BULLETIN DE LA S. M. F.

H. MINEUR

Sur les ondes de gravitation

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 50-73
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__50_0>

SUR LES ONDES DE GRAVITATION;

Par M. H. Mineur.

Nous nous sommes proposés, dans ce petit travail, d'étudier les conséquences que comporte la théorie d'Einstein au sujet de la propagation de la gravitation.

Ce travail comprend trois parties :

I. Dans la première partie, nous étudions les ondes de discontinuité du second ordre; nous montrons qu'elles sont de deux sortes : les ondes apparentes qui proviennent d'un choix défectueux du système de référence et les ondes absolues. La réduction de ces dernières par un choix convenable des axes nous permet d'établir leur transversalité.

II. Dans la deuxième partie, nous cherchons si un astre en pulsation sphérique du type « Céphéide » émet des ondes de gravitation et nous établissons qu'il n'en est rien.

III. Dans la dernière partie, nous montrons qu'il n'y a pas opposition entre le fait que la gravitation se propage avec la vitesse de la lumière et un résultat classique obtenu par Laplace sur les conséquences de cette propagation.

I. — Ondes de discontinuité du second ordre.

Notations. — Soient E un espace-temps à quatre dimensions, x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées curvilignes d'un point. Nous nous conformerons aux notations employées par M. E. Cartan (¹). En chaque point M de E, choisissons arbitrairement un système de quatre vecteurs $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Le vecteur $\overrightarrow{dM}$, d'origine x_i et d'extrémité $x_i + dx_i$, a pour expression

$$\overrightarrow{dM} = \sum_{i=0}^{3} \omega_i \vec{e}_i;$$

(¹) *Cf.* Cartan, *Bulletin des Sciences Mathématiques de France*, 1919-1920 les ω_i sont des formes linéaires par rapport aux différentielles dx_i. Le ds^2 de E est

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{3} (\omega_i)^2.$$

Nous supposons que E vérifie les équations gravitationnelles d'Einsten. Nous dirons que E est un espace d'Einstein.

Les dérivées extérieures des ω_i peuvent se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$(\omega_i)' = \sum_{k=0}^{3} [\omega_{ik}\,\omega_k],$$

où les ω_{ik} vérifient, en outre, les conditions

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0.$$

Posons

$$\omega_{ik} = \sum_{k=0}^{3} \gamma_{ikh}\,\omega_h$$

et

$$\Omega_{ij} = (\omega_{ij})' - \sum_{e=0}^{3} [\omega_{ie}\,\omega_{ej}] = \sum_{(h,k)} \gamma_{ijhk} [\omega_h\,\omega_k].$$

Le bivecteur $\sum_{(i,j)} \Omega_{ij} \left[\vec{e}_i \vec{e}_j \right]$ est un invariant vectoriel qui définit la courbure de E. Les γ_{ijhk} sont les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel elles sont au nombre de 36, car

$$\gamma_{ijhk} = -\gamma_{jihk} = -\gamma_{ijkh}.$$

Les composantes du bivecteur de courbure vérifient les conditions

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_0 &= \omega_1 \Omega_{23} + \omega_2 \Omega_{31} + \omega_3 \Omega_{12} = 0, \\ -\Omega_1 &= \omega_2 \Omega_{30} + \omega_3 \Omega_{02} + \omega_0 \Omega_{23} = 0, \\ \Omega_2 &= \omega_3 \Omega_{01} + \omega_0 \Omega_{13} + \omega_1 \Omega_{30} = 0, \\ -\Omega_3 &= \omega_0 \Omega_{12} + \omega_1 \Omega_{20} + \omega_2 \Omega_{01} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_0 &= \omega_1 \Omega_{01} + \omega_2 \Omega_{02} + \omega_3 \Omega_{03} = 0, \\ \Pi_1 &= \omega_0 \Omega_{10} + \omega_2 \Omega_{12} + \omega_3 \Omega_{13} = 0, \\ \Pi_2 &= \omega_0 \Omega_{20} + \omega_1 \Omega_{21} + \omega_3 \Omega_{23} = 0, \\ \Pi_3 &= \omega_0 \Omega_{33} + \omega_1 \Omega_{31} + \omega_2 \Omega_{32} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (I) sont les équations d'Einstein, les équations (II) sont les identités classiques que vérifient les composantes de la courbure d'un espace quelconque. Ces équations expriment que 8 formes trilinéaires sont nulles; elles équivalent en apparence à $8 \times 4 = 32$ conditions, mais les premiers membres des équations (I) et (II) sont liés par les 6 relations

$$\begin{aligned}
\omega_1 \Omega_0 - \omega_0 \Omega_1 + \omega_2 \Pi_3 - \omega_3 \Pi_2 &= 0, \\
\omega_2 \Omega_0 - \omega_0 \Omega_2 + \omega_3 \Pi_1 - \omega_1 \Pi_3 &= 0, \\
\omega_3 \Omega_0 - \omega_0 \Omega_3 + \omega_1 \Pi_2 - \omega_2 \Pi_1 &= 0, \\
\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1 + \omega_3 \Pi_0 - \omega_0 \Pi_3 &= 0, \\
\omega_3 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_3 + \omega_2 \Pi_0 - \omega_0 \Pi_2 &= 0, \\
\omega_2 \Omega_3 - \omega_3 \Omega_2 + \omega_1 \Pi_0 - \omega_0 \Pi_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Les équations de la gravitation einsteinienne se réduisent donc à 26, et les composantes linéairement indépendantes du tenseur de Riemann-Christoffel sont au nombre de 10.

Ondes de discontinuité du second ordre. — Nous nous proposons de chercher s'il peut exister dans l'espace-temps E des discontinuités du second ordre. Nous appellerons ainsi une surface

$$\text{(S)} \qquad f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

partageant E entre deux régions E_1 et E_2, telles que lorsqu'on passe de E_1 à E_2 les coefficients des ω_i et des ω_{ij} soient continus alors que ceux des Ω_{ij} subissent une variation brusque.

Dérivons l'équation de S, soit

$$\text{(P)} \qquad \alpha_0 \omega_0 + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 = 0$$

l'équation du plan tangent à cette surface de discontinuité; les coefficients γ_{ijk} sont continus, mais ni les γ_{ijhk}, ni les $\frac{\partial \gamma_{ijk}}{\partial \omega_h}$ ne sont continus lorsqu'on traverse S. Soit u une fonction quelconque, désignons par

$$[u]$$

la variation brusque de cette fonction lorsqu'on passe de E_1 à E_2.

