V. HLAVATÝ

Sur la déformation infinitésimale d'une courbe dans la variété métrique avec torsion

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 18-25
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__18_0>

SUR LA DÉFORMATION INFINITÉSIMALE D'UNE COURBE DANS LA VARIÉTÉ MÉTRIQUE AVEC TORSION;

PAR M. V. HLAVATÝ.

Nous nous proposons dans cette Note d'étudier les déformations infinitésimales d'une courbe $C(s)$, en la supposant située dans un espace à n dimensions (aux coordonnées x^ν) qui à son tour est doué d'une connexion métrique (avec torsion), dont les paramètres sont $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Étant $x^\nu = x^\nu(s)$ les équations paramétriques de C et V^ν un champ vectoriel le long de C nous appellerons « courbe déformée $'C$ » la courbe aux équations

$$(1)\qquad 'x^\nu = x^\nu + \varepsilon V^\nu,$$

où ε est une constante infiniment petite (¹).

Dans ce qui suit, nous supposerons que le paramètre s est l'arc de C. Si l'on désigne par $i^\nu = \underset{1}{i^\nu} = \frac{dx^\nu}{ds}$ le verseur (= vecteur unitaire) tangent de C, par $\underset{2}{i^\nu}, \ldots, \underset{n}{i^\nu}$ resp. $k_1, \ldots, k_{n-1}$ les verseurs consécutifs normaux resp. les courbures de C, on trouve les formules de Frenet (²)

$$(2)\qquad D\underset{e}{i^\nu} = k_e \underset{e+1}{i^\nu} - k_{e-1}\underset{e-1}{i^\nu} \qquad (e = 1, \ldots, n;\ k_0 = k_n = 0).$$

1. *Déformation de l'arc.* — Cela posé, en désignant par $g_{\lambda\mu}$ le tenseur métrique et en le déplaçant d'après (1) on obtient $'g_{\lambda\mu}$

$$(3)\qquad 'g_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + \varepsilon('x^\omega - x^\omega)\frac{\partial}{\partial x^\omega} g_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + \varepsilon V^\omega(\Gamma^\alpha_{\lambda\omega} g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\omega} g_{\lambda\alpha}),$$

(¹) La déformation infinitésimale d'une courbe dans une variété riemannienne (= métrique sans torsion) fut étudiée par LEVI-CIVITA, *Sur l'écart géodésique* [*Math. Annalen*, t. 97 (26), p. 291-320]; CARTAN, *Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes* [*Rend Ac. Lincei* (6*a*), 5 (27), p. 609-613], et J.-A. SCHOUTEN, *Over infinitesimale vervormingen van een* V_m *in een* V_n (*K. Akademie van Wet. Amsterdam*, t. XXXVI, n° 9).

(²) STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differenzialgeometrie*, p. 76 (Berlin, 1922). Le symbole D désigne ici la dérivation intrinsèque d'après s.

tandis que le verseur tangent $'i^\nu$ de $'C$ se calcule d'après

$$(4) \qquad 'i^\nu = \frac{d'x^\nu}{d's} = \frac{d'x^\nu}{ds}\frac{ds}{d's} = \left(i^\nu + \varepsilon\frac{dV^\nu}{ds}\right)\frac{ds}{d's}.$$

Or, si $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ est l'affineur de torsion

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}),$$

on déduit de (3) et (4)

$$\begin{aligned} 1 = 'g_{\lambda\mu}\,'i^\lambda\,'i^\mu &= \left(\frac{ds}{d's}\right)^2\left[g_{\lambda\mu} + \varepsilon V^\omega(\Gamma^\alpha_{\lambda\omega}g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\omega}g_{\lambda\alpha})\right] \\ &\times\left[i^\lambda + \varepsilon\frac{dV^\lambda}{ds}\right]\left[i^\mu + \varepsilon\frac{dV^\mu}{ds}\right] \\ &= \left(\frac{ds}{d's}\right)^2\left[1 + 2\varepsilon i_\lambda(DV^\lambda - 2S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\lambda}i^\mu V^\omega) + \varepsilon^2(\ldots) + \varepsilon^3(\ldots)\right], \end{aligned}$$

d'où la formule approchée

$$(5) \qquad \frac{d's}{ds} = 1 - \varepsilon i_\lambda(DV^\lambda - 2S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\lambda}i^\mu V^\omega).$$

