

# BULLETIN DE LA S. M. F.

V. HLAVATÝ

## **Sur la déformation infinitésimale d'une courbe dans la variété métrique avec torsion**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 56 (1928), p. 18-25

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1928\\_\\_56\\_\\_18\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__18_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA DÉFORMATION INFINITÉSIMALE D'UNE COURBE  
DANS LA VARIÉTÉ MÉTRIQUE AVEC TORSION;**

PAR M. V. HLAVATÝ.

Nous nous proposons dans cette Note d'étudier les déformations infinitésimales d'une courbe  $C(s)$ , en la supposant située dans un espace à  $n$  dimensions (aux coordonnées  $x^{\nu}$ ) qui à son tour est doué d'une connexion métrique (avec torsion), dont les paramètres sont  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ . Étant  $x^{\nu} = x^{\nu}(s)$  les équations paramétriques de  $C$  et  $V^{\nu}$  un champ vectoriel le long de  $C$  nous appellerons « courbe déformée  $C$  » la courbe aux équations

$$(1) \quad x^{\nu} = x^{\nu} + \varepsilon V^{\nu},$$

où  $\varepsilon$  est une constante infiniment petite <sup>(1)</sup>.

Dans ce qui suit, nous supposons que le paramètre  $s$  est l'arc de  $C$ . Si l'on désigne par  $\hat{t}^{\nu} = \hat{t}^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds}$  le verseur (= vecteur unitaire) tangent de  $C$ , par  $\hat{i}_1^{\nu}, \dots, \hat{i}_n^{\nu}$  resp.  $k_1, \dots, k_{n-1}$  les verseurs consécutifs normaux resp. les courbures de  $C$ , on trouve les formules de Frenet <sup>(2)</sup>

$$(2) \quad D_{\hat{t}} \hat{i}_c^{\nu} = k_c \hat{i}_{c-1}^{\nu} - k_{c+1} \hat{i}_{c+1}^{\nu} \quad (c = 1, \dots, n; k_0 = k_n = 0),$$

1. *Déformation de l'arc.* — Cela posé, en désignant par  $g_{\nu\mu}$  le tenseur métrique et en le déplaçant d'après (1) on obtient  ${}'g_{\nu\mu}$

$$(3) \quad {}'g_{\nu\mu} = g_{\nu\mu} + \varepsilon (x^{\sigma} - x^{\sigma 0}) \frac{d}{dx^{\sigma 0}} g_{\nu\mu} + \varepsilon \Lambda^{\alpha} (\Gamma_{\nu 0}^{\alpha} g_{\mu\alpha} + \Gamma_{\mu 0}^{\alpha} g_{\nu\alpha}),$$

<sup>(1)</sup> La déformation infinitésimale d'une courbe dans une variété riemannienne (= métrique sans torsion) fut étudiée par LEVI-CIVITA, *Sur l'écart géodésique* [*Math. Annalen*, t. 97 (26), p. 291-320]; CARTAN, *Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes*, *Rend. Ac. Lincei* (6a), 5 (27), p. 609-613], et J.-A. SCHOUTEN, *Over infinitesimale vervormingen van een  $V_m$  in een  $V_n$*  (*K. Akademie van Wet. Amsterdam*, t. XXXVI, n° 9).

<sup>(2)</sup> STRUIK, *Grundsätze der mehrdimensionalen Differentialgeometrie*, p. 76 (Berlin, 1922). Le symbole  $D$  désigne ici la dérivation intrinsèque d'après  $s$ .

tandis que le verseur tangent  $i^{\nu}$  de  $C$  se calcule d'après

$$(4) \quad i^{\nu} = \frac{d'x^{\nu}}{d's} = \frac{d'x^{\nu}}{ds} \frac{ds}{d's} = \left( i^{\nu} + \varepsilon \frac{dV^{\nu}}{ds} \right) \frac{ds}{d's}.$$