Les conditions de compatibilité cinématiques nous apprennent ([1]) que

$$\left[\frac{\partial\gamma_{ijk}}{\partial\omega_e}\right] = \alpha_e\lambda_{ijk},$$

où les λ_{ijk} sont des coefficients qui ne dépendent que des trois indices i, j et k. La relation

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = 0$$

nous montre que

$$\lambda_{ijk} = -\lambda_{jik}.$$

Cherchons $[\Omega_{ij}]$; on a

$$\Omega_{ij} = (\omega_{ij})' - \sum_k [\omega_{ik}\omega_{kj}].$$

or

$$\omega_{ij} = \sum_k \gamma_{ijk}\omega_k,$$

donc

$$(\omega_{ij})' = \sum_{e,k} \frac{\partial\gamma_{ijk}}{\partial\omega_e}[\omega_e\omega_k] + \sum_k \gamma_{ijk}(\omega_k)';$$

les variations brusques des ω_{ij} et $(\omega_i)'$ sont nulles par hypothèse, donc

$$[\Omega_{ij}] = [(\omega_{ij})'] = \sum_{e,k} \lambda_{ijk}\alpha_e[\omega_e\omega_k]$$

ou

$$[\Omega_{ij}] = \sum_{(e,k)} (\lambda_{ijk}\alpha_e - \lambda_{ije}\alpha_k)[\omega_e\omega_k].$$

Les Ω_{ij} vérifient les équations (I) et (II) de chaque côté de la surface S ; écrivons, par exemple, l'équation $\Omega_0 = 0$ de chaque côté de S,

$$\omega_1(\Omega_{23})_1 + \omega_2(\Omega_{31})_1 + \omega_3(\Omega_{12})_1 = 0,$$
$$\omega_1(\Omega_{23})_2 + \omega_2(\Omega_{31})_2 + \omega_3(\Omega_{12})_2 = 0.$$

---

[1] J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, Chap. II (Paris, Hermann). La démonstration donnée dans cet Ouvrage s'étend sans modification au cas actuel.

Retranchons membre à membre,

$$\omega_1[\Omega_{23}] + \omega_2[\Omega_{31}] + \omega_3[\Omega_{12}] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{e,k} (\lambda_{23k}\alpha_e\omega_e\omega_k\omega_1 + \lambda_{31k}\alpha_e\omega_e\omega_k\omega_2 + \lambda_{12k}\alpha_e\omega_e\omega_k\omega_3) = 0,$$

ce qui nous donne quatre équations :

$$(\mathrm{I}_0)\left\{\begin{array}{llll} \mathbf{I}_{00} & \text{termes en} & \omega_1\omega_2\omega_3 & -\lambda_{232}\alpha_3 + \lambda_{233}\alpha_2 + \lambda_{311}\alpha_3 - \lambda_{313}\alpha_1 \\ & & & \qquad -\lambda_{121}\alpha_2 + \lambda_{122}\alpha_1 = 0, \\ \mathbf{I}_{01} & \text{«} & \omega_2\omega_3\omega_0 & -\lambda_{313}\alpha_0 + \lambda_{310}\alpha_3 + \lambda_{122}\alpha_0 - \lambda_{120}\alpha_2 = 0, \\ \mathbf{I}_{02} & \text{«} & \omega_3\omega_0\omega_1 & -\lambda_{233}\alpha_0 + \lambda_{230}\alpha_3 + \lambda_{121}\alpha_0 - \lambda_{120}\alpha_1 = 0, \\ \mathbf{I}_{03} & \text{«} & \omega_0\omega_1\omega_2 & -\lambda_{232}\alpha_0 + \lambda_{230}\alpha_2 + \lambda_{311}\alpha_0 - \lambda_{310}\alpha_1 = 0. \end{array}\right.$$

De même, la condition

$$\omega_1[\Omega_{01}] + \omega_2[\Omega_{02}] + \omega_3[\Omega_{03}] = 0$$

nous fournit quatre équations :

$$(\mathrm{II}_0)\left\{\begin{array}{llll} \mathbf{II}_{00} & \textbf{termes en} & \omega_1\omega_2\omega_3 & -\lambda_{012}\alpha_3 + \lambda_{013}\alpha_2 + \lambda_{021}\alpha_3 - \lambda_{023}\alpha_1 \\ & & & \qquad + \lambda_{032}\alpha_1 - \lambda_{031}\alpha_2 = 0, \\ \mathbf{II}_{01} & \text{«} & \omega_0\omega_1\omega_2 & \lambda_{010}\alpha_2 - \lambda_{012}\alpha_0 - \lambda_{020}\alpha_1 + \lambda_{021}\alpha_0 = 0, \\ \mathbf{II}_{02} & \text{«} & \omega_2\omega_3\omega_0 & \lambda_{020}\alpha_3 - \lambda_{023}\alpha_0 - \lambda_{030}\alpha_2 + \lambda_{032}\alpha_0 = 0, \\ \mathbf{II}_{03} & \text{«} & \omega_3\omega_0\omega_1 & \lambda_{010}\alpha_3 - \lambda_{013}\alpha_0 + \lambda_{031}\alpha_0 - \lambda_{030}\alpha_1 = 0. \end{array}\right.$$

Propagation de l'onde avec la vitesse de la lumière. — Supposons que le produit $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ soit différent de zéro, c'est-à-dire que la surface d'onde ne soit tangente à aucun des hyperplans de coordonnées à trois dimensions.

Multiplions l'équation I_{00} par α_0, I_{01} par α_1, I_{02} par α_2, I_{03} par α_3 et ajoutons-les, nous obtenons une identité, le système (I_0) se réduit donc dans cette hypothèse à ses trois dernières équations. De même, multiplions II_{00} par α_0, II_{01} par α_1, II_{02} par α_2, II_{03} par α_3 et ajoutons, nous obtenons encore une identité; (II_0) se réduit donc à ses trois dernières équations. Si l'on forme les 8 systèmes, analogues à (I_0) et (II_0), on obtient un système de 24 équations à

24 inconnues, qui peut s'écrire :

$$
\text{(III)}\quad \left\{
\begin{aligned}
a &= \lambda_{010}\alpha_2 - \lambda_{012}\alpha_0 = \lambda_{020}\alpha_1 - \lambda_{021}\alpha_0 = \lambda_{233}\alpha_1 - \lambda_{231}\alpha_3 = \lambda_{133}\alpha_2 - \lambda_{132}\alpha_3,\\
b &= \lambda_{010}\alpha_3 - \lambda_{013}\alpha_0 = \lambda_{030}\alpha_1 - \lambda_{031}\alpha_0 = \lambda_{231}\alpha_2 - \lambda_{232}\alpha_1 = \lambda_{122}\alpha_3 - \lambda_{123}\alpha_2,\\
c &= \lambda_{011}\alpha_2 - \lambda_{012}\alpha_1 = \lambda_{120}\alpha_1 - \lambda_{121}\alpha_0 = \lambda_{230}\alpha_3 - \lambda_{233}\alpha_0 = \lambda_{032}\alpha_3 - \lambda_{033}\alpha_2,\\
d &= \lambda_{011}\alpha_3 - \lambda_{013}\alpha_1 = \lambda_{130}\alpha_1 - \lambda_{131}\alpha_0 = \lambda_{232}\alpha_0 - \lambda_{230}\alpha_2 = \lambda_{023}\alpha_2 - \lambda_{022}\alpha_3.\\
e &= \lambda_{020}\alpha_3 - \lambda_{023}\alpha_0 = \lambda_{030}\alpha_2 - \lambda_{032}\alpha_0 = \lambda_{132}\alpha_1 - \lambda_{131}\alpha_2 = \lambda_{123}\alpha_1 - \lambda_{121}\alpha_3,\\
f &= \lambda_{021}\alpha_2 - \lambda_{022}\alpha_1 = \lambda_{033}\alpha_1 - \lambda_{031}\alpha_3 = \lambda_{133}\alpha_0 - \lambda_{130}\alpha_3 = \lambda_{120}\alpha_2 - \lambda_{122}\alpha_0.
\end{aligned}\right.
$$