2. Pour l'interpréter, remarquons tout d'abord qu'à côté de (2), chaque champ versoriel I^ν donne naissance aux formules analogues

$$(1)' \qquad \underset{c}{D}I^\nu = K_c \underset{c+1}{I^\nu} - K_{c-1}\underset{c-1}{I^\nu} \qquad (c = 1, \ldots, n;\ K_0 = K_n = 0)$$

(où $\underset{1}{I^\nu} = I^\nu, \underset{2}{I^\nu}, \ldots, \underset{n}{I^\nu}$ sont les verseurs normaux et $K_1, \ldots, K_{n-1}$ « les courbures » du champ I^ν). Or, en posant $V^\nu = vI^\nu$, on trouve

$$(6) \qquad i_\lambda DV^\lambda = \frac{dv}{ds}\cos\alpha_1 + vK_1\cos\alpha_2$$

où

$$\alpha_1 = \sphericalangle\left(i^\nu, \underset{1}{I^\nu}\right), \qquad \alpha_2 = \sphericalangle\left(i^\nu, \underset{2}{I^\nu}\right).$$

D'autre part, la connexion étant avec torsion, les extrémales de l'équation $\delta\int dS = 0$, c'est-à-dire les géodésiques $x^\nu = X^\nu(S)$ ne sont pas autoparallèles. En désignant par $\underset{0}{k^\nu}$ le vecteur de la première courbure de la géodésique, on obtient

$$(7) \qquad \underset{0}{k^\nu} = \frac{d^2X^\nu}{dS^2} + \left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}\frac{dX^\lambda}{dS}\frac{dX^\mu}{dS} - 2S^\nu_{\cdot\lambda\mu}\frac{dX^\lambda}{dS}\frac{dX^\mu}{dS} = -2S^\nu_{\cdot\lambda\mu}\frac{dX^\lambda}{dS}\frac{dX^\mu}{dS}?$$

et cette équation nous permet d'introduire la notion de la *courbure géodésique* $\underset{0}{k}$ resp. du vecteur de *courbure géodésique* $\underset{0}{k}^{\nu}$ d'une courbe C. La courbure géodésique resp. le vecteur de courbure géodésique d'une courbe C sont les notions se rattachant à la courbe géodésique qui, *au point examiné*, possède le même verseur tangent avec C [1].

Or, en tenant compte de (7), on trouve

$$-2 S_{\omega\mu}{}^{\lambda} v_{\lambda} t^{\mu} V^{\omega} = \underset{0}{k}_{\omega} V^{\omega} = \underset{0}{k}\, v \cos\beta,$$

où

$$\beta = \sphericalangle\left(\underset{0}{k}^{\nu}, V^{\nu}\right),$$

et pour cette raison l'équation (5) peut s'écrire

$$\boxed{\frac{d's}{ds} = 1 + v\varepsilon \left\{ \cos\alpha_1 \frac{d \log v}{ds} + K_1 \cos\alpha_2 + \underset{0}{k} \cos\beta \right\}.} \tag{8}$$

3. On peut se servir de cette formule pour résoudre facilement le problème suivant : « Étant donné un champ versoriel arbitraire I^{ν} le long de $C(s)$, qui n'est pas orthogonal à $C(s)$ ($\cos\alpha_1 \neq 0$), on en doit construire V^{ν} de telle façon que la courbe déformée $'C('s)$ possède le même arc avec $C(s)$. » Pour cela il suffit et il est nécessaire que V^{ν} soit de la forme $V^{\nu} = v I^{\nu}$, où

$$v = e^{-\int \frac{K_1 \cos\alpha_2 + \underset{0}{k} \cos\beta}{\cos\alpha_1} ds}.$$

Or, en déformant C *d'après* (1), *où*

$$V^{\nu} = I^{\nu} e^{\int \frac{K_1 \cos\alpha_2 + \underset{0}{k} \cos\beta}{\cos\alpha_1} ds}$$

et I^{ν} *est un champ versoriel arbitraire* (*sauf* $\cos\alpha_1 \neq 0$) *les courbes* C *et* 'C *possèdent le même arc* (à une constante additive près).

D'autre part, on déduit de (8) que le champ I^{ν} étant orthogonal

---

[1] Toutes les courbes tangentes dans un point ont la même courbure géodésique et le même vecteur de courbure géodésique.

à C, il est en général impossible d'en construire V^ν, pour lequel C ait le même arc que 'C, car pour cela il suffit et il est nécessaire que soit

$$(9) \qquad K_1 \cos\alpha_2 + \underset{0}{k}\cos\beta = 0$$

et cette condition ne dépend pas de v. Si au contraire cette équation est satisfaite pour un champ I^ν, chaque $V^\nu = vI^\nu$ peut être considéré comme résolvant notre problème. Nous voulons démontrer que si C n'est pas autoparallèle ($k_1 \neq 0$) on peut toujours choisir le champ I^ν (orthogonal à C) de telle manière que (9) soit satisfaite. Pour cet effet, posons

$$(10) \qquad I^\nu = \sum_{2}^{n}{}_{a}\, \underset{a}{i}^\nu \cos\gamma_a .$$

On a donc en raison de (1)' et (1)

$$\underset{2}{I}^\nu K_1 = \sum_{2}^{n}{}_{\alpha} \left(k_a \underset{a+1}{i^\nu} - k_{a-1} \underset{a-1}{i^\nu} \right) \cos\gamma_a + \sum_{2}^{n}{}_{a}\, \underset{a}{i}^\nu \frac{d\cos\gamma_a}{ds}$$

et par conséquent

$$(9)' \qquad K_1 \cos\alpha_2 = -k_1 \cos\gamma_2 :$$

En déformant C *d'après* (1), *où*

$$(10)' \qquad (a) \quad V^\nu = vI^\nu, \qquad (b) \quad I^\nu = -\frac{\underset{0}{k}\cos\beta}{k_1} \underset{2}{i^\nu} + \sum_{3}^{n}{}_{b} \cos\gamma_b \underset{b}{i^\nu}$$

et v, γ_3, ..., γ_n *sont arbitraires, les deux courbes possèdent le même arc* (à une constante additive près).

Si la connexion est sans torsion ($S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0$), l'équation (10' b) se simplifie, car on a $\underset{0}{k} = 0$

$$(10) \qquad (c) \quad I^\nu = \sum_{3}^{n}{}_{b} \cos\gamma_b \underset{b}{i^\nu}$$

et, dans ce cas, il n'est pas nécessaire que C soit une courbe non autoparallèle.

On voit donc que le théorème énoncé est la généralisation du fait bien connu que la déformation de l'arc, suivant la binormale (dans l'espace euclidien à trois dimensions), est nulle ([1]).

La formule (8) est susceptible encore d'autres interprétations géométriques qui se présentent sous une forme assez simple surtout dans le cas d'une variété sans torsion ([2]).

2. *Déformation du verseur tangent.* — En tenant compte de (4) et (8) et en posant

$$\varphi = v\left(\cos\alpha_1 \frac{d\log v}{ds} + K_1 \cos\alpha_2 + \underset{0}{k}\cos\beta\right),$$

on trouve la formule approchée

$$(11) \qquad 'i^\nu - i^\nu = \varepsilon\left(\frac{dV^\nu}{ds} - i^\nu\varphi\right) = \varepsilon\left(DV^\nu - \Gamma^\nu_{\omega\mu}V^\omega i^\mu - i^\nu\varphi\right)$$

qui fait clairement voir que la différence $'i^\nu - i^\nu$ *n'est pas intrinsèque*. Cela se comprend facilement en se rappelant que le verseur $'i^\nu$ est pris au point $'x^\nu \neq x^\nu$, tandis que i^ν a son extrémité dans x^ν et qu'on ne peut pas, en général, dans une variété qui n'est pas plane et sans torsion, comparer intrinsèquement deux champs vectoriels *aux points différents*. Or, pour obtenir une formule intrinsèque, il faut avant ou déplacer i^ν de x^ν en $'x^\nu$, ou bien $'i^\nu$ de $'x^\nu$ en x^ν ([3]). Nous effectuerons le premier déplacement

---

(1) *Cf.*, par exemple, BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I (Berlin, 1923).

(2) *Cf.* SYNGE, *The first and second variations of lenghtintegral in Riemannian space*, p. 247-264 (*Proc. London Math. Soc.*, série 2, vol. 25, p. 4).

(3) C'est au fond le même procédé qui donne naissance à la notion de la différentielle *intrinsèque* d'un vecteur $p^\nu(x)$. En le déplaçant du point $P(x)$ au point voisin $P'(x + dx)$ *suivant les lois de la connexion* on obtient dans P'

$$\pi^\nu = p^\nu - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\, dx^\mu p^\lambda,$$

tandis qu'en tenant compte de son *caractère fonctionnel* on obtient dans

$$\omega^\nu = p^\nu + dp^\nu.$$

Or, la différence $\pi^\nu - p^\nu$ resp. $\omega^\nu - p^\nu$ ne peut pas être intrinsèque, les points P et P' étant différents, mais la différence

$$\omega^\nu - \pi^\nu = dp^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\, p^\lambda\, dx^\mu$$

l'est bien, les champs ω^ν et π^ν étant considérés au même point P'.

en désignant par $^*i^\nu$ le champ i^ν déplacé de x^ν en $'x^\nu$. Bien que la différence $^*i^\nu - i^\nu$ ne peut pas résulter comme intrinsèque (les champs en question étant aussi aux points différents) nous démontrerons le caractère intrinsèque de $'i^\nu - {}^*i^\nu$.

En déplaçant i^ν de x^ν en $'x^\nu$ on obtient

$$^*i^\nu = i^\nu + ('x^\omega - x^\omega)\frac{\partial}{\partial x^\omega} i^\nu = i^\nu + \varepsilon V^\omega \frac{\partial}{\partial x^\omega} i^\nu,$$

ou, si l'on désigne par Θ le symbole de la dérivation intrinsèque le long de V^ν,

$$(12) \qquad ^*i^\nu - i^\nu = \varepsilon\left(\Theta i^\nu - \Gamma^\nu_{\mu\omega} V^\omega i^\mu\right).$$

La soustraction des équations (11) et (12) nous donne

$$(12)' \qquad \boxed{'i^\nu - {}^*i^\nu = \varepsilon\left\{ DV^\nu - \Theta i^\nu - 2 S_{\mu\omega}{}^{\nu} V^\omega i^\mu - i^\nu \varphi \right\}}$$

d'où l'on voit qu'en effet la différence $'i^\nu - {}^*i^\nu$ est intrinsèque.

C. Q. F. D.

De même si l'on veut calculer le vecteur de courbure $'k^\nu = 'k_1 'i^\nu_2$ de $'C$, on doit employer le même procédé pour parvenir à une notion intrinsèque. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe suivant.

3. *Déformation du vecteur de courbure.* — En déplaçant le vecteur k^ν de x^ν en $'x^\nu$ il devient

$$(13) \qquad \begin{aligned} ^*k^\nu &= k^\nu + \varepsilon('x^\omega - x^\omega)\frac{\partial}{\partial x^\omega} k^\nu \\ &= k^\nu + \varepsilon\left(\Theta k^\nu + 2 S_{\omega\mu}{}^{\nu} k^\mu V^\omega - \Gamma^\nu_{\omega\mu} k^\mu V^\omega\right). \end{aligned}$$

D'autre part, le vecteur de courbure $'k^\nu$ est défini comme suit :

$$(14) \qquad 'k^\nu = \frac{d'i^\nu}{d's} + '\Gamma^\nu_{\lambda\mu} 'i^\lambda 'i^\mu,$$

où

$$'\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \varepsilon V^\omega \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma^\nu_{\lambda\mu}.$$

On déduit donc de (13) et (14)

$$'k^\nu - {}^*k^\nu = \frac{d'i^\nu}{d's} + '\Gamma^\nu_{\lambda\mu} 'i^\lambda 'i^\mu - k^\nu - \varepsilon\left\{ + \Theta k^\nu + 2 S_{\omega\mu}{}^{\nu} k^\mu V^\omega - \Gamma^\nu_{\omega\mu} k^\mu V^\omega \right\}$$

En y substituant les formules approchées

$$\frac{d'i^\nu}{d's} = \frac{d'i^\nu}{ds}\frac{ds}{d's} = (1-\varepsilon\varphi)\left[\frac{di^\nu}{ds} + \varepsilon\left(\frac{d^2V^\nu}{ds^2} - \frac{di^\nu}{ds}\varphi - i^\nu\frac{d\varphi}{ds}\right)\right]$$

$$= \frac{di^\nu}{ds} + \varepsilon\left(\frac{d^2V^\nu}{ds^2} - 2\frac{di^\nu}{ds}\varphi - i^\nu\frac{d\varphi}{ds}\right),$$

$$'\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,'i^\lambda\,'i^\mu = \left(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \varepsilon V^\omega\frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\right)\left[i^\lambda + \varepsilon\left(\frac{dV^\lambda}{ds} - i^\lambda\varphi\right)\right]\left[i^\mu + \varepsilon\left(\frac{dV^\mu}{ds} - i^\mu\varphi\right)\right]$$

$$= \Gamma^\nu_{\mu\lambda}i^\lambda i^\mu + \varepsilon\left[\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\left(\frac{dV^\lambda}{ds}i^\mu + \frac{dV^\mu}{ds}i^\lambda\right)\right.$$

$$\left. - 2\varphi\Gamma^\nu_{\mu\lambda}i^\lambda i^\mu + \left(\frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\right)i^\lambda i^\mu V^\omega\right].$$

on obtient

$$(15)\quad 'k^\nu - {}^*k^\nu = \varepsilon\left\{\frac{d^2V^\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\left(\frac{dV^\lambda}{ds}i^\mu + \frac{dV^\mu}{ds}i^\lambda\right) + V^\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\right)i^\lambda i^\mu\right.$$

$$\left. - 2\varphi k^\nu - i^\nu\frac{d\varphi}{ds} - \theta k^\nu - 2S_{\omega\mu}{}^{\nu}k^\mu V^\omega \quad \Gamma^\nu_{\omega\mu}k^\mu V^\omega\right\}.$$

Pour faire voir que le second membre *est un vecteur* il faut avoir recours à la notion de l'affineur de courbure

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\nu_{\lambda\omega} - \frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\varkappa\omega}\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\nu_{\varkappa\mu}\Gamma^\varkappa_{\lambda\omega}$$

et de l'affineur dérivé de $S_{\omega\lambda}{}^{\nu}$

$$DS_{\omega\lambda}{}^{\nu} = \frac{dx^\mu}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}S_{\omega\lambda}{}^{\nu} - \Gamma^\alpha_{\omega\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}S_{\omega\alpha}{}^{\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}S_{\omega\lambda}{}^{\alpha}\right).$$

En les employant, on trouve que l'équation

$$D^2V^\nu = \frac{d}{ds}DV^\nu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}DV^\mu i^\lambda$$

peut être écrite aussi

$$(16)\quad D^2V^\nu = \frac{d^2V^\nu}{ds^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\right)V^\omega i^\lambda i^\mu$$

$$+ \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\left(i^\lambda\frac{dV^\mu}{ds} + i^\mu\frac{dV^\lambda}{ds}\right) + \Gamma^\nu_{\omega\lambda}V^\omega k^\lambda$$

$$+ 2S_{\mu\lambda}{}^{\nu}i^\lambda DV^\mu + V^\omega i^\mu i^\lambda R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} + 2V^\omega i^\lambda DS_{\omega\lambda}{}^{\nu}.$$

Or l'équation (15) comparée à (16) nous permet de poser

$$(17)\quad \boxed{'k^\nu - {}^*k^\nu = \varepsilon\left\{D^2V^\nu - i^\lambda i^\mu V^\omega R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - 2D\left(S_{\omega\lambda}{}^{\nu}i^\lambda V^\omega\right) - D\varphi\, i^\nu - \varphi k^\nu - \theta k^\nu\right.}$$

et cette équation fait clairement voir le caractère intrinsèque de (15).

Si la courbe C est autoparallèle, on a $k^\nu = {}^*k^\nu = 0$ et l'on peut déduire de (17) :

Pour que la courbe 'C résulte aussi autoparallèle il est nécessaire et suffisant que le vecteur V^ν soit l'intégrale de

$$D^2 V^\nu - i^\lambda i^\mu V^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} - 2(D S_{\omega\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu} V^\omega) i^\lambda - i'^\nu \frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Si la connexion est sans torsion et si les courbes C et 'C possèdent le même arc, cette équation se simplifie et devient celle de M. Levi-Civita.

$$D^2 V^\nu - V^\omega i^\lambda i^\mu R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = 0.$$