Or, si  $S_{\lambda\mu}^{\nu}$  est l'affineur de torsion

$$S_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}),$$

on déduit de (3) et (4)

$$\begin{aligned} 1 &= g_{\lambda\mu} i^{\lambda} i^{\mu} = \left( \frac{ds}{d's} \right)^2 \left[ g_{\lambda\mu} + \varepsilon V^{\omega} (\Gamma_{\lambda\omega}^{\alpha} g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\omega}^{\alpha} g_{\lambda\alpha}) \right] \\ &\quad \times \left[ i^{\lambda} + \varepsilon \frac{dV^{\lambda}}{ds} \right] \left[ i^{\mu} + \varepsilon \frac{dV^{\mu}}{ds} \right] \\ &= \left( \frac{ds}{d's} \right)^2 \left[ 1 + 2\varepsilon i_{\lambda} (DV^{\lambda} - 2S_{\omega\mu}^{\lambda} i^{\mu} V^{\omega}) + \varepsilon^2(\dots) + \varepsilon^3(\dots) \right], \end{aligned}$$

d'où la formule approchée

$$(5) \quad \frac{d's}{ds} = 1 - \varepsilon i_{\lambda} (DV^{\lambda} - 2S_{\omega\mu}^{\lambda} i^{\mu} V^{\omega}).$$

2. Pour l'interpréter, remarquons tout d'abord qu'à côté de (2), chaque champ versoriel  $V$  donne naissance aux formules analogues

$$(1') \quad \frac{D_i V^c}{c} = K_c V^c - K_{c-1} V^{c-1} \quad (c = 1, \dots, n; K_0 = K_n = 0)$$

(où  $V^c = V^1, V^2, \dots, V^n$  sont les verseurs normaux et  $K_1, \dots, K_{n-1}$  « les courbures » du champ  $V$ ). Or, en posant  $V^{\nu} = v^{\nu}$ , on trouve

$$(6) \quad i_{\lambda} DV^{\lambda} = \frac{dv}{ds} \cos \alpha_1 + v K_1 \cos \alpha_2$$

où

$$\alpha_1 = \sphericalangle (i^{\nu}, V^1), \quad \alpha_2 = \sphericalangle (i^{\nu}, V^2).$$

D'autre part, la connexion étant avec torsion, les extrémales de l'équation  $\delta \int dS = 0$ , c'est-à-dire les géodésiques  $x^{\nu} = X^{\nu}(S)$  ne sont pas autoparallèles. En désignant par  $k^{\nu}$  le vecteur de la première courbure de la géodésique, on obtient

$$(7) \quad k^{\nu} = \frac{d^2 X^{\nu}}{dS^2} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda \mu \end{matrix} \right\} \frac{dX^{\lambda}}{dS} \frac{dX^{\mu}}{dS} - 2S^{\nu}_{\lambda\mu} \frac{dX^{\lambda}}{dS} \frac{dX^{\mu}}{dS} = -2S^{\nu}_{\lambda\mu} \frac{dX^{\lambda}}{dS} \frac{dX^{\mu}}{dS}.$$

et cette équation nous permet d'introduire la notion de la *courbure géodésique*  $k$  resp. du vecteur de *courbure géodésique*  $k'$  d'une courbe  $C$ . La courbure géodésique resp. le vecteur de courbure géodésique d'une courbe  $C$  sont les notions se rattachant à la courbe géodésique qui, au point examiné, possède le même vecteur tangent avec  $C$  <sup>(1)</sup>.

Or, en tenant compte de (7), on trouve

$$-2S_{\omega}^{\omega} \epsilon_i \epsilon^i V^{\omega} = k_{\omega} V^{\omega} = k \epsilon \cos \beta,$$

où

$$\beta = \mathcal{A} \left( \begin{matrix} k' \\ \epsilon \end{matrix} V^{\nu} \right),$$

et pour cette raison l'équation (5) peut s'écrire

$$(8) \quad \boxed{\frac{d's}{ds} = 1 + \epsilon \epsilon_1 \cos \alpha_1 \frac{d \log \epsilon}{ds} + K_1 \cos \alpha_2 + k \cos \beta}.$$

3. On peut se servir de cette formule pour résoudre facilement le problème suivant : « Étant donné un champ versoriel arbitraire  $\Gamma'$  le long de  $C(s)$ , qui n'est pas orthogonal à  $C(s)$  ( $\cos \alpha_1 \neq 0$ ), on en doit construire  $V^{\nu}$  de telle façon que la courbe déformée  $C'(s)$  possède le même arc avec  $C(s)$ . » Pour cela il suffit et il est nécessaire que  $V^{\nu}$  soit de la forme  $V^{\nu} = \epsilon \Gamma'$ , où

$$\epsilon = e^{-\int \frac{K_1 \cos \alpha_2 + k \cos \beta}{\cos \alpha_1} ds}$$

Or, en déformant  $C$  d'après (1), où

$$V^{\nu} = \Gamma' e^{-\int \frac{K_1 \cos \alpha_2 + k \cos \beta}{\cos \alpha_1} ds}$$

et  $\Gamma'$  est un champ versoriel arbitraire (sauf  $\cos \alpha_1 \neq 0$ ) les courbes  $C$  et  $C'$  possèdent le même arc (à une constante additive près).

D'autre part, on déduit de (8) que le champ  $\Gamma^{\nu}$  étant orthogonal

(1) Toutes les courbes tangentes dans un point ont la même courbure géodésique et le même vecteur de courbure géodésique.

à C, il est en général impossible d'en construire  $V^\nu$ , pour lequel C ait le même arc que C, car pour cela il suffit et il est nécessaire que soit

$$(9) \quad K_1 \cos \alpha_2 = k \cos \beta = 0$$

et cette condition ne dépend pas de c. Si au contraire cette équation est satisfaite pour un champ  $P'$ , chaque  $V^\nu = \nu P'$  peut être considéré comme résolvant notre problème. Nous voulons démontrer que si C n'est pas autoparallèle ( $k_1 \neq 0$ ) on peut toujours choisir le champ  $P'$  (orthogonal à C) de telle manière que (9) soit satisfaite. Pour cet effet, posons

$$(10) \quad P' = \sum_{a=2}^n i^a \cos \gamma_a$$

On a donc en raison de (1)' et (1)

$$P' K_1 = \sum_{a=2}^n (k_a i^a - k_{a-1} i^{a-1}) \cos \gamma_a + \sum_{a=2}^n i^a \frac{d \cos \gamma_a}{ds}$$

et par conséquent

$$(9)' \quad K_1 \cos \alpha_2 = -k_1 \cos \gamma_2 :$$

En déformant C d'après (1), où

$$(10)' \quad (a) \quad V^\nu = \nu P', \quad (b) \quad P' = \frac{k \cos \beta}{k_1} i^2 + \sum_{a=3}^n \cos \gamma_a i^a$$

et  $\nu, \gamma_3, \dots, \gamma_n$  sont arbitraires, les deux courbes possèdent le même arc (à une constante additive près).

Si la connexion est sans torsion ( $S_{i^a i^b} = 0$ ), l'équation (10' b) se simplifie, car on a  $k = 0$

$$(10) \quad (c) \quad P' = \sum_{a=3}^n \cos \gamma_a i^a$$

et, dans ce cas, il n'est pas nécessaire que C soit une courbe non autoparallèle.

On voit donc que le théorème énoncé est la généralisation du

fait bien connu que la déformation de l'arc, suivant la binormale (dans l'espace euclidien à trois dimensions), est nulle (1).

La formule (8) est susceptible encore d'autres interprétations géométriques qui se présentent sous une forme assez simple surtout dans le cas d'une variété sans torsion (2).

2. *Déformation du vecteur tangent.* — En tenant compte de (4) et (8) et en posant

$$\varphi = r \left( \cos \alpha_1 \frac{d \log r}{ds} + K_1 \cos \alpha_2 + k \cos \alpha \right),$$

on trouve la formule approchée

$$(11) \quad i^\nu - i'^\nu = \varepsilon \left( \frac{d\Lambda^\nu}{ds} - i'^\nu \varphi \right) = \varepsilon (D\Lambda^\nu - \Gamma_{\omega\mu}^\nu \Lambda^\omega i'^\mu - i'^\nu \varphi)$$

qui fait clairement voir que la différence  $i^\nu - i'^\nu$  n'est pas intrinsèque. Cela se comprend facilement en se rappelant que le vecteur  $i'^\nu$  est pris au point  $x'^\nu \neq x^\nu$ , tandis que  $i^\nu$  a son extrémité dans  $x^\nu$  et qu'on ne peut pas, en général, dans une variété qui n'est pas plane et sans torsion, comparer intrinsèquement deux champs vectoriels *aux points différents*. Or, pour obtenir une formule intrinsèque, il faut avant ou déplacer  $i'^\nu$  de  $x'^\nu$  en  $x^\nu$ , ou bien  $i^\nu$  de  $x^\nu$  en  $x'^\nu$  (3). Nous effectuerons le premier déplacement

(1) Cf., par exemple, BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I (Berlin, 1923).

(2) Cf. SYNGE, *The first and second variations of lengthintegral in Riemannian space*, p. 247-264 (*Proc. London Math. Soc.*, série 2, vol. 25, p. 4).

(3) C'est au fond le même procédé qui donne naissance à la notion de la différentielle intrinsèque d'un vecteur  $p^\nu(x)$ . En le déplaçant du point  $P(x)$  au point voisin  $P'(x + dx)$  suivant les lois de la connexion on obtient dans  $P'$

$$\pi^\nu = p^\nu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu dx^\lambda p^\mu,$$

tandis qu'en tenant compte de son caractère fonctionnel on obtient dans

$$\omega^\nu = p^\nu + dp^\nu.$$

Or, la différence  $\pi^\nu - p^\nu$  resp.  $\omega^\nu - p^\nu$  ne peut pas être intrinsèque, les points  $P$  et  $P'$  étant différents, mais la différence

$$\omega^\nu - \pi^\nu = dp^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu p^\lambda dx^\mu$$

l'est bien, les champs  $\omega^\nu$  et  $\pi^\nu$  étant considérés au même point  $P'$ .

en désignant par  $*i^\nu$  le champ  $i^\nu$  déplacé de  $x^\nu$  en  $'x^\nu$ . Bien que la différence  $*i^\nu - i^\nu$  ne peut pas résulter comme intrinsèque (les champs en question étant aussi aux points différents) nous démontrerons le caractère intrinsèque de  $'i^\nu - *i^\nu$ .

En déplaçant  $i^\nu$  de  $x^\nu$  en  $'x^\nu$  on obtient

$$*i^\nu = i^\nu + ('x^\omega - x^\omega) \frac{\partial}{\partial x^\omega} i^\nu = i^\nu + \varepsilon V^\omega \frac{\partial}{\partial x^\omega} i^\nu,$$

ou, si l'on désigne par  $\Theta$  le symbole de la dérivation intrinsèque le long de  $V^\nu$ ,

$$(12) \quad *i^\nu - i^\nu = \varepsilon (\Theta i^\nu - \Gamma_{\mu\omega}^\nu V^\omega i^\mu).$$

La soustraction des équations (11) et (12) nous donne

$$(12') \quad \boxed{'i^\nu - *i^\nu = \varepsilon \{ DV^\nu - \Theta i^\nu - 2S_{\mu\omega}^\nu V^\omega i^\mu - i^\nu \varphi \}}$$

d'où l'on voit qu'en effet la différence  $'i^\nu - *i^\nu$  est intrinsèque.

C. Q. F. D.

De même si l'on veut calculer le vecteur de courbure  $'k^\nu = 'k_\lambda i^\lambda$  de  $'C$ , on doit employer le même procédé pour parvenir à une notion intrinsèque. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe suivant.

3. *Déformation du vecteur de courbure.* — En déplaçant le vecteur  $k^\nu$  de  $x^\nu$  en  $'x^\nu$  il devient

$$(13) \quad \begin{aligned} *k^\nu &= k^\nu + \varepsilon ('x^\omega - x^\omega) \frac{\partial}{\partial x^\omega} k^\nu \\ &= k^\nu + \varepsilon (\Theta k^\nu + 2S_{\omega\mu}^\nu k^\mu V^\omega - \Gamma_{\omega\mu}^\nu k^\mu V^\omega). \end{aligned}$$

D'autre part, le vecteur de courbure  $'k^\nu$  est défini comme suit :

$$(14) \quad 'k^\nu = \frac{d'i^\nu}{d's} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu 'i^\lambda 'i^\mu,$$

où

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + \varepsilon V^\omega \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu.$$

On déduit donc de (13) et (14)

$$'k^\nu - *k^\nu = \frac{d'i^\nu}{d's} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu 'i^\lambda 'i^\mu - k^\nu - \varepsilon \{ \Theta k^\nu + 2S_{\omega\mu}^\nu k^\mu V^\omega - \Gamma_{\omega\mu}^\nu k^\mu V^\omega \}$$

En y substituant les formules approchées

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}^\nu}{ds} &= \frac{d\hat{i}^\nu}{ds} \frac{ds}{ds} = (1 - \varepsilon\varphi) \left[ \frac{d\hat{i}^\nu}{ds} + \varepsilon \left( \frac{d^2V^\nu}{ds^2} - \frac{d\hat{i}^\nu}{ds} \varphi - \hat{i}^\nu \frac{d\varphi}{ds} \right) \right] \\ &= \frac{d\hat{i}^\nu}{ds} + \varepsilon \left( \frac{d^2V^\nu}{ds^2} - 2 \frac{d\hat{i}^\nu}{ds} \varphi - \hat{i}^\nu \frac{d\varphi}{ds} \right), \\ \Gamma_{i\mu}^\nu \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu &= \left( \Gamma_{i\mu}^\nu + \varepsilon V^\omega \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{i\mu}^\nu \right) \left[ \hat{i}^\lambda + \varepsilon \left( \frac{dV^\lambda}{ds} - \hat{i}^\lambda \varphi \right) \right] \left[ \hat{i}^\mu + \varepsilon \left( \frac{dV^\mu}{ds} - \hat{i}^\mu \varphi \right) \right] \\ &= \Gamma_{i\mu}^\nu \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu + \varepsilon \left[ \Gamma_{i\mu\lambda}^\nu \left( \frac{dV^\lambda}{ds} \hat{i}^\mu + \frac{dV^\mu}{ds} \hat{i}^\lambda \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \varepsilon \Gamma_{i\mu}^\nu \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu + \left( \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{i\mu}^\nu \right) \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu V^\omega \right], \end{aligned}$$

on obtient

$$(15) \quad \begin{aligned} \nu k^\nu - *k^\nu &= \varepsilon \left[ \frac{d^2V^\nu}{ds^2} + \Gamma_{i\mu}^\nu \left( \frac{dV^\lambda}{ds} \hat{i}^\mu + \frac{dV^\mu}{ds} \hat{i}^\lambda \right) - V^\omega \left( \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{i\mu}^\nu \right) \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu \right. \\ &\quad \left. - 2 \varepsilon k^\nu - \hat{i}^\nu \frac{d\varphi}{ds} - \Theta k^\nu - 2 S_{\omega\mu}^\nu k^\mu V^\omega - \Gamma_{\omega\mu}^\nu k^\mu V^\omega \right]. \end{aligned}$$

Pour faire voir que le second membre est un vecteur il faut avoir recours à la notion de l'affineur de courbure

$$R_{\omega\mu\lambda}^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\lambda\omega}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{\lambda\omega}^\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \Gamma_{\lambda\omega}^\lambda$$

et de l'affineur dérivé de  $S_{\omega\lambda}^\nu$

$$DS_{\omega\lambda}^\nu = \frac{dx^\mu}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} S_{\omega\lambda}^\nu - \Gamma_{\omega\mu}^\alpha S_{\alpha\lambda}^\nu - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha S_{\omega\alpha}^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu S_{\omega\lambda}^\alpha \right).$$

En les employant, on trouve que l'équation

$$D^2V^\nu = \frac{d}{ds} DV^\nu - \Gamma_{i\mu}^\nu DV^\mu \hat{i}^\nu$$

peut être écrite aussi

$$(16) \quad \begin{aligned} D^2V^\nu &= \frac{d^2V^\nu}{ds^2} + \left( \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{i\mu}^\nu \right) V^\omega \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu \\ &\quad + \Gamma_{i\mu}^\nu \left( \hat{i}^\lambda \frac{dV^\mu}{ds} + \hat{i}^\mu \frac{dV^\lambda}{ds} \right) + \Gamma_{\omega\lambda}^\nu V^\omega k^\lambda \\ &\quad + S_{\omega\lambda}^\nu \hat{i}^\lambda DV^\mu + V^\omega \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu R_{\omega\mu\lambda}^\nu + 2 V^\omega \hat{i}^\lambda DS_{\omega\lambda}^\nu. \end{aligned}$$

Or l'équation (15) comparée à (16) nous permet de poser

$$(17) \quad \boxed{\nu k^\nu - *k^\nu = \varepsilon \left[ D^2V^\nu - \hat{i}^\lambda \hat{i}^\mu V^\omega R_{\omega\mu\lambda}^\nu - 2 D(S_{\omega\lambda}^\nu \hat{i}^\lambda V^\omega) - D\varphi \hat{i}^\nu - \varphi k^\nu - \Theta k^\nu \right]}$$

et cette équation fait clairement voir le caractère intrinsèque de (15).

Si la courbe C est autoparallèle, on a  $k^\nu = {}^*k^\nu = 0$  et l'on peut déduire de (17) :

*Pour que la courbe C résulte aussi autoparallèle il est nécessaire et suffisant que le vecteur  $V^\nu$  soit l'intégrale de*

$$D^2 V^\nu - \dot{t}^k \dot{t}^p \Lambda^\omega R_{\omega p k}^{\dots \nu} - \lambda (D S_{\omega t}^{\dots \nu} \Lambda^\omega) \dot{t}^k - t' \frac{d\dot{t}^\nu}{ds} = 0.$$

Si la connexion est sans torsion et si les courbes C et C' possèdent le même arc, cette équation se simplifie et devient celle de M. Levi-Civita.

$$D^2 V^\nu - V^\omega \dot{t}^k \dot{t}^p R_{\omega p k}^{\dots \nu} = 0.$$