Considérons les équations qui contiennent les λ_{012}, par exemple,

$$
\begin{aligned}
\lambda_{010}\alpha_2 - \lambda_{012}\alpha_0 &= a,\\
\lambda_{010}\alpha_3 - \lambda_{013}\alpha_0 &= b,\\
\lambda_{011}\alpha_2 - \lambda_{012}\alpha_1 &= c,\\
\lambda_{011}\alpha_3 - \lambda_{013}\alpha_1 &= d.
\end{aligned}
$$

Multiplions ces équations respectivement par

$$\alpha_1\alpha_3, \quad -\alpha_1\alpha_2, \quad -\alpha_0\alpha_3, \quad \alpha_0\alpha_2,$$

et ajoutons-les, nous obtenons

$$a\alpha_1\alpha_3 - b\alpha_1\alpha_2 - c\alpha_0\alpha_3 + d\alpha_0\alpha_2.$$

On peut établir de la même manière les 6 équations suivantes :

$$
\text{(A)}\quad \left\{
\begin{aligned}
a\alpha_1\alpha_3 - b\alpha_1\alpha_2 - c\alpha_0\alpha_3 + d\alpha_0\alpha_2 &= 0,\\
a\alpha_2\alpha_3 - e\alpha_1\alpha_2 + f\alpha_0\alpha_3 - d\alpha_1\alpha_0 &= 0,\\
b\alpha_2\alpha_3 - e\alpha_1\alpha_3 - c\alpha_0\alpha_1 - f\alpha_0\alpha_2 &= 0,\\
-b\alpha_0\alpha_1 + c\alpha_2\alpha_3 - e\alpha_0\alpha_2 - f\alpha_1\alpha_3 &= 0,\\
a\alpha_0\alpha_1 - d\alpha_2\alpha_3 + e\alpha_0\alpha_3 - f\alpha_1\alpha_2 &= 0,\\
a\alpha_0\alpha_2 + b\alpha_0\alpha_3 + c\alpha_1\alpha_2 + d\alpha_1\alpha_3 &= 0.
\end{aligned}\right.
$$

Ondes apparentes. — Si a, b, c, d, e, f sont tous nuls, on déduit de la définition de ces nombres que

$$\frac{\lambda_{ijk}}{\alpha_k} = \frac{\lambda_{ijh}}{{}_h\alpha},$$

quels que soient les indices i, j, k, h. C'est-à-dire

$$\lambda_{ijk} = \theta_{ij}\alpha_k.$$

Les $\frac{\partial\gamma_{ijk}}{\partial\omega_h}$ subissent une variation brusque, mais cette variation correspond à une onde apparente. L'invariant $\sum_{(i,j)} \Omega_{ij} \left[\vec{e}_i \vec{e}_j \right]$ ne subit en effet aucune variation puisque

$$[\Omega_{ij}] = \sum_{(k,h)} (\lambda_{ijk} \alpha_h - \lambda_{ijh} \alpha_k) [\omega_h \omega_k].$$

L'onde obtenue provient donc du système de coordonnées choisi; on peut la faire disparaître par un changement convenable de ce dernier. Ce cas est sans intérêt puisqu'il ne correspond pas à une propriété absolue de l'univers et nous dirons que l'onde est apparente.

Ondes absolues. — Nous dirons que l'onde est absolue si a, b, c, d, e, f ne sont pas tous nuls, nous montrerons que ces ondes correspondent à une discontinuité du bivecteur de courbure; elles traduisent donc une propriété absolue de l'univers. Pour une telle onde, le déterminant du système A est nul,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 \alpha_2 & -\alpha_1 \alpha_3 & \alpha_0 \alpha_2 & \alpha_0 \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_1 \alpha_2 & 0 & \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_0 \alpha_1 & 0 & \alpha_0 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & -\alpha_2 \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_0 \alpha_1 & \alpha_0 \alpha_2 \\ \alpha_0 \alpha_2 & \alpha_0 \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_2 \alpha_3 & \alpha_1 \alpha_3 \\ \alpha_0 \alpha_3 & 0 & \alpha_0 \alpha_1 & \alpha_2 \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \alpha_2 \\ 0 & \alpha_0 \alpha_3 & \alpha_0 \alpha_2 & -\alpha_1 \alpha_3 & \alpha_1 \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme ce déterminant a pour valeur

$$\alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

il faut que

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0.$$

Dans le cas d'une onde absolue, la surface d'onde se déplace avec la vitesse de la lumière.

On pouvait établir ce résultat d'une autre manière :

Supposons un instant que l'onde ne se propage pas avec la vitesse de la lumière; en d'autres termes supposons

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0,$$

nous pouvons choisir en chaque point de S le système de référence de telle sorte que l'équation du plan tangent à la surface d'onde soit

$$\alpha_0 \omega_0 = 0.$$

Reprenons les calculs précédents, en supposant, cette fois,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Il faut remonter aux systèmes (I) et (II) et aux systèmes analogues. On en déduit

$$\lambda_{ijk} = 0,$$

i, j quelconques, k différent de zéro. Il en résulte que $\sum_{(i,j)} \Omega_{ij} \left[\vec{e}_i \vec{e}_j \right]$ ne subit aucun saut brusque à la traversée de S. L'onde considérée n'est donc qu'apparente.

Ce mode de démonstration est inspiré d'une méthode due à M. Vessiot ([1]).

Réduction des ondes absolues. — Pour étudier les ondes absolues, nous choisirons le système de référence d'une manière particulière. Comme nous l'avons montré, on ne peut prendre les $\vec{e}_i$ de manière que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, car les α_i vérifient la condition

$$\sum_0^3 \alpha_i^2 = 0.$$

Mais, en tout point de S, nous pouvons choisir le plan $\vec{e}_2 \vec{e}_3$ de manière que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$; supposons ce choix fait : le système (III) donne immédiatement $a = b = c = d = 0$ et les valeurs des λ_{ijk} sont données par le tableau suivant :

λ_{010}	arbitraire,	λ_{011} arbitraire,	$\lambda_{012} = 0,$	$\lambda_{013} = 0,$
λ_{020}	»	$\lambda_{021} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} \lambda_{020},$	$\alpha_1 \lambda_{022} = -f,$	$\alpha_0 \lambda_{023} = -e,$
λ_{030}	»	$\lambda_{031} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} \lambda_{030},$	$\alpha_0 \lambda_{032} = -e,$	$\alpha_1 \lambda_{033} = f,$
λ_{120}	»	$\lambda_{121} = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \lambda_{120},$	$\alpha_0 \lambda_{122} = -f,$	$\alpha_1 \lambda_{123} = e,$
λ_{230}	»	λ_{231} arbitraire,	$\lambda_{232} = 0,$	$\lambda_{233} = 0,$
λ_{310}	»	$\lambda_{131} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} \lambda_{130},$	$\alpha_1 \lambda_{132} = e,$	$\alpha_0 \lambda_{133} = f.$

([1]) *Comptes rendus*, 1918.

Nous n'avons pas utilisé toutes les équations du problème, par exemple, l'équation (I) n'est plus une conséquence de (I_2), (I_3), (I_4); il faut donc tenir compte de (I_1), (II_1) et de leurs analogues

$$
\begin{aligned}
-\lambda_{010}\alpha_1 + \lambda_{011}\alpha_0 + f\frac{\alpha_0^2+\alpha_1^2}{\alpha_0\alpha_1} &= 0,\\
-f\frac{\alpha_0^2+\alpha_1^2}{\alpha_0\alpha_1} - \lambda_{010}\alpha_1 + \lambda_{011}\alpha_0 &= 0,\\
-\lambda_{230}\alpha_1 + \lambda_{231}\alpha_0 + e\frac{\alpha_0^2+\alpha_1^2}{\alpha_0\alpha_1} &= 0,\\
e\frac{\alpha_0^2+\alpha_1^2}{\alpha_0\alpha_1} + \lambda_{321}\alpha_0 - \lambda_{230}\alpha_0 &= 0.
\end{aligned}
$$

D'où l'on déduit

$$
\begin{aligned}
\lambda_{010}\alpha_1 - \lambda_{011}\alpha_0 &= 0,\\
\lambda_{230}\alpha_1 - \lambda_{231}\alpha_0 &= 0,\\
f(\alpha_0^2+\alpha_1^2) &= 0,\\
e(\alpha_0^2+\alpha_1^2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Nous retrouvons ce résultat que si

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2 \neq 0,$$

e et f sont nuls et les γ_{ijhk} ne subissent aucune discontinuité à la traversée de S. Le choix particulier que nous avons fait du système de référence supprime les ondes apparentes. Nous devons supposer

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2 = 0.$$

Ce qui signifie que la gravitation se propage avec la vitesse de la lumière.

Prenons, par exemple,

$$\alpha_0 = i, \qquad \alpha_1 = 1,$$

et formons le tableau des sauts des coefficients des Ω_{ij} :

	$\omega_0\omega_1$	$\omega_0\omega_2$	$\omega_0\omega_3$	$\omega_1\omega_2$	$\omega_2\omega_3$	$\omega_3\omega_1$
Ω_{01}	0	0	0	0	0	0
Ω_{02}	0	if	e	f	0	ie
Ω_{03}	0	e	$-if$	$-ie$	0	f
Ω_{12}	0	f	$-ie$	$-if$	0	e
Ω_{23}	0	0	0	0	0	0
Ω_{31}	0	ie	f	e	0	if

Sous cette forme, ces formules ne sont pas directement applicables au cas réel des ondes de gravitation, car nous avons posé

$$ds^2 = (\omega_0)^2 + (\omega_1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega_3)^2.$$

Faisons sur les ω_i, $\vec{e}_i$ la transformation

$$\bar{\omega}^1 = \omega_1, \qquad \bar{\omega}^2 = \omega_2, \qquad \bar{\omega}^3 = \omega_3, \qquad \bar{\omega}^0 = i\omega_0;$$

$$\bar{\vec{e}}_1 = \vec{e}_1, \qquad \bar{\vec{e}}_2 = \vec{e}_2, \qquad \bar{\vec{e}}_3 = \vec{e}_3, \qquad \bar{\vec{e}}_0 = -i\vec{e}_0;$$

on aura alors

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 - (\omega^0)^2$$

et

$$\bar{\Omega}^{01} = i\Omega_{01}, \qquad \bar{\Omega}^{02} = i\Omega_{02}, \qquad \bar{\Omega}^{03} = i\Omega_{03};$$

$$\bar{\Omega}^{12} = \Omega_{12}, \qquad \bar{\Omega}^{23} = \Omega_{23}, \qquad \bar{\Omega}^{31} = \Omega_{31};$$

posons $if = g$, on obtient, pour le tableau des sauts des Ω^{ij} :

	$\omega^0\omega^1$	$\omega^2\omega^3$	$\omega^0\omega^2$	$\omega^1\omega^2$	$\omega^1\omega^3$	$\omega^0\omega^3$
Ω^{01}	0	0	0	0	0	0
Ω^{23}	0	0	0	0	0	0
Ω^{02}	0	0	g	g	e	e
Ω^{12}	0	0	$-g$	$-g$	$-e$	e
Ω^{13}	0	0	$-e$	$-e$	g	g
Ω^{03}	0	0	e	e	$-g$	$-g$

Nous avons choisi le plan $\vec{e}_2\vec{e}_3$ de manière que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, cette condition fixe la position de ce plan, mais non celle de $\vec{e}_2$ dans ce plan. Nous pouvons simplifier le tableau précédent en effectuant une rotation du plan 2,3 autour du plan 0,1,

$$\bar{\vec{e}}_2 = \vec{e}_2 \cos\alpha - \vec{e}_3 \sin\alpha,$$

$$\bar{\vec{e}}_3 = \vec{e}_2 \sin\alpha + \vec{e}_3 \cos\alpha.$$

On obtient un tableau identique où f et g sont remplacés par

$$\bar{e} = g\cos 2\alpha - e\sin 2\alpha,$$

$$\bar{f} = g\sin 2\alpha + e\cos 2\alpha;$$

par un choix convenable de l'angle α, on peut supposer $e = 0$, par exemple, on obtient alors

$$\left[\sum_{(i,j)} \Omega^{ij}\left[\vec{e}_i\vec{e}_j\right]\right] = g(\omega^0 + \omega^1)\left(\vec{e}_1 - \vec{e}_0\right)\left(\omega^2\vec{e}_2 - \omega^3\vec{e}_3\right).$$

Remarquons que le système de référence $\vec{e}_i$ n'est pas entièrement défini par les conditions précédentes. On peut encore faire tourner les vecteurs $\vec{e}_0$ et $\vec{e}_1$ dans leur plan. Cette rotation se traduit par les formules

$$
(\mathfrak{T}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\overline{\vec{e}}_0 &= \vec{e}_0 \operatorname{ch}\theta + \vec{e}_1 \operatorname{sh}\theta, & \overline{\vec{e}}_2 &= \vec{e}_2,\\
\overline{\vec{e}}_1 &= \vec{e}_0 \operatorname{sh}\theta + \vec{e}_1 \operatorname{ch}\theta, & \overline{\vec{e}}_3 &= \vec{e}_3,\\
\overline{\omega}_0 &= \omega^0 \operatorname{ch}\theta - \omega^1 \operatorname{sh}\theta, & \overline{\omega}^2 &= \omega^2,\\
\overline{\omega}_1 &= -\omega^0 \operatorname{sh}\theta + \omega^1 \operatorname{ch}\theta, & \overline{\omega}^3 &= \omega^3,
\end{aligned}
\right.
$$

Cette transformation $(\mathfrak{T})$ ne change pas la forme du saut du bivecteur de courbure, car

$$(\overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_1) = (\omega_0 + \omega_1)(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta),$$

$$\left(\overline{\vec{e}}_0 - \overline{\vec{e}}_1\right) = \left(\vec{e}_0 + \vec{e}_1\right)(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta),$$

et

$$\left[\sum_{(i,j)} \overline{\Omega}^{ij}\left[\overline{\vec{e}}_i\,\overline{\vec{e}}_j\right]\right] = \overline{g}(\overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_1)\left(\overline{\vec{e}}_0 - \overline{\vec{e}}_1\right)\left(\omega^2 \overline{\vec{e}}_2 - \omega^3 \overline{\vec{e}}_3\right),$$

où

$$\overline{g}(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta)^2 = g.$$

Interprétation géométrique des ondes. — Posons

$$\vec{E} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1, \qquad \vec{E}' = \vec{e}_0 - \vec{e}_1,$$

$$2\Omega = \omega^0 + \omega^1, \qquad 2\Omega' = \omega^0 - \omega^1,$$

on a

$$\overrightarrow{dM} = \Omega\vec{E} + \Omega'\vec{E}' + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3,$$

et

$$\left[\sum_{(i,j)} \Omega^{ij}\left[\vec{e}_i\,\vec{e}_j\right]\right] = g\,\Omega\,\vec{E}'\left(\omega^2\vec{e}_2 - \omega^3\vec{e}_3\right).$$

Si l'on considère l'onde dans l'espace-temps à 4 dimensions, $\Omega = 0$ est l'équation du plan P tangent à la surface de discontinuité S. Les vecteurs $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{E}'$ sont tangents à S ; ce dernier vecteur $\vec{E}'$ est tangent au rayon gravifique, le plan tangent à S

$$(\mathrm{P}) \qquad \omega^0 + \omega^1 = 0$$

est, en effet, tangent au cône isotrope

$$(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 = 0,$$

suivant ce vecteur $\vec{E'}$.

Le vecteur $\vec{E}$ a une direction isotrope et n'est pas parallèle à P.

Transversalité des ondes. — Interprétons géométriquement les résultats précédents. La force qui agit sur un point placé en O, et animé de la quantité de mouvement u^i, a pour composantes

$$du^i = \sum_{k,e} \gamma_{ike}\, u^k u^e.$$

Cette force ne subit aucune variation brusque puisque les γ_{ike} sont continus lorsqu'on traverse S.

Remarquons ici que le vecteur du^i, ainsi que les γ_{ihk}, dépendent du système de référence choisi ; lorsque nous disons que la force d'univers est continue à la traversée de S, nous voulons dire que par un choix convenable de $\vec{e_i}$, on peut supposer les γ_{ihk} continus en tout point de S.

Par contre, les dérivées des γ_{ihk} subissent des variations que l'on ne peut annuler par un choix convenable du systèmo $\vec{e_i}$. L'accélération seconde, qui dépend de ces dérivées, a donc une discontinuité en O. Son étude ne nous renseignerait qu'imparfaitement sur l'interprétation physique que l'on peut donner à l'onde, car ce vecteur dépend aussi du choix des $\vec{e_i}$.

La seule combinaison des dérivées premières des γ_{ihk} qui ait un sens absolu est la courbure, elle traduit des propriétés invariantes de la force d'univers ; la courbure se manifeste comme on sait par la différence des valeurs de la force en deux points infiniment voisins.

Or, la saute du bivecteur de courbure est

$$g\,\Omega\,\vec{E'}\left(\omega^2\vec{e_2} - \omega^3\vec{e_3}\right).$$

C'est un bivecteur tangent à S, puisque $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ et $\vec{E'}$ sont parallèles à P. Nous dirons donc que **l'onde est transversale**.

Géométriquement la courbure peut s'interpréter au moyen d'une transformation linéaire homogène :

Considérons en O un contour infiniment petit (Γ) représenté par un bivecteur dont les projections sont $[\omega^i \omega^j]$; considérons un point $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ de l'espace tangent en O et

$$\overline{M} = M + \int_\Gamma dM.$$

La transformation infinitésimale T, qui fait passer de P à $\overline{P}$, est définie par

$$\bar{x}^i = x^i + \sum_k x^k \Omega_k^i,$$

où les $[\omega^i \omega^j]$ jouent le rôle de coefficients. Soient T et T′ les transformations qui correspondent à deux points voisins séparés par S; la transformation $[T] = T'T^{-1}$ est définie par

$$\bar{x}^i = \sum_k x^k [\Omega_k^i],$$

c'est-à-dire

$$[T] \quad \begin{cases} \bar{x}^0 + \bar{x}^1 = 0, \\ \bar{x}^0 - \bar{x}^1 = g[\Omega\omega^2]\, x^2 - g[\Omega\omega^3]\, x^3, \\ 2\bar{x}^2 = -g[\Omega\omega^2](x^0 + x^1), \\ 2\bar{x}^3 = +g[\Omega\omega^3](x^0 + x^1). \end{cases}$$

L'examen de ces formules montre que le vecteur qui joint un point M au point $[T]M$ est parallèle à P; de plus, seules les composantes $[\Omega\omega^2]$ et $[\Omega\omega^3]$ de (Γ) sur le plan tangent à S interviennent dans l'expression de $[T]$.

Les considérations précédentes justifient le qualificatif de transversales que nous avons donné aux ondes de gravitation du second ordre.

II. — Le champ de gravitation d'une Céphéide.

Nous allons aborder maintenant un problème d'une nature différente : nous chercherons les espaces d'Einstein, à symétrie sphérique, dans lesquels la courbure est fonction de r et t, et non plus seulement de r comme dans le ds^2 de Schwarzschild. Cette étude nous a été suggérée par le problème des Céphéides. Imaginons un astre sphérique en pulsation; nous entendons par là que chaque molécule est animée d'un mouvement oscillatoire le long d'un rayon de l'astre autour d'une position moyenne; nous supposerons que la densité à l'intérieur de l'astre ne dépend que du temps et de la distance au centre; l'astre est soumis, en somme, à une pulsation d'ensemble. Certains astronomes considèrent que les étoiles variables du type « Céphéide » sont des astres sphériques en pulsation.

On peut se demander si un tel astre n'émet pas d'ondes de gravitation sphériques, ondes périodiques dont la période serait justement celle d'une pulsation. Le problème ainsi posé est différent de celui que nous avons étudié dans la première partie, car si une Céphéide émet des ondes de gravitation, ces ondes sont continues et n'appartiennent pas au type d'ondes de discontinuité que nous venons d'envisager.

Cherchons donc le ds^2 extérieur d'un tel astre.

Choix des notations. — Pour cette étude, il est commode de fixer d'une manière particulière le système de coordonnées adopté. Soient O le centre de l'astre, M un point de l'univers et t, r, u, v les coordonnées de M. Nous imposerons à ces coordonnées les conditions suivantes :

Le rayon OM a pour équations

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

L'équation d'un rayon lumineux, qui se propage suivant OM, est $r \pm t = \text{const.}$, r est une variable d'espace et t une variable de temps.

La sphère de centre O, qui passe par M, admet pour ds^2

$$g^2(r,\ t)\left[\frac{du^2}{u^2} - \frac{dv^2}{u^2}\right],$$

qui est bien le ds^2 d'une sphère.

La condition imposée aux variables r et t simplifiera le problème, car si nous trouvons qu'il y a propagation d'ondes, l'équation de ces ondes sera

$$r \mp t = \text{const.}$$

Le ds^2 de l'espace-temps est

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2,$$

où

$$\omega^0 = f(r,\ t)\,dt, \qquad \omega_0 = \omega^0,$$
$$\omega^1 = f(r,\ t)\,dr, \qquad \omega_1 = -\omega^1,$$
$$\omega^2 = g(r,\ t)\frac{du}{u}, \qquad \omega_2 = \omega^2,$$
$$\omega^3 = g(r,\ t)\frac{dv}{u}, \qquad \omega^3 = -\omega^3,$$

f et g sont deux fonctions inconnues.

Mise en équations. — Les ω_{ij} sont définis par les conditions

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \qquad (\omega_i)' = \sum_j \omega_{ij}\,\omega^j,$$

leur calcul ne présente pas de difficultés :

$$\omega_{01} = \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial r}\omega^0 - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial t}\omega^1, \qquad \omega_{02} = \frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial t}\omega^2,$$
$$\omega_{03} = -\frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial t}\omega^3, \qquad \omega_{12} = \frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial r}\omega^2,$$
$$\omega_{13} = -\frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial r}\omega^3, \qquad \omega_{23} = -\frac{1}{g}\omega^3.$$

Enfin, les composantes du bivecteur de courbure définies par

$$\Omega_{ij} = (\omega_{ij})' - \sum_k [\omega_{ik}\,\omega_j^k]$$

sont

$$\Omega_{01} = D[\omega^0\omega^1], \qquad \Omega_{02} = B[\omega^1\omega^2] + C[\omega^0\omega^2],$$
$$\Omega_{03} = -B[\omega^1\omega^3] - C[\omega^0\omega^3], \qquad \Omega_{12} = A[\omega^1\omega^2] + B[\omega^0\omega^2],$$
$$\Omega_{13} = -A[\omega^1\omega^3] - B[\omega^0\omega^3], \qquad \Omega_{23} = d[\omega^2\omega^3],$$

où l'on a posé

$$D = -\frac{1}{f^2}\left[\frac{\partial^2 \log f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \log f}{\partial r^2}\right],$$
$$B = \frac{1}{f^2 g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial r}\right],$$
$$C = \frac{1}{f^2 g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{\partial \log f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r}\right],$$
$$A = \frac{1}{f^2 g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{\partial \log f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r}\right],$$
$$d = -\frac{1}{g^2}\left[1 - \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\right].$$

Portons ces valeurs dans les systèmes (I) et (II) de la première partie, on obtient le système

$$D = d, \qquad B = 0, \qquad 2A + d = 0, \qquad 2C - d = 0.$$

Posons

$$f = \varphi^{-\frac{1}{2}}.$$

La combinaison $A + C = 0$ donne

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\varphi \frac{\partial g}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi \frac{\partial g}{\partial t}\right] = 0.$$

Il existe donc une fonction $\theta(r, t)$ telle que

$$\varphi \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \qquad \varphi \frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Portons ces valeurs de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial t}$ dans l'équation $B = 0$, celle-ci devient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0,$$

donc

$$\theta = f_1(r - t) + f_2(r + t);$$

posons

$$x = r - t, \qquad y = r + t$$

et

$$F_1(x) = -\int \frac{dx}{f_1(x)}, \qquad F_2(y) = -\int \frac{dy}{f_2(y)},$$

l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

s'écrit

$$f'_1(x)\frac{\partial g}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

d'où il résulte que

$$g(x, y) = g[F_1(x) + F_2(y)].$$

De plus,

$$\frac{1}{f^2} = \varphi = \frac{-f'_1}{g' F'_2} = \frac{f'_2}{g' F'_1}.$$

Portons ces valeurs de f et g dans l'équation $A - C + D = 0$, celle-ci devient

$$\left(\frac{g''}{g'}\right)' + 2\frac{g''}{g'} = 0.$$

D'où

$$g' = k - \frac{2m}{g},$$

k et m désignant deux constantes.

Portons enfin dans $A - C + d = 0$,

$$(1) \qquad 2k\left[2 + \frac{f'_2}{f'_1} + \frac{f'_1}{f'_2}\right] + (k-1)g = 0.$$

Deux cas sont à examiner séparément :

1° $k = 1$. On a alors

$$f'_1 + f'_2 = 0.$$

Comme f_1 est une fonction de x seul et f_2 de y seul,

$$f'_1 = -f'_2 = k',$$

$$F_1 = \frac{x}{k'} + h_1, \qquad F_2 = \frac{y}{k'} + h_2,$$

et g est une fonction de $F_1 + F_2$, c'est-à-dire de $x + y = r$. Posons $g(r) = r_1$. La relation $g' = 1 - \frac{m}{g}$ montre que

$$r_1 + 2m \log(r_1 - 2m) = r.$$

Enfin, $u^{\frac{1}{2}} = f$ nous donne

$$f^2 = \frac{g'}{k'^2} = \frac{1}{k'^2}\left(1 - \frac{2m}{r_1}\right).$$

2° $k \neq 1$. Nous allons montrer que cette hypothèse nous conduit à la même conclusion

$$f'_1 = -f'_2 = k', \qquad \text{donc} \qquad k = 1.$$

En effet, si $k - 1$ n'est pas nul, la quantité

$$\frac{f'_2}{f'_1} + \frac{f'_1}{f'_2}$$

est fonction de $F_1 + F_2$ d'après l'équation (1). Donc,

$$\frac{D\left(\frac{f'_2}{f'_1} + \frac{f'_1}{f'_2},\ F_1 + F_2\right)}{D(x, y)} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\frac{f''_1}{f'^2_1} - \frac{f''_1}{f'^2_2} + \frac{f''_2}{f'^2_2} - \frac{f''_2}{f'^2_1} = 0,$$

ou

$$(f''_1 - f''_2)(f'^2_1 - f'^2_2) = 0.$$

$2a$. Si $f'_1 + f'_2 = 0$, o est ramené au cas où $k = 1$.
$2b$. Si $f'_1 - f'_2 = 0$, on a

$$f'_1 = f'_2 = k'.$$

$2c$. Si $f''_1 - f''_2 = 0$, on a

$$f'_1 = f'_2 + \text{const.},$$

et comme f'_1 est fonction de x seul et f'_2 fonction de y seul, on en conclut que f'_1 et f'_2 sont constants.

Admettons donc un instant les conclusions de $2b$ et $2c$:

$$f'_1 = c'_1, \qquad f'_2 = c'_2, \qquad F'_1 = \frac{1}{c'_1}, \qquad F'_2 = \frac{-1}{c'_2}.$$

L'équation devient

$$2k'\left(2 + \frac{c'}{c''} + \frac{c''}{c'}\right) + (k-1)g\left(\frac{x}{c'} - \frac{y}{c''}\right) = 0.$$

Si $k \neq 1$, g est donc une constante et l'espace est euclidien.

L'hypothèse $k \neq 1$ n'est donc pas admissible et la solution est celle obtenue au n° I.

Nous allons montrer que le ds^2 ainsi obtenu n'est autre que le ds^2 de Schwarzschild :

Introduisons partout la variable r_1 au lieu de r et remplaçons t et r par $\frac{t}{k'}$ et $\frac{r}{k'}$, nous aurons pour ds^2 de notre univers

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2,$$

avec

$$\omega^0 = \left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \partial t,$$

$$\omega^1 = \left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dr_1,$$

$$\omega^2 = r_1 \frac{du}{u},$$

$$\omega^3 = r_1 \frac{dv}{u}.$$

Le ds^2 d'une sphère pulsante est donc le ds^2 de Schwarzschild : l'action gravitationnelle de cette sphère est donc la même que si elle était au repos, et l'on ne doit pas s'attendre à observer des effets de gravitation particuliers aux Céphéides.

III. — La propagation de la gravitation et le résultat de Laplace.

Laplace avait établi que si l'attraction newtonienne se propageait avec la vitesse de la lumière, les longitudes des planètes contiendraient un terme proportionnel au carré du temps ou, ce qui est équivalent, que les demi-grands axes des orbites planétaires contiendraient un terme séculaire du premier ordre et de genre zéro. Ce phénomène, s'il avait lieu, introduirait dans la longitude de notre globe une inégalité atteignant 20′ au bout d'un an. Une telle inégalité n'ayant pas été constatée, Laplace en avait conclu une propagation quasi instantanée de la gravitation.

Nous allons montrer dans ce paragraphe que le résultat précédent n'est pas en contradiction avec celui que nous venons d'obtenir.

Examinons ce que dit Laplace à ce sujet : Laplace considère l'attraction comme produite par l'impulsion sur les corps attirés d'un fluide se prapageant avec la vitesse de la lumière; par un raisonnement en tous points semblable à celui qui permet de calculer l'aberration de la lumière, Laplace montre que la force d'attraction doit présenter elle aussi une déviation lorsque le point attiré se déplace avec une vitesse v. Cette déviation a la même valeur que l'aberration des fixes $v \sin \varphi$, φ désignant l'angle de la vitesse v avec le plan normal au rayon vecteur. Tout se passe comme si un astre en mouvement éprouvait de la part du milieu une résistance proportionnelle à la vitesse et il en résulte dans sa longitude un terme $\frac{3}{2} v [nt]^2$.

On a pu être surpris que la loi d'attraction einsteinienne ne comporte pas les mêmes conséquences puisque cette attraction se propage avec la vitesse de la lumière. A vrai dire, on n'a pas eu à se préoccuper de cette contradiction apparente, car on a calculé directement les lois du mouvement planétaire en partant des équations de la nouvelle mécanique et non en appliquant des corrections à l'ancienne mécanique. On a pu penser par la suite que si le phénomène d'aberration de la force qu'avait prévu Laplace se produisait réellement, il était compensé par d'autres phénomènes tels que la variation de la masse avec la vitesse; en d'autres termes, les lois de la nouvelle mécanique n'étant plus les mêmes, les calculs de Laplace perdaient toute signification.

Mais si la raison est satisfaite par le point de vue que nous venons d'exposer, la curiosité ne l'est pas et nous pouvons nous demander s'il n'existe pas réellement un phénomène d'aberration pour les forces de gravitation.

De plus, si l'on examine la question de plus près, on est surpris par ce fait que les différences entre la nouvelle mécanique et l'ancienne sont toutes de l'ordre de v^2 alors que le terme introduit par Laplace est de l'ordre de v, il est donc étonnant que ces termes se compensent. Nous allons étudier cette question et montrer que, quel que soit le point de vue auquel on se place, l'aberration de la force d'attraction einsteinienne est de l'ordre de v^2.

Le phénomène d'aberration de la force d'univers. — Considérons un espace euclidien, régi par la cinématique de Minkowsky. Soient $\vec{e}_0\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ le système de référence, et

$$ds^2 = dt^2 - \sum_1^3 (dx^i)^2.$$

Soient X^1, X^2, X^3, X^0 les composantes de la force d'univers; ces quantités dépendent de la position et de la vitesse du point d'application. Soient $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ les composantes de la quantité de mouvement d'un point M, m_0 sa masse au repos,

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad \text{et} \quad v^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2,$$

on a

$$u^0 = m_0(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}},$$

la vitesse de la lumière étant prise pour unité. Les équations de la dynamique s'écrivent

$$\frac{du^i}{ds} = X_i.$$

On en déduit

$$(1 - v^2)\frac{dm_0}{ds} = X^0 - X^1 v_1 - X^2 v_2 - X^3 v_3.$$

Hypothèses. — I. Nous supposerons que l'état interne du point M ne change pas ; en d'autres termes, ce point n'absorbe ni n'émet d'énergie, donc

$$\frac{dm_0}{ds} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad X^0 = \Sigma X^i v_i.$$

II. La force d'univers dépend de la vitesse du point sur lequel elle agit ; désignons par $F_0(X_0^i)$ la force qui agit sur un point au repos par rapport au système de référence. Considérons maintenant un point animé de la vitesse $v^1 = v$, $v^2 = 0$, $v^3 = 0$, où v est une quantité très petite que nous prendrons comme infiniment petit du principal. Soit $F(X^i)$ la force qui agit sur ce point ; nous supposerons que les X^i ne diffèrent des X_0^i que par des termes du second ordre en v. Nous verrons que c'est le cas de la force d'attraction einsteinienne.

Nous considérerons, en outre, un système de référence $\vec{e}'_i$, animé par rapport au premier de la vitesse v, et nous désignerons par Y^i les composantes de la force F dans ce système.

L'aberration de la force d'univers est susceptible de trois définitions :

1° On peut appeler ainsi l'angle $\Delta\varphi$ que font les vecteurs X_0^i et X^i ; ces vecteurs sont rapportés au même système de référence : c'est l'aberration pour un observateur fixe.

2° On peut appeler aberration l'angle $\Delta\varphi'$ des vecteurs X^i et Y^i. C'est la déviation apparente de F pour un observateur primitivement au repos puis entraîné avec le système $\vec{e}'_i$.

3° On peut enfin considérer l'angle $d\varphi$ que font les vecteurs X_0^i et Y^i. C'est l'aberration telle que la mesurerait un observateur d'abord fixe et observant la force F_0, puis mobile et observant la force F.

Nous allons montrer que ces trois angles $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi'$, $d\varphi$ sont des infiniment petits du second ordre. Il en est évidemment ainsi de $\Delta\varphi$ puisque X_0^i et X^i ne diffèrent que par des termes de l'ordre de v^2. Il suffit de le démontrer pour $\Delta\varphi'$.

La force d'univers étant un vecteur, on a

$$y^0 = \frac{X^0 - v X^1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{X^0 - v F \cos\varphi}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$y^1 = \frac{X^1 - v X^0}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{F \cos\varphi - v X^0}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$y^2 = X^2 = F \sin\varphi, \qquad y^3 = X^3 = 0,$$

en supposant les axes choisis de telle sorte que l'on ait

$$X^1 = F \cos\varphi, \qquad X^2 = F \sin\varphi, \qquad X^3 = 0;$$

posons

$$Y^1 = F' \cos\varphi', \qquad Y^2 = F' \sin\varphi',$$

on aura

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi \frac{1}{1 - \frac{v X^0}{F \cos\varphi}},$$

d'où, en se limitant aux termes du premier ordre,

$$\Delta\varphi' = \frac{X^0}{F} v \sin\varphi.$$

Il y a donc bien un phénomène d'aberration de la force d'univers analogue à celui qu'on observe sur un rayon lumineux. La déviation subie par un rayon lumineux est $v \sin\varphi$, elle est du premier ordre, la déviation de la force d'univers diffère de la précédente par le facteur $\frac{X_0}{F}$, or ce facteur est aussi du premier ordre en v. En effet, la relation

$$X^0 = \Sigma X^i v_i$$

devient ici

$$X^0 = F v \cos\varphi,$$

on a donc

$$\Delta\varphi' = v^2 \sin\varphi \cos\varphi = v \sin\varphi\, v \cos\varphi.$$

La déviation $\Delta\varphi'$ est égale au produit des composantes de la vitesse parallèles et normales à la force. Cet effet d'aberration est donc aussi du second ordre. On voit que c'est l'introduction de la composante de temps de la force qui réduit l'effet d'aberration à un effet du second ordre.

En résumé : quel que soit le point de vue auquel on se place, la déviation de la force d'univers est de l'ordre de v^2.

La force d'attraction d'Einstein. — Il nous reste à montrer que la seconde hypothèse du paragraphe précédent est vérifiée pour la force d'attraction einsteinienne.

On sait qu'en relativité généralisée, la force n'est pas un vecteur, elle dépend du système de référence. Nous pourrons cependant la définir pour le ds^2 de Schwarzschild en fixant ce système de référence. Le champ de gravitation d'un point de masse M est régi par le ds^2

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2,$$

où

$$\omega^0 = \frac{1 - \frac{M}{2r}}{1 + \frac{M}{2r}}\, dt, \qquad \omega^i = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2 dx^i,$$

$$r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Nous prendrons comme système de référence quatre vecteurs $\vec{e}_i$ tels que

$$\overrightarrow{dM} = \Sigma\, \omega^i \vec{e}^i.$$

Il est facile de déduire des identités

$$(\omega^i)' = \Sigma\, [\omega^i_k \omega^k]$$

les expressions des ω_{ij} :

$$\omega_{0i} = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-3}\frac{x_i}{r}\,\omega_0,$$

$$\omega_{ij} = \frac{M}{r^2}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-3}\frac{x_i\omega^j - x_j\omega^i}{r}.$$

Soient m_0 la masse au repos d'un point, $u^i = m_0 \frac{\omega^i}{ds}$ sa quantité de mouvement, les équations de la mécanique

$$d\left(\Sigma\, u^i \vec{e}_i\right) = 0$$

nous donnent les composantes de la force d'univers qui agit sur ce point

$$(\vec{F})\left\{\begin{aligned} f^0 &= \frac{du^0}{ds} = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-1}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-3}\frac{u^1x_1 + u^2x_2 + u^3x_3}{r}\,u_0,\\ f^i &= \frac{du^i}{ds} = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-1}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-3}\frac{x^i}{r}(u^0)^2\\ &\quad + \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-3}\frac{u^1x_1 + u^2x_2 + u^3x_3}{r}\,u^i\\ &\quad - \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-3}\frac{x^1}{r}\left[(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2\right].\end{aligned}\right.$$

On peut faire ici une remarque curieuse : cette force est la résultante de deux forces

$$(\vec{F}_1) \quad \begin{cases} f^0_{(1)} = \frac{1}{u^0}[f^1_{(1)} u^1 + f^2_{(2)} u^2 + f^3_1 u^3], \\ f^i_{(1)} = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-1}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-3} \frac{x_i}{r}(u^0)^2, \end{cases}$$

$$(\vec{F}_2) \quad \begin{cases} f^0 = 0, \\ f^i = +\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-3} \frac{u^1 x_1 + u^2 x_2 + u^3 x_3}{r} u_i \\ \qquad - \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^{-3} \frac{x_1}{r}[(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2]. \end{cases}$$

F_1 ne dépend pas de la vitesse, nous l'appellerons force de gravitation ; elle peut s'écrire

$$f^i = \frac{\partial V}{\partial \omega^i} \quad \text{où} \quad V = \int -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{M}{2r}\right) dr,$$

cette fonction V vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta V = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^{i2}} = 0.$$

La force F_2 ne dépend que de la vitesse du point et son travail est nul, nous l'appellerons force centrifuge.

Nous développerons sans doute dans un autre travail l'étude du ds^2 de Schwarzschild et de la force F. Pour le moment, contentons-nous de constater que la force d'univers qui agit sur un point dépend de la vitesse de ce point, mais que les termes qui contiennent cette vitesse sont de l'ordre de v^2. L'hypothèse II de la page 70 est donc bien vérifiée.