BULLETIN DE LA S. M. F.

J. CHAZY

Sur le problème rectiligne des trois corps

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 222-268

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__222_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE PROBLÈME RECTILIGNE DES TROIS CORPS;

PAR M. JEAN CHAZY.

Même dans un intervalle de temps où ne se produit aucun choc, l'étude du mouvement rectiligne dans le problème des trois corps ne semble pas offrir d'intérêt pratique direct. On ne peut guère espérer que quelque jour ce mouvement serve d'approximation au mouvement d'astres nouveaux, comme il est arrivé pour le mouvement étudié par Lagrange et où les trois corps forment un triangle équilatéral.

Cependant le mouvement rectiligne constitue une solution particulière des équations différentielles du problème général des trois corps, et les circonstances du mouvement général doivent se retrouver dans ce cas particulier plus ou moins dégénérées : telle est l'idée qui déjà a guidé Euler et Clairaut quand ils cherchaient une intégrale du mouvement rectiligne des trois corps autre que l'intégrale des forces vives. Il est légitime de penser que la considération du mouvement rectiligne peut fournir encore des suggestions utiles dans l'étude des questions que pose le problème général des trois corps, et notamment dans la recherche des solutions périodiques, dans l'étude de la stabilité, et plus généralement, selon le mot de Poincaré, dans l'étude *qualitative* des mouvements.

C'est ainsi que dans le problème des deux corps le mouvement rectiligne comporte, aux points de vue périodicité et stabilité, exactement les mêmes types que le mouvement curviligne; et la condition de périodicité et de stabilité a même expression, en fonction de la distance et des vitesses initiales, dans le mouvement rectiligne et dans le mouvement curviligne.

Je me propose dans ce premier Mémoire, après avoir réduit (1) le

(1) Cette réduction du problème rectiligne des trois corps à une équation différentielle du premier ordre et deux quadratures quand la constante des forces

problème rectiligne des trois corps à une équation différentielle du premier ordre ou à un système différentiel du second ordre, d'effectuer l'étude des caractéristiques de cette équation ou de ce système au voisinage de leurs points singuliers. J'applique les résultats classiques de Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles, relatifs aux nœuds et aux cols d'une équation différentielle du premier ordre, et aux nœuds, aux cols, aux lignes de nœuds et lignes de cols d'un système différentiel du second ordre, et j'applique aussi certains résultats complémentaires que j'ai démontrés antérieurement (¹), et selon lesquels le système différentiel du second ordre ne possède pas d'autres caractéristiques aboutissant à un nœud, à un col ou voisines d'une ligne de nœuds ou de cols que les caractéristiques obtenues par Poincaré. Je retrouve ainsi dans le cas particulier du problème rectiligne les développements que j'ai donnés (²) pour représenter certains mouvements du problème général des trois corps.

Mais mon but n'est pas une sorte de généralisation à rebours. Une fois effectuée cette étude *locale* des caractérisques de l'équation du premier ordre ou du système du second ordre au voisinage de leurs points singuliers, je me propose dans un second Mémoire d'étudier ces caractéristiques dans tout le plan ou dans tout l'espace, et de chercher à obtenir ainsi l'allure de tous les mouvements du problème rectiligne des trois corps. C'est au contraire cette seconde étude dont la généralisation fournira des suggestions dans l'étude qualificative des mouvements généraux du problème des trois corps.

Notations et équations différentielles. — Nous employons les notations suivantes. Le centre de gravité des trois corps est fixe; si les trois masses ont les valeurs, supposées positives, m_1, m_2, m_3,

---

vives est nulle, et à un système différentiel du second ordre et une quadrature quand la constante des forces vives est différente de zéro, était connue déjà d'Euler.

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 40, 1921, p. 270-280. Le premier de ces résultats complémentaires, selon lequel à un col d'une équation du premier ordre n'aboutit pas d'autre caractéristique que les deux caractéristiques holomorphes, a été démontré depuis longtemps par M. Picard (*Traité d'Analyse*, t. III, 2e édition, p. 209 et 28).

(²) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 39, 1922, p. 29-130.

les trois corps sont placés sur la droite fixe où a lieu le mouvement dans l'ordre m_1, m_3, m_2, et cette droite est dirigée dans le même sens qui va de la masse m_1 à la masse m_2.

Nous désignons par z l'abscisse, positive, ou en particulier nulle dans un choc des trois corps, de la masse m_2 par rapport à la masse m_1, et par u l'abscisse, positive, négative ou nulle, de la masse intermédiaire m_3 par rapport au centre de gravité des deux autres ; par suite, dans l'ordre indiqué, les distances des masses $m_1 m_2$, $m_1 m_3$, $m_3 m_2$ sont respectivement les trois quantités positives ou nulles

$$z, \quad a_1 z + u, \quad a_2 z - u$$

si l'on pose

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = a_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2} = a_2,$$

les nombres a_1 et a_2 étant positifs et ayant pour somme l'unité. Le quotient $\frac{u}{z}$ est égal à $-a_1$ dans un choc des masses m_1 et m_3 et à a_2 dans un choc des masses m_3 et m_2 : sinon le quotient $\frac{u}{z}$ est compris entre les deux valeurs $-a_1$ et a_2.

Nous supposerons, comme l'a fait M. Sundman, le mouvement prolongé analytiquement (¹) et continué au delà de tout choc de deux corps. Un tel choc, qu'il ait lieu entre les masses m_1 et m_3 ou entre les masses m_3 et m_2, ne change pas l'ordre des trois masses : la quantité $a_1 z + u$ ou $a_2 z - u$, nulle à l'instant du choc, est positive au voisinage, après comme avant cet instant.

Les équations différentielles du mouvement sont les deux équations du second ordre

$$(1) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{m_1 + m_2}{z^2} - \frac{m_3}{(a_1 z + u)^2} - \frac{m_3}{(a_2 z - u)^2},$$

$$(2) \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2}\left[\frac{-m_1}{(a_1 z + u)^2} + \frac{m_2}{(a_2 z - u)^2}\right],$$

dont une intégrale première est donnée par l'équation des forces

(¹) Si l'on écartait ce prolongement, on étudierait le mouvement seulement pendant l'intervalle de temps fini qui s'écoule entre deux chocs, ou quand le temps croît indéfiniment dans les mouvements que j'ai appelés *hyperboliques*, *hyperboliques-paraboliques* ($h > 0$), ou *paraboliques* ($h = 0$).

vives

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{m_1 m_2}{z}+\frac{m_1 m_3}{a_1 z+u}+\frac{m_2 m_3}{a_2 z-u}+h,$$

h désignant la *constante des forces vives*.

Comme les deux équations (1) et (2) et l'équation des forces vives ne contiennent pas explicitement le temps t, mais seulement la différentielle dt, le système considéré se ramène à un système du second ordre et à une quadrature. Si l'on introduit les deux nouvelles variables

$$\frac{u}{z}=x, \qquad \frac{du}{dz}=y,$$

et si l'on pose

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{m_1 m_2(m_1+m_2+m_3)}{(m_1+m_2)^2 m_3}, & \beta=\dfrac{(m_1+m_2)m_3}{2(m_1+m_2+m_3)}, \\ f(x)=m_1 m_2+\dfrac{m_1 m_3}{a_1+x}+\dfrac{m_2 m_3}{a_2-x}, & f'(x)=-\dfrac{m_1 m_3}{(a_1+x)^2}+\dfrac{m_2 m_3}{(a_2-x)^2}, \\ \varphi(x)=2\beta\left[m_1+m_2+\dfrac{m_3}{(a_1+x)^2}+\dfrac{m_3}{(a_2-x)^2}\right], \end{cases}$$

d'où l'identité

$$(5)\qquad \alpha\varphi(x)=f(x)+xf'(x),$$

les équations considérées se ramènent au système du second ordre

$$(6)\qquad \frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{\dfrac{(y^2+\alpha)[y\varphi(x)+f'(x)]}{2[f(x)+hz]}}=\frac{dz}{z}$$

et à l'équation

$$(7)\qquad \left(\frac{dt}{dz}\right)^2=\frac{\beta(y^2+\alpha)}{\dfrac{f(x)}{z}+h}.$$

CHAPITRE I.

CONSTANTE DES FORCES VIVES NULLE.

Nous traiterons d'abord le cas où la constante des forces vives h est nulle, et qui se ramène à l'intégration d'une équation différen-

tielle du premier ordre et à deux quadratures. Effectivement, si h est nul, le deuxième des rapports (6) ne contient plus la variable z, et en égalant ce rapport au précédent, on obtient l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+\alpha)[y\varphi(x)+f'(x)]}{2f(x)(y-x)}. \tag{8}$$

Nous représenterons les mouvements satisfaisant aux équations différentielles (1), (2) et (3), et où la constante des forces vives h a la valeur zéro, par la courbe (1) décrite dans un plan par le point de coordonnées cartésiennes rectangulaires x et y, courbe qui est une caractéristique de l'équation (8).

Réciproquement à une caractéristique de l'équation (8) correspondent en général une infinité de mouvements, dans lesquels l'équation

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{y-x} \tag{9}$$

et l'équation

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\beta(y^2+\alpha)z}{f(x)} \tag{10}$$

déterminent la distance z et le temps t par deux quadratures successives.

Nous négligerons, de manière à simplifier nos formules, les deux constantes arbitraires introduites par ces deux quadratures, et l'ambiguïté dans le sens du mouvement introduite par l'équation (10) : ce qui revient à changer l'unité de longueur (2), l'origine du temps, et éventuellement le sens dans lequel est compté le temps. Au contraire la constante arbitraire introduite par l'intégration de l'équation (8) est une constante essentielle, dont la variation change l'allure du mouvement.

Puisque le quotient $\frac{u}{z} = x$ est compris entre les deux constantes $-a_1$ et a_2, il suffit de considérer dans le plan xOy la bande

---

(1) Au mouvement d'Euler correspond, non pas une courbe, mais le point $x = a$, $y = a$. a étant racine de l'équation (cf. *infra*, p. 232)

$$x\varphi(x) + f'(x) = 0.$$

(2) Et en même temps l'unité de temps ou celle de masse, pour conserver dans les équations (1) et (2) la valeur 1 à la constante de l'attraction universelle.

limitée par les deux droites $x = -a_1$, $x = a_2$. Cherchons dans cette bande les points singuliers des caractéristiques de l'équation (8).

Les nœuds N_1 et N_2 : chocs de deux corps. — La forme de l'équation (8) et celle des expressions (4) montrent immédiatement que les deux droites $x = -a_1$, $x = a_2$ sont deux caractéristiques particulières, auxquelles les équations (9) et (10) ne font d'ailleurs correspondre aucun mouvement. En outre, x étant égal à $-a_1$ et y fini, le second membre de l'équation (7) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ dans le seul cas où y est égal à

$$\frac{m_1}{2\beta} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\, m_1}{(m_1 + m_2)\, m_3} = \frac{\alpha}{a_1};$$

désignons la quantité obtenue, qui est positive, par b_1. Ainsi sur la droite $x = -a_1$, au moins à distance finie, le seul point singulier possible est le point $x = -a_1$, $y = b_1$.

Au voisinage de ce point, l'équation (8) peut se mettre sous la forme (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - b_1 + S_2(x + a_1, y - b_1)}{2(x + a_1)}, \tag{11}$$

S_2 désignant un développement en série entière convergent pour des valeurs assez petites des deux arguments $x + a_1$, $y - b_1$, et qui commence par des termes de degré 2.

Donc le point $-a_1$, b_1 est un *nœud* : nous désignerons ce nœud par N_1. Au voisinage de N_1, les caractéristiques de l'équation (8) autres que la droite $x = -a_1$ sont représentées par une équation de la forme (2)

$$[y - b_1 + S_2(x + a_1, y - b_1)]^2 = C(x + a_1); \tag{12}$$

---

(1) Nous désignerons dans ce Mémoire par $S(x)$, $S(x, y)$, $S(x, y, z)$, ... des séries entières en x, ou en x et y, ... représentant des fonctions holomorphes et *différentes de zéro* pour $x = 0$, ou pour $x = y = 0$, ...

Au contraire, nous désignerons par $S_n(x)$, $S_n(x, y)$, ... des séries entières en x, ou en x et y, ... représentant des fonctions holomorphes pour $x = 0$, ou pour $x = y = 0$, ..., et qui commencent par des termes *de degré n au moins*.

(2) Puisque les racines de l'équation caractéristique relative à l'équation (11) et au point singulier N_1 sont doubles l'une de l'autre, cette équation semble

C désigne une constante arbitraire, positive sur les caractéristiques situées dans la bande considérée, et S_2 un développement en série entière dont les coefficients sont déterminés, qui commence par des termes de degré 2, et qui bien entendu, malgré l'identité de notations, n'est pas identique au développement S_2 figurant dans l'équation (11). Au point N_1, toutes les caractéristiques sont donc tangentes à la droite $x = -a_1$, sauf celle qui correspond à la valeur $C = 0$.

Suivons l'une des caractéristiques précédentes dans le sens où cette caractéristique s'approche du nœud N_1 et étudions le mouvement correspondant : on voit de suite, d'après l'équation (9), que la variable z tend vers une limite finie et différente de zéro, et que le temps t, d'après l'équation (10), tend vers une limite finie : il résulte que la quantité $a_1 z + u = z(a_1 + x)$ tend vers zéro. Donc *au nœud* N_1 *correspond un choc des masses* m_1 *et* m_2.

Cherchons la loi du mouvement au voisinage de ce choc, et supposons d'abord différente de zéro la constante C correspondant à la caractéristique considérée. De l'équation (12) on déduit pour la fonction $y(x)$ un développement de la forme

$$y - b_1 = \sqrt{x + a_1}\, S(\sqrt{x + a_1});$$

l'équation (9) donne

$$\frac{dz}{z} = S(\sqrt{x + a_1})\, dx \qquad \text{et} \qquad z = 1 + (x + a_1)\, S(\sqrt{x + a_1}),$$

---

rentrer dans un cas d'exception du théorème d'existence des développements de la forme (12) (*cf.* PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, 2e édition, p. 16; *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 3, fasc. 1, p. 50, article de P. PAINLEVÉ) : dans ce cas, des logarithmes s'introduisent en général dans le développement de la fonction $y(x)$. Mais, en se reportant à la démonstration du théorème d'existence général (*cf.* PICARD, *loc. cit.*, p. 9-10) on n'est pas arrêté dans le calcul des coefficients du développement; la condition d'exception est remplie d'elle-même. D'ailleurs l'équation (11) est de la forme considérée par Briot et Bouquet, et, en y faisant le changement de variable $x + a_1 = X^2$, on obtient une infinité d'intégrales $y(X)$ holomorphes pour $X = 0$ et dépendant d'une constante arbitraire (*cf.* GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, 2e édition, p. 503-504).

La même remarque est valable plus loin (*cf.* p. 241) pour $h \neq 0$, dans la représentation des caractéristiques dans l'espace au voisinage de chaque point de la ligne de nœuds $x = -a_1$, $y = b_1$, $z \gtrless 0$.

et l'équation (10)

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = (x+a_1)\,S(\sqrt{x+a_1}) \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = (x+a_1)\,S(\sqrt{x+a_1});$$

d'où

$$t = (x+a_1)^{\frac{3}{2}}\,S(\sqrt{x+a_1}),$$

le terme constant de la dernière fonction S ayant le signe avec lequel le temps t tend vers sa limite zéro. On tire par inversion

$$\sqrt{x+a_1} = t^{\frac{1}{3}}\,S\left(t^{\frac{1}{3}}\right);$$

d'où enfin

$$z = 1 + t^{\frac{2}{3}}\,S\left(t^{\frac{1}{3}}\right)$$

et

$$a_1 z + u = z(a_1 + x) = t^{\frac{2}{3}}\,S\left(t^{\frac{1}{3}}\right).$$

Ce sont pour les distances z et $a_1 z + u$ les développements au voisinage de l'instant d'un choc de deux corps bien connus depuis les travaux de M. Sundman. Si au moyen des séries entières en $t^{\frac{1}{3}}$ obtenues, on prolonge analytiquement le mouvement considéré quand le temps dépassant l'instant $t = 0$ change de signe, le système des développements précédents est encore valable dans le nouveau mouvement : le radical $\sqrt{x+a_1}$ change de signe comme t, et la constante C a la même valeur après qu'avant le choc. En particulier, dans le prolongement considéré, *l'arc de caractéristique* aboutissant au nœud N_1 tangentiellement à la droite $x = -a_1$ se trouve *prolongé par l'arc ayant au point* N_1 *même courbure* (*fig.* 1).

Suivons de même la caractéristique correspondant à la valeur $C = 0$ de la constante de l'équation (12) en nous approchant du nœud N_1. Cette équation donne dans ce cas le développement

$$y - b_1 = (x+a_1)^2\,S(x+a_1),$$

et la caractéristique considérée aboutit au nœud N_1 normalement à la droite $x = -a_1$, c'est-à-dire à toutes les autres caractéristiques. L'équation (9) donne

$$\frac{dz}{z} = S(x+a_1)\,dx \qquad \text{et} \qquad z = S(x+a_1),$$

puis l'équation (10)

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = (x + a_1)\,S(x + a_1) \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = (x + a_1)\,S(x + a_1),$$

d'où

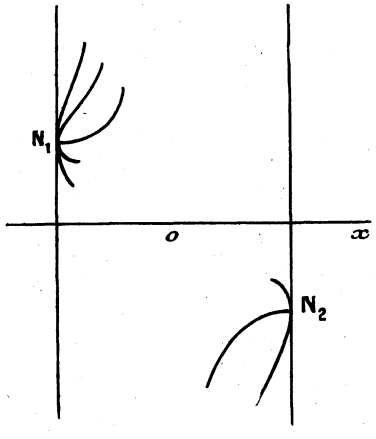
$$t = (x + a_1)^{\frac{3}{2}}\,S(x + a_1) \qquad \text{et} \qquad (x + a_1) = t^{\frac{2}{3}}\,S\left(t^{\frac{2}{3}}\right).$$

et enfin

$$z = S\left(t^{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad a_1 z - u_1 = z(a_1 + x) = t^{\frac{2}{3}}\,S\left(t^{\frac{2}{3}}\right).$$

Donc le choc des deux masses m_1 et m_3, correspondant à la caractéristique sur laquelle la constante C est nulle, offre la particularité suivante : à deux instants équidistants de part et d'autre de l'instant de ce choc, les abscisses z et u, et par suite les dis-

Fig. 1.



tances mutuelles des trois corps, ont les mêmes valeurs. D'une façon générale, la masse m_2 a pour abscisse par rapport au centre de gravité des masses m_1 et m_3 la quantité positive ou nulle $\frac{m_3}{m_1 + m_3}(b_1 z - u)$, et pour vitesse relative $\frac{m_3}{m_1 + m_3}(b_1 - y)\frac{dz}{dt}$: cette vitesse est ici de la forme $(x + a_1)^{\frac{3}{2}}\,S(x + a_1) = t\,S\left(t^{\frac{2}{3}}\right)$; donc elle est nulle à l'instant du choc. De tels chocs de deux corps peuvent être appelés *chocs symétriques* (1).

(1) Dans le problème général de trois corps, les chocs symétriques de deux

En particulier, dans le prolongement analytique du mouvement au delà d'un choc symétrique de deux corps, le point x, y de la caractéristique, qui arrive au nœud N_1, normalement à la droite $x = -a_1$, rebrousse chemin en N_1, et suit au retour le même arc de courbe en sens inverse (*fig.* 1).

Remarquons enfin que dans les deux sortes de chocs des deux masses m_1 et m_3, il y a minimum de la distance z : puisque, si l'on suit une caractéristique passant au nœud N_1, à partir de ce nœud, dans l'équation (9) les trois termes z, dx et $y - x$ sont positifs.

On voit de même que la droite $x = a_2$ est une caractéristique particulière de l'équation du premier ordre (8), et que sur cette droite le point N_2, d'ordonnée

$$-\frac{m_2}{2\beta} = -\frac{(m_1 + m_2 + m_3)\,m_2}{(m_1 + m_2)\,m_3} = -\frac{\alpha}{a_2} = -b_2 \qquad (b_2 > 0),$$

est un *nœud* : les caractéristiques aboutissant à ce nœud sont représentées au voisinage par une équation de la forme

$$[y + b_2 + S_2(x - a_2, y + b_2)]^3 = C(x - a_2).$$

C désignant une constante arbitraire, et sur ces caractéristiques, le nœud N_2 correspond à un choc des deux masses m_3 et m_2.

Le col C : chocs des trois corps et mouvements paraboliques. — D'autres points singuliers de l'équation (8) sont les points d'intersection de la droite $y = x$ et de la courbe

$$y\,\varphi(x) + f'(x) = 0,$$

dont nous désignerons par Γ l'arc limité par les deux droites $x = -a_1$, $x = a_2$. Cette courbe est d'ailleurs le lieu des points de contact des tangentes aux caractéristiques parallèles à Ox, de même que la droite $y = x$ est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à Oy. Pour tracer l'arc de courbe Γ, on peut en prendre

---

corps sont caractérisés de même par cette condition que, à l'instant du choc, le troisième corps ait par rapport au centre de gravité des deux premiers une vitesse nulle : dans le système différentiel régulier à l'instant du choc $t = 0$, formé par M. Sundman, ni les équations ni les conditions initiales ne changent si la variable indépendante et par suite le temps t changent de signe.

l'équation sous la forme

$$y = -\frac{f'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\dfrac{m_1}{(a_1+x)^2} - \dfrac{m_2}{(a_2-x)^2}}{2\beta\left[\dfrac{m_1+m_2}{m_3} + \dfrac{1}{(a_1+x)^2} + \dfrac{1}{(a_2-x)^2}\right]},$$

et dans la dérivée

$$= \frac{\left[\dfrac{m_1+m_2}{m_3} + \dfrac{1}{(a_1+x)^2} + \dfrac{1}{(a_2-x)^2}\right]\left[-\dfrac{m_1}{(a_1+x)^3} - \dfrac{m_2}{(a_2-x)^3}\right] + \left[\dfrac{m_1}{(a_1+x)^2} - \dfrac{m_2}{(a_2-x)^2}\right]\left[\dfrac{1}{(a_1+x)^3} - \dfrac{1}{(a_2-x)^3}\right]}{\beta\left[\dfrac{m_1+m_2}{m_3} + \dfrac{1}{(a_1+x)^2} + \dfrac{1}{(a_2-x)^2}\right]^2},$$

écrire le numérateur sous la forme

$$-\frac{m_1+m_2}{m_3}\left[\frac{m_1}{(a_1+x)^3} + \frac{m_2}{(a_2-x)^3}\right]$$
$$-(m_1+m_2)\left[\frac{1}{(a_1+x)^3(a_2-x)^2} + \frac{1}{(a_1+x)^2(a_2-x)^3}\right].$$

Il résulte que, dans l'intervalle $-a_1 < x < a_2$ la dérivée y' est négative et que la fonction $y = -\dfrac{f'}{\varphi}$ est décroissante. D'ailleurs, d'après la manière même dont les ordonnées b_1 et $-b_2$ ont été obtenues, l'arc de courbe Γ a pour extrémités les deux points N_1 et N_2, qui sont de part et d'autre de la droite $y = x$. Donc, dans l'intervalle considéré, cette courbe et cette droite ont un point d'intersection et un seul, ou encore l'équation du cinquième degré

$$x\varphi(x) + f'(x) = 0$$

a une racine unique et simple, que nous désignerons par a : la racine a est positive, négative ou nulle comme la différence $m_1 - m_2$.

Au voisinage du point $x = a$, $y = a$, l'équation (8) peut se mettre sous la forme

$$(13)\qquad \frac{dx}{-(x-a)+y-a} = \frac{dy}{\dfrac{a^2+\alpha}{2f(a)}\left\{[a\varphi'(a)+f''(a)](x-a)+\varphi(a)(y-a)\right\} + S_2(x-a, y-a)}.$$

La nature du point singulier $x = a$, $y = a$ dépend des racines

de l'équation du second degré en λ

$$(14)\quad (\lambda+1)\left[\lambda-\frac{a^2+\alpha}{2f(a)}\varphi(a)\right]-\frac{a^2+\alpha}{2f(a)}[a\varphi'(a)+f''(a)]=0,$$

ou

$$\lambda^2+\left[1-\frac{a^2+\alpha}{2f(a)}\varphi(a)\right]\lambda-\frac{a^2+\alpha}{2f(a)}[\varphi(a)+a\varphi'(a)+f''(a)]=0.$$

Or, puisque dans l'intervalle $-a_1<x<a_2$ la fonction $x\varphi(x)+f'(x)$ a la seule racine simple $x=a$ et d'ailleurs a le signe moins pour $x<a$ et le signe plus pour $x>a$, cette fonction est croissante pour $x=a$, et, pour cette valeur, la dérivée $\varphi(a)+a\varphi'(a)+f''(a)$ est positive. Le facteur $\frac{a^2+\alpha}{2f(a)}$ étant d'ailleurs positif dans l'intervalle considéré, les deux racines de l'équation caractéristique (14) sont réelles et de signes contraires : désignons ces racines par λ et λ_1 : $\lambda_1<0<\lambda$.

Donc le point $x=a$, $y=a$ est un *col* : nous désignerons ce col par C. Il n'y passe (1) que deux caractéristiques de l'équation (8). En égalant, selon le système différentiel (6), à $\frac{dz}{z}$ les deux rapports égaux (13), on est conduit à représenter l'une de ces caractéristiques au voisinage du col C par deux équations de la forme

$$(15)\qquad x-a=Cz^{\lambda}S(Cz^{\lambda}),\qquad y-a=Cz^{\lambda}S(Cz^{\lambda}),$$

où C désigne une constante arbitraire et où la variable z est positive et assez petite. La quantité z^{λ} étant essentiellement positive, pour obtenir les deux arcs de cette première caractéristique situés de part et d'autre du col C, il faut donner successivement à la constante C une valeur positive, puis une valeur négative. Les deux arcs satisfont à l'équation obtenue par élimination de la quantité Cz^{λ} entre les deux équations (15), et qui est l'équation

---

(1) A la solution particulière $x=a$, $y=a$ de l'équation différentielle (8) correspond un mouvement où les rapports des distances des trois masses m_1, m_2, m_3 sont constants et où le temps est donné par une équation de la forme

$$\frac{1}{z}\left(\frac{dt}{dz}\right)^2=\text{const.},\qquad \text{d'où}\qquad \frac{z^3}{(t-t_0)^2}=\text{const.}:$$

c'est un cas particulier du mouvement obtenu pour la première fois par Euler. L'équation du cinquième degré $x\varphi(x)+f'(x)=0$ est équivalente à une équation célèbre formée par Euler.

de la caractéristique considérée au voisinage du col

$$F(x-a,\ y-a)=0.$$

De même la seconde caractéristique passant au col C est représentée par les deux équations

$$(16)\qquad x-a=C_1 z^{\lambda_1} S(C_1 z^{\lambda_1}),\qquad y-a=C_1 z^{\lambda_1} S(C_1 z^{\lambda_1}),$$

C_1 désignant une constante arbitraire, positive ou négative, et z une variable positive et assez grande, ou par l'équation

$$F_1(x-a,\ y-a)=0,$$

obtenue par élimination de la quantité $C_1 z^{\lambda_1}$ entre les deux équations (16).

Étudions les mouvements correspondant aux deux caractéristiques passant au col C. Par substitution des deux expressions (15), l'équation (10) devient

$$(17)\qquad \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = z\,S(Cz^{\lambda}),$$

d'où l'on tire

$$t=z^{\frac{3}{2}} S(Cz^{\lambda})\qquad \text{et}\qquad Ct^{\frac{2\lambda}{3}} = Cz^{\lambda} S(Cz^{\lambda}),$$

et par inversion

$$Cz^{\lambda} = Ct^{\frac{2\lambda}{3}} S\left(Ct^{\frac{2\lambda}{3}}\right)$$

La même équation (17) donne encore

$$t^{\frac{2}{3}} = z\,S(Cz^{\lambda}) = z\,S\left(Ct^{\frac{2\lambda}{3}}\right)\qquad \text{et}\qquad z=t^{\frac{2}{3}} S\left(Ct^{\frac{2\lambda}{3}}\right),$$

et par suite (1)

$$u=xz=t^{\frac{2}{3}} S\left(Ct^{\frac{2\lambda}{3}}\right).$$

---

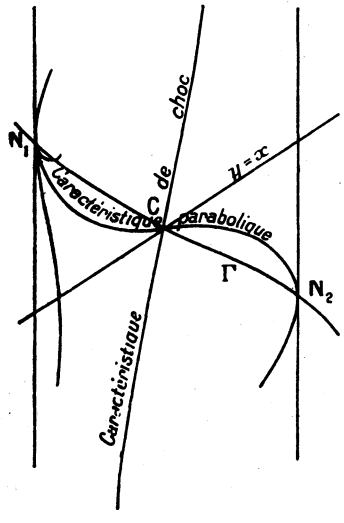
(1) La formule $u=t^{\frac{2}{3}} S\left(Ct^{\frac{2\lambda}{3}}\right)$ n'est plus entièrement conforme à notre convention de la note de la page 227, quand la quantité a s'annule, c'est-à-dire quand les masses extrêmes m_1 et m_2 sont égales : pour se conformer à cette convention l'on peut écrire alors

$$u=Ct^{\frac{2}{3}+\frac{2\lambda}{3}} S\left(Ct^{\frac{2\lambda}{3}}\right).$$

Il résulte que, quand le point x, y s'approche du col C sur la caractéristique $F = o$, dans l'un ou l'autre sens, les deux distances z et u tendent vers zéro, et le temps t croît ou décroît jusqu'à une certaine valeur-limite $t = o$: donc à l'instant $t = o$ se produit un *choc des trois corps*. Et l'on retrouve au voisinage de l'instant de ce choc les développements connus (¹). L'exposant λ étant fonction algébrique des masses, ces développements ne fournissent pas en général de prolongement analytique réel du mouvement au delà de l'instant du choc.

On vérifie facilement que la tangente à la caractéristique $F = o$ au col C a un coefficient angulaire égal à $\lambda + 1$, c'est-à-dire

Fig. 2.



positif (*fig.* 2). Dans la suite, nous prolongerons cette caractéris-

(¹) *Cf.* H. G. Block, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band 5, n° 9, 1908, p. 29; et Chazy, *Bulletin astronomique*, t. 35, 1918, p. 378 : dans la relation $h = \frac{10}{9}\Sigma m_i S a_i \alpha_i$ de la page 348 de ce dernier Mémoire, les coefficients α_i, β_i, γ_i relatifs à l'exposant $p = \frac{2}{3}$ sont proportionnels aux quantités a_i, b_i, c_i comme les coefficients α_i, β_i, γ_i relatifs à l'exposant $p = -1$: il résulte que pour $p = \frac{2}{3}$, ces coefficients sont nuls si h est nul, et que le développement des coordonnées x_i à la page 378 est de la forme $t^{\frac{2}{3}} S(t^p)$, identique à la forme que nous obtenons ici.

tique à partir du col C dans la bande $-a_1 \leqq x \leqq a_2$ autant qu'il sera possible et nous l'appellerons la *caractéristique de choc des trois corps*. La relation analytique

$$F(x-a, y-a) = 0 \qquad \text{ou} \qquad F\left(\frac{u}{z}-a, \frac{du}{dz}-a\right) = 0,$$

prolongée de même s'il y a lieu, est la condition (1) d'un choc des trois corps, placés dans l'ordre m_1, m_3, m_2, et quand la constante des forces vives est nulle.

Si le point x, y s'approche de même du col C sur la seconde caractéristique $F_1 = 0$ passant en ce point, les équations (16) montrent que la distance z tend vers l'infini, puisque l'exposant λ_1 est négatif. En remplaçant d'autre part, dans les calculs qui précèdent λ par λ_1, on voit que le temps t tend aussi vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et que les distances z et u, et par suite les trois distances mutuelles, sont par rapport au temps des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$. Les mouvements correspondants sont ceux que j'ai appelés (2) *mouvements paraboliques*, considérés dans le cas particulier où le mouvement des trois corps est rectiligne. Nous appellerons la caractéristique $F_1 = 0$ *caractéristique parabolique*. Au col C cette caractéristique a une tangente de coefficient angulaire négatif (*fig.* 2), et à partir de ce col, elle va droit aux nœuds N_1 et N_2. L'équation $F_1 = 0$ prolongée analytiquement fournit aussi la condition pour que le mouvement rectiligne des trois corps devienne, quand le temps croît indéfiniment dans le sens convenable, un mouvement parabolique.

La caractéristique de choc des trois corps et la caractéris-

---

(1) La condition est évidemment nécessaire, mais non suffisante : il faut y ajouter une condition d'inégalité, savoir que le mouvement ait lieu ou que le temps varie dans le sens où le point x, y sur la caractéristique de choc aboutit au col C. Dans le problème des deux corps, et quand la constante des forces vives est nulle ou positive, les choses se présentent exactement de même : pour que les deux corps, dont le mouvement général est plan, se choquent, il est nécessaire que la constante des aires soit nulle, et il faut en outre que le mouvement des deux corps, qui se trouve ainsi rectiligne, ait lieu dans le sens de l'un vers l'autre.

La même remarque est valable en ce qui concerne la caractéristique parabolique $F_1 = 0$.

(2) *Bulletin astronomique*, t. 35, 1918, p. 379.

tique parabolique, prolongées indéfiniment dans la bande du plan $-a_1 \leqq x \leqq a_2$, tiennent une grande place dans la discussion qui va suivre.

Branches infinies. — Les caractéristiques de l'équation (8) n'ont dans la bande $-a_1 \leqq x \leqq a_2$ d'autre point singulier à distance finie que les nœuds N_1 et N_2 et le col C. Voyons maintenant l'allure de ces caractéristiques à l'infini dans la direction Oy. Puisqu'elles n'ont à distance finie ni points à tangentes parallèles à Oy en dehors du segment de droite $y = x$, ni points à tangentes parallèles à Ox en dehors de l'arc de courbe Γ, il faut, pour qu'une caractéristique ait une branche infinie, que, quand x tend vers une certaine valeur, soit x_0, y tende vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Or, par le changement de variable $y = \frac{1}{Y}$, on met l'équation (8) sous la forme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2f(x)(1 - xY)}{(1 + \alpha Y^2)[\varphi(x) + f'(x)Y]}; \tag{18}$$

d'après les expressions (4), la constante α, et la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $-a_1 \leqq x \leqq a_2$, sont différentes de zéro.

Soient les valeurs initiales $x = x_0$, $Y = 0$: si x_0 est égal à $-a_1$, en chassant dans le second membre de l'équation (18) le dénominateur $x + a_1$, on obtient pour ce second membre le produit de $x + a_1$ par une expression holomorphe en $x + a_1$ et Y pour $x + a_1 = Y = 0$; donc aux valeurs initiales $x_0 = -a_1$, $Y = 0$ ne correspond pas d'autre caractéristique que la droite $x = -a_1$. De même aux valeurs initiales $x_0 = a_2$, $Y = 0$ ne correspond pas d'autre caractéristique que la droite $x = a_2$.

Si l'on a $-a_1 < x_0 < a_2$, les valeurs initiales $x = x_0$, $Y = 0$ déterminent encore une caractéristique unique : étudions le mouvement correspondant. On tire de l'équation (18) le développement

$$x = x_0 + Y\,S(Y),$$

puis l'équation (9) devient

$$\frac{dz}{z} = \frac{Y\,dx}{1 - xY}$$

et

$$\frac{dz}{z} = Y\,S(Y)\,dY, \tag{19}$$

et donne

$$z = z_0 + Y^2 S(Y),$$

z_0 désignant la valeur de z correspondant aux valeurs $x = x_0$, $Y = 0$. On tire ensuite de l'équation (10)

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{S(Y)}{Y^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dt}{dY}\right)^2 = S(Y),$$

d'où

$$t = Y S(Y) \qquad \text{et} \qquad Y = t S(t),$$

et enfin

$$z = z_0 + t^2 S(t).$$

A la valeur infinie de y correspondent une valeur finie du temps, et un maximum ou un minimum de la distance z. On sait d'ailleurs dès l'équation (1), la dérivée seconde $\frac{d^2 z}{dt^2}$ étant toujours négative, que la distance z ne peut avoir de minimum à un instant où la dérivée première $\frac{dz}{dt}$ est finie (1) : nous obtenons nécessairement ici un maximum de la distance z; et l'on vérifie en effet, d'après les équations (18) et (4), que le terme constant de la série entière $S(Y)$ figurant dans l'équation (19) est négatif. En outre, les développements obtenus effectuent immédiatement le prolongement analytique du mouvement et de la caractèristique représentant ce mouvement quand le temps croît ou décroît au delà de l'instant correspondant à la valeur infinie de y : le signe de y change comme celui de t. La caractéristique ainsi prolongée a passé par l'infini, et y a un point ordinaire, étant pour y positif à gauche et pour y négatif à droite de son asymptote, comme on le voit sur l'équation (8) en considérant le signe de $\frac{dy}{dx}$. Ces branches infinies des caractéristiques constituent dans le mouvement une circonstance mise en relief par les notations choisies, mais non une circonstance essentielle : dans la suite, nous y attacherons moins d'importance qu'aux chocs de deux ou des trois masses.

---

(1) Nous avons vu qu'effectivement aux chocs de la masse m_3 avec les masses m_1 et m_2 correspondent des minima de la distance z.

CHAPITRE II.

CONSTANTE DES FORCES VIVES POSITIVE.

Passons maintenant au cas où la constante des forces vives h est différente de zéro. Nous avons vu que le problème se réduit alors à l'intégration du système différentiel du second ordre (6) suivie de la quadrature définie par l'équation (7). Nous représenterons les mouvements satisfaisant aux équations (1), (2) et (3) par les courbes décrites dans l'espace à trois dimensions par le point de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z, courbes qui sont les caractéristiques du système différentiel (6). Réciproquement à une caractéristique du système (6), l'équation (7) fait correspondre en général une infinité de mouvements que nous ne distinguerons pas, car ils ne diffèrent l'un de l'autre que par l'origine ou le sens du temps. D'ailleurs, quand on multiplie la constante h par un facteur positif, soit λ, le système différentiel (6) et l'équation (7) ne changent pas si l'on multiplie en même temps la distance z par le facteur inverse $\frac{1}{\lambda}$ et le temps t par le facteur $\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}$: il suffit donc de construire les caractéristiques du système (6) pour une valeur positive, puis pour une valeur négative de la constante des forces vives h, pour en déduire l'allure de toutes les caractéristiques et de tous les mouvements correspondant aux valeurs positives ou négatives de h.

Il y a des caractéristiques exceptionnelles. Ainsi les caractéristiques précédemment tracées dans le plan xOy font partie des caractéristiques du système différentiel (6) : si en effet l'on annule la variable z, le troisième des rapports (6) devient $\frac{0}{0}$, et l'équation différentielle qu'on obtient en égalant les deux premiers rapports (6) est la même que si l'on annule la constante h. A ces caractéristiques ne correspond aucun mouvement quand la constante h est différente de zéro; cependant elles nous seront encore utiles, d'une part pour compléter et mieux concevoir l'ensemble des caractéristiques du système (6), d'autre part parce que, le facteur $f(x) + hz$ ne

pouvant être négatif d'après l'équation des forces vives, le signe du quotient $\frac{dy}{dx}$ dans le système différentiel (6) ne dépend que des valeurs des deux variables x et y. Par suite, la courbe Γ et la droite $y = x$ sont les lieux géométriques des points où les tangentes aux projections sur le plan xOy des caractéristiques du système (6) sont parallèles à Ox ou à Oy; en outre, dans chacune des quatre régions de la bande $x = -a_1$, $x = a_2$ du plan xOy limités par la courbe Γ et la droite $y = x$, les pentes de ces projections sont dirigées dans le même sens que les pentes des caractéristiques tracées précédemment, mais ont des valeurs absolues d'autant moindres que z est plus grand si h est positif, et au contraire des valeurs absolues d'autant plus grandes que z est plus grand si h est négatif.

On vérifie facilement qu'en tout point du plan xOy et de la bande $-a_1 \leqq x \leqq a_2$ ne passe d'autre caractéristique que la caractéristique tracée précédemment dans le plan xOy, sauf peut-être aux deux points N_1 et N_2 et au point C, définis comme points d'intersection de la courbe Γ

$$y\varphi(x) + f'(x) = 0$$

avec les droites $x = -a_1$, $x = a_2$ et $y = x$. Et ce résultat s'étend aux systèmes de valeurs initiales

$$-a_1 \leqq x_0 \leqq a_2,\ y_0 = \infty,\ z_0 = 0$$

par la transformation $y = \frac{1}{Y}$.

De même en tout point à distance finie des deux plans $x = -a_1$, $x = a_2$, ne passe qu'une seule caractéristique, qui est la droite parallèle à Oy, à laquelle ne correspond aucun mouvement : sauf aux points des demi-droites $x = -a_1$, $y = b_1$, $z \geqq 0$; et $x = a_2$, $y = -b_2$, $z \geqq 0$, perpendiculaires respectivement au plan xOy aux points N_1 et N_2, et que nous désignerons par D_1 et D_2. Et ce résultat s'étend aux systèmes de valeurs initiales $x_0 = -a_1$ (ou $x_0 = a_2$), $y_0 = \infty$, z_0 positif fini, par la transformation $y = \frac{1}{Y}$.

Les lignes de nœuds D_1 et D_2 : chocs de deux corps. — Étudions les caractéristiques du système différentiel (6) au voisi-

nage des demi-droites D_1 et D_2. Si dans le système (6) on fait $x = -a_1, y = b_1$, le dénominateur du rapport en dy se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; et, pour x et y voisins de $-a_1$ et b_1, ce système peut se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{x+a_1} = \frac{dy}{\frac{y-b_1}{2} + S_2[x+a_1, y-b_1, z(x+a_1)]} = \frac{dz}{\frac{z}{y-x}(x+a_1)}.$$

Donc la demi-droite D_1 est une ligne de points singuliers. En un point quelconque de cette ligne, les deux racines de l'équation caractéristique sont 1 et $\frac{1}{2}$: donc c'est une *ligne de nœuds*.

Toutes les caractéristiques du système différentiel (6) aboutissant au point de cote z_0 de cette ligne sont situées sur une surface mise en évidence par Poincaré et dont l'équation a ici la forme

$$(21) \qquad z = z_0 + \frac{z_0}{a_1+b_1}(x+a_1) + S_2(x+a_1, y-b_1).$$

L'étude sur cette surface des caractéristiques considérées se ramène à l'étude d'une équation différentielle du premier ordre de la forme (11). Par suite, les caractéristiques aboutissant au point de cote z_0 de la demi-droite D_1 sont représentées par le système composé de l'équation (21) et d'une équation de la forme

$$(22) \qquad [y-b_1+S_2(x+a_1, y-b_1)]^2 = C(x+a_1),$$

où C désigne une constante arbitraire positive ou nulle.

Les deux caractéristiques holomorphes sont obtenues pour les valeurs $C = \infty$, $C = 0$ de cette constante; à la première $x = -a_1$, $z = z_0$ ne correspond aucun mouvement.

Si z_0 est nul dans l'équation (21), z est identiquement nul : il n'y a pas d'autre caractéristique du système (6) passant au nœud N_1 que les caractéristiques de l'équation (8) tracées précédemment et auxquelles, nous l'avons dit, ne correspond aucun mouvement. Si z_0 est positif, à tout arc de caractéristique aboutissant au point $-a_1$, b_1, z_0 et représenté par les équations (21) et (22), correspond un mouvement aboutissant à un choc des masses m_1 et m_3.

En effet, si la constante C est positive, on forme successivement

les équations

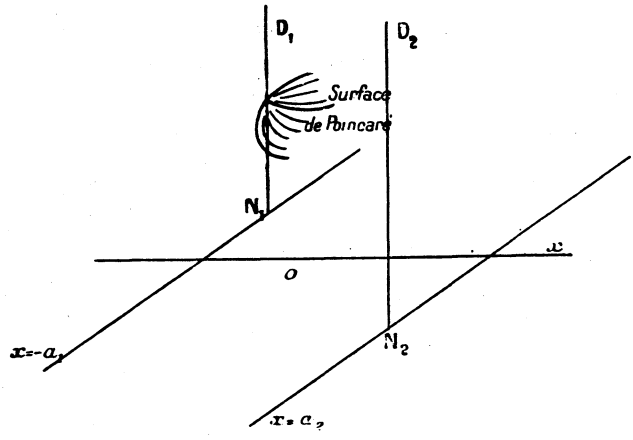
$$y - b_1 = \sqrt{x + a_1}\, S(\sqrt{x + a_1}), \qquad z = z_0 + z_0 (x + a_1) S(\sqrt{x + a_1}),$$
$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = (x + a_1) S(\sqrt{x + a_1}), \qquad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = (x + a_1) S(\sqrt{x + a_1}),$$
$$t = (x + a_1)^{\frac{3}{2}} S(\sqrt{x + a_1}), \qquad \sqrt{x + a_1} = t^{\frac{1}{3}} S\left(t^{\frac{1}{3}}\right),$$
$$z = z_0 + z_0\, t^{\frac{2}{3}} S\left(t^{\frac{1}{3}}\right), \qquad a_1 z + u = z(a_1 + x) = t^{\frac{2}{3}} S\left(t^{\frac{1}{3}}\right).$$

Si la constante C est nulle, on forme de même les équations

$$y - b_1 = (x + a_1)^2 S(x + a_1), \qquad z = z_0 S(x + a_1),$$
$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = (x + a_1) S(x + a_1), \qquad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = (x + a_1) S(x + a_1),$$
$$t = (x + a_1)^{\frac{3}{2}} S(x + a_1), \qquad (x + a_1) = t^{\frac{2}{3}} S\left(t^{\frac{2}{3}}\right),$$
$$z = S\left(t^{\frac{2}{3}}\right), \qquad a_1 z + u = z(a_1 + x) = t^{\frac{2}{3}} S\left(t^{\frac{2}{3}}\right).$$

Dans les deux cas, comme quand la constante h est nulle, les deux masses m_1 et m_3 se choquent à l'instant $t = 0$. Les dévelop-

Fig. 3.



pements obtenus conduisent de même à prolonger analytiquement le mouvement au delà de l'instant du choc, et à prolonger chaque arc de caractéristique (*fig.* 3) aboutissant au point $-a_1$, b_1, z_0 par l'arc issu du même point et dont la projection sur le plau xOy a même courbure : à l'exception de la caractéristique correspondant

à la valeur $C = o$, sur laquelle le point représentatif arrivé au nœud rebrousse chemin, et qui représente ainsi un *choc symétrique*. Enfin, que la constante C soit positive ou nulle, au choc des deux masses m_1 et m_3 correspond un minimum de la distance z des masses extrêmes m_1 et m_2, d'après l'équation $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{y-x}$, où dx et $y - x$ sont positifs sur chaque arc de caractéristique à partir et au voisinage de la ligne de nœuds D_1.

De même, la demi-droite D_2, perpendiculaire au point xOy en N_2, est une *ligne de nœuds* correspondant à des chocs des deux masses m_3 et m_2.

Le col C : chocs des trois corps. — Les trois dénominateurs des rapports (6) s'annulent à la fois si l'on y fait $x = a, y = a$, $z = o$, a désignant la quantité définie précédemment comme racine de l'équation du cinquième degré

$$x\varphi(x) + f'(x) = o.$$

Donc le point C du plan xOy est un point singulier des caractéristiques du système (6). Au voisinage de ce point ce système peut se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{-(x-a)+y-a)} = \frac{dy}{\frac{a^2+a}{2f(a)}\left\{[a\varphi'(a)+f''(a)](x-a)+\varphi(a)(y-a)\right\}+S_2(x-a,y-a,z)} = \frac{dz}{z}.$$

Les trois racines de l'équation du troisième dégré relative à ce point singulier sont les deux racines λ et λ_1 de l'équation (14) ($\lambda_1 < o < \lambda$) et le nombre 1. De ces trois racines, l'une est négative et deux sont positives : le point C est un *col* des caractéristiques du système (6).

Étudions les caractéristiques aboutissant à ce col, et situées, à l'exception d'une caractéristique isolée, sur une surface mise en évidence par Poincaré. Le système (6), si l'on y fait $z = o$, se réduit à l'équation (8); deux caractéristiques du système (6) sont dans le plan $z = o$ les deux caractéristiques holomorphes obtenues pour $h = o$ et passant au point C, la caractéristique de choc

$$z = o, \qquad F(x-a, y-a) = o,$$

et la caractéristique parabolique

$$z = 0, \qquad F_1(x-a, y-a) = 0 :$$

ces deux caractéristiques pour $h \neq 0$ ne représentent aucun mouvement. La seconde, correspondant pour $h = 0$ à la racine négative λ_1, est pour $h \neq 0$ la caractéristique isolée passant au col C, et la première est la section par le plan $z = 0$ de la surface de Poincaré, dont nous pouvons écrire l'équation

$$F(x-a, y-a, z) = 0,$$

et qui est le lieu des autres caractéristiques aboutissant au col C. Sur cette surface une caractéristique évidente du système (6) est la droite $x = a, y = a$, qui est la troisième caractéristique holomorphe. Sur la surface $F = 0$ l'étude des caractéristiques aboutissant au col C se ramène à une équation différentielle du premier ordre dont l'équation caractéristique a pour racine 1 et λ : les caractéristiques considérées sont représentées par deux développements de la forme (1)

$$(23) \qquad x - a = Cz^{\lambda} S(z, Cz^{\lambda}), \qquad y - a = Cz^{\lambda} S(z, Cz^{\lambda}),$$

qui renferment l'expression Cz^{λ} en facteur afin de représenter pour $C = 0$ la caractéristique $x = a$, $y = a$. Sur les autres caractéristiