k$, sont $X_{n-(p+k)}$-formant.*

Type II a. — La forme canonique d'un tel p-vecteur est

$$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} \overset{0}{z}_{\lambda_p]} + \sum_{x}^{k} \overset{2x-1}{z} \, \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} \overset{2x}{z}_{\lambda_p]}; \tag{69}$$

on en tire

$$w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_p} \overset{2}{z}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{2k}{z}_{\lambda_{p+k}]} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p-1}{s}_{\lambda_{p-1}} \overset{0}{z}_{\lambda_p} \overset{2}{z}_{\lambda_{p+1}} \ldots \overset{2k}{z}_{\lambda_{p+k}]}, \tag{70}$$

donc, d'après 2°, $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est au moins ${}_n X_{-(p+k)}$-formant. Qu'il ne peut pas être X_{n-q}-formant, avec $q < p + k$, cela résulte de ce que, s'il en était ainsi, il existerait un q-vecteur produit-gradient $T_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ tel que

(71) $$w_{\lambda_1 \ldots [\lambda_p} T_{\nu_1 \ldots \nu_q]} = 0.$$

On aurait donc, par suite de (69),

(72) $$T_{\nu_1 \ldots \nu_q} = \sigma \overset{1}{s}_{[\nu_1} \ldots \overset{p-1}{s}_{\nu_p} \overset{p}{t}_{\nu_{p+1}} \ldots \overset{q}{t}_{\nu_q]},$$

donc

(73) $$w_{[\lambda} \overset{p}{t}_{\nu_1} \ldots \overset{q}{t}_{\nu_{q-p+1}]} = 0.$$

La classe réduite $c_0 - r_0$ de $\overset{p}{w}_\lambda$ étant $2k + 1$, on devrait donc avoir

(74) $$2k + 1 \leqq 2(q - p) + 1 \qquad \text{ou bien} \qquad k \leqq q - p,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Type II b ($c = p + 2$; $k = 1$). — On a vu (n° 12) que $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} = W_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}}$. Déterminons alors le scalaire s de telle manière que l'on ait

(75) $$\overline{w}_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_p} = s_{[\lambda_0} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]} = 0, \qquad s_{[\lambda_0} W_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}]} \neq 0,$$

ceci est toujours possible, puisque $W_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} = G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}}$ est produit-gradient ([17]). On aura pour la dérivée alternée du $(p + 1)$-vecteur simple $\overline{w}_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_p}$

(76) $$\overline{W}_{\mu \lambda_0 \ldots \lambda_p} = s_{[\lambda_0} W_{\mu \lambda_1 \ldots \lambda_p]} = 0,$$

par suite $\overline{w}_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est produit-gradient ([4]), donc, d'après (2), $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est $X_{n-(p+1)}$-formant, puisque par hypothèse il ne peut pas être X_{n-p}-formant. On voit en outre, d'après le théorème sur le rang, que s est de rang 2 par rapport à $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$.

16. *Multiplicités intégrales d'un système de Pfaff.* — Au p-vecteur simple $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est attaché un système de Pfaff

(77) $dx^{\lambda_1} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = 0$ ou son équivalent $dx^\lambda \overset{y}{w}_\lambda = 0$ $(y = 1 \ldots p)$.

Le vecteur $v^{\lambda} = \alpha\, dx^{\lambda}$ est *intégral* ([18]) s'il satisfait à (77), $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ étant X_{n-q}-formant, les X_{n-q} formées par lui sont des ***multiplicitès intégrales supérieures***, Chaque multiplicité de dimensionalité $(n-t)$, $(t > q)$ située dans une X_{n-q} supérieure est telle qu'en la définissant par le produit-gradient $T_{\nu_1 \ldots \nu_t}$ on a

(78) $$w_{\lambda_1 \ldots [\lambda_p} T_{\nu_1 \ldots \nu_t]} = 0.$$

Par extension chaque multiplicité $H_{n-t}(t \geqq q)$, définie par le produit-gradient $T_{\nu_1 \ldots \nu_t}$ et satisfaisant à (78), sera dit multiplicité intégrale.

Il résulte de ces définitions : 1° Les multiplicités intégrales supérieures sont les multiplicités intégrales de dimensionalité maximum; 2° chaque vecteur contrevariant situé dans une multiplicité intégrale est vecteur intégral; 3° une multiplicité dont chaque vecteur contrevariant est intégral est une multiplicité intégrale ([19]).

Deux vecteurs contrevariants v^{λ} et u^{λ} sont en *involution* ([20]) s'ils satisfont à l'équation

(79) $$v^{\alpha} u^{\beta} W_{\alpha\beta\lambda_3 \ldots \lambda_p} = 0.$$

Deux vecteurs quelconques d'une multiplicité intégrale sont en involution ([21]).

Soit H_{n-t} une multiplicité intégrale définie par le produit-gradient $T_{\nu_1 \ldots \nu_t}$; ou par son correspondant $T^{\nu_1 \ldots \nu_{n-t}}$. On a par définition

(80) $$\overset{x}{w}_{[\lambda} T_{\nu_1 \ldots \nu_t]} = 0 \qquad (x = 1 \ldots p).$$

En prenant la dérivée alternée de (80) puisque $T_{\nu_1 \ldots \nu_t}$ est produit-gradient, on trouve

(81) $$\overset{x}{w}_{[\mu\lambda} T_{\nu_1 \ldots \nu_t]} = 0 \qquad (x = 1 \ldots p)$$

équivalent à

(82) $$\overset{x}{w}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta\nu_3 \ldots \nu_{n-t}} = 0 \qquad (x = 1 \ldots p),$$

ce dernier équivaut à son tour à

(83) $$T^{\alpha\beta\nu_3 \ldots \nu_{n-t}} W_{\alpha\beta\lambda_3 \ldots \lambda_p} = 0. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

17. ***Les régions*** **R′, R, R′₁ et R₁.** — Il nous reste encore à montrer, comment ces régions s'introduisent dans la théorie des systèmes de Pfaff, et quelle est leur signification; à cet effet, nous démontrons avec M. Goursat ([22]) que leur détermination revient à la détermination respective :

1° Des *vecteurs contrevariants* indépendants issus d'un point, qui sont en involution avec tous les *vecteurs* issus du même point ;

2° Des *vecteurs intégraux* en involution avec tous les *vecteurs* issus du même point ;

3° Des *vecteurs* en involution avec tous les *vecteurs intégraux* issus du même point ;

4° Des *vecteurs intégraux* en involution avec tous les *vecteurs intégraux* issus du même point.

1° La région contrevariante correspondant à R' est définie par les solutions indépendantes du système

$$v^{\mu} W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = 0. \tag{84}$$

Or si v^{μ} satisfait à (84), on a, *quel que* soit le vecteur u^{λ},

$$v^{\mu} u^{\lambda_1} W_{\mu\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p} = 0. \tag{85}$$

La réciproque est évidente.

2° La région contrevariante correspondant à R est définie par les solutions indépendantes du système

$$v^{\lambda_1} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = 0, \qquad v^{\mu} W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = 0. \tag{86}$$

Or, si v^{μ} satisfait à (86) on a *quel que* soit u^{λ}, $v^{\mu} u^{\lambda_1} W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = 0$, et réciproquement.

3° Envisageons la quantité $W_{[\mu\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}[\lambda_p} w_{\nu_1 \ldots \nu_p]}$ et cherchons sa *région covariante relativement aux p premiers indices.* Il est facile de se convaincre que, pour les p vecteurs du type Ia et Ib, IIa, IIb et III, cette région sera définie par $F_{\nu_1 \ldots \nu_{\gamma'}}$. Il n'en est pas ainsi pour les p-vecteurs du type Ic. Pour eux, en effet, $F_{\nu_1 \ldots \nu_{\gamma'}}$ n'existe pas, tandis que la région covariante de $W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}[\lambda_p} w_{\nu_1 \ldots \nu_p]}$ relativement aux p premiers indices est $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$. Abstraction faite des vecteurs du type Ic, on voit donc que la région contrevariante à R'_1 est déterminable par les solutions indépendantes du système

$$v^{\mu} W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}[\lambda_p} w_{\nu_1 \ldots \nu_p]} = 0, \tag{87}$$

et puisque (87) exprime que la quantité $v^{\mu} W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ est située dans la région covariante de la quantité $w_{\nu_1\ldots\nu_p}$, elle est équivalente à

$$v^{\mu} W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} = \alpha w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}, \tag{88}$$

α étant un facteur différent de zéro. Or si u^{λ} est un vecteur intégral *quelconque*, on a

$$v^{\mu} u^{\lambda_1} W_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} = 0. \tag{89}$$

Donc v^{μ} satisfaisant à (87) est en involution avec tous les vecteurs intégraux issus du même point. La réciproque est presque évidente.

4° D'après cela, on établit facilement que la détermination de R_1 équivaut à la détermination des vecteurs intégraux en involution avec tous les vecteurs intégraux issus du même point, le cas des p-vecteurs du type Ic ne formant pas d'exception.

18. Le γ-vecteur $K_{\lambda_1\ldots\lambda_\gamma}$ correspond donc au *système caractéristique* (23) de M. E. Goursat et la *classe γ d'un système de Pfaff* (24) est égale à $c-1$ ou à c. D'après le n° 14 on a les théorèmes suivants :

La réduction d'un système de Pfaff à sa forme réduite (25) *se fait par une transformation*

$$^{*}w_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \sigma w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}, \tag{90}$$

la détermination de σ n'exigeant outre l'intégration du système de Pfaff correspondant à $K_{\lambda_1\ldots\lambda_\gamma}$, qu'une quadrature.

A une transformation de la forme (90) *près, les systèmes de Pfaff correspondant aux p-vecteurs simples d'une* E_n *se répartissant en trois types.*

Ceux du type I correspondent à un p-vecteur simple du type Ib;

Ceux du type a et *b correspondent à un p-vecteur simple du type IIa* et *IIb;*

Ceux du type III sont les systèmes de Pfaff d'ordre p complètement intégrables.

En effet, on a vu au n° 14 qu'un p-vecteur du type Ia se ramène par une transformation de la forme (90) à l'un des types Ib, IIa, II b; un p-vecteur du type I c à un p-vecteur du type III d'où résulte le théorème.

NOTES.

(1) E_n est une variété à connexion euclidienne-affine.

(2) J. A. Schouten, *Der Ricci Kalkül*, p. 20 (Berlin, Springer, 1924). Le livre de M. J. A. Schouten sera cité *R. K.*

(3) E. Goursat, *Le problème de Pfaff*, p. 126 et 135 (Paris, Hermann, 1922). Le livre de M. E. Goursat sera cité par *P. de P.*

(4) *R. K.*, p. 110.

(5) *R. K.*, p. 109.

(6) *P. de P.*, p. 132-139. Il est à remarquer que M. E. Goursat envisage plus généralement les p-vecteurs non seulement simples.

(7) *P. de P.*, p. 137-138.

(8) *P. de P.*, p. 135.

(9) *P. de P.*, p. 146-149.

(10) Il est a remarquer que si le p-vecteur n'est pas simple. la série (21) peut contenir d'autres quantités différentes de zéro.

(11) En introduisant la série de quantités

$$D_{\lambda_1\ldots\lambda_{2x}} = w_{[\lambda_1\lambda_2}\ldots w_{\lambda_{2x-1}\lambda_{2x}]}; \qquad D_{\lambda_1\ldots\lambda_{2x-1}} = w_{[\lambda_1} w_{\lambda_2\lambda_3}\ldots w_{\lambda_{2x-2}\lambda_{2x-1}]}$$

pour que le groupe de scalaires $\overset{1}{s}\ldots\overset{q}{s}$ soit de rang r par rapport à w_λ de classe c, il faut et il suffit que

$$D_{[\lambda_1\ldots\lambda_{c-r+1}}\overset{1}{s}_{\lambda_{c-r+2}}\ldots\overset{q}{s}_{\lambda_{c-r+q+1}]} = 0; \qquad D_{[\lambda_1\ldots\lambda_y}\overset{1}{s}_{\lambda_{y+1}}\ldots\overset{q}{s}_{\lambda_{y+q}]} \neq 0$$

$$(y < c - r + 1)$$

(*P. de P.*, p. 166).

(12) *P. de P.*, p. 300-301.

(13) *R. K.*, p. 88.

(14) *R. K.*, p. 119-125.

(15) *R. K.*, p. 112, avant-dernier théorème.

(16) *R. K.*, p. 126.

(17) *R. K.*, p. 112, dernier théorème.

(18) E. Cartan, *Annales Ecole Norm. sup.*, 3e série, t. XVIII, 1901, p. 248; *Bull. Soc. math.*, t. 29, 1901, p. 236; *P. de P.*, p. 260.

(19) E. Cartan, *Annales École Norm. sup.*, 3e série, t. XVIII, p. 248; *P. de P.*, p. 260.

(20) E. Cartan, *Bull. Soc. math.*, t. 29, p. 236; *P. de P.*. p. 139 et 264.

(21) *P. de P.*, p. 20 et 348; E. Cartan, *Annales École Norm. sup.*, 3e série, t. XVIII, p. 250.

(22) *P. de P.*, p. 20.

(23) E. Cartan. *Bull. Soc. math.*, t. 29, 1901, p. 241; *P. de P.*, p. 264-266.

(24) *P. de P.*, p. 268.

(25) *P. de P.*, p. 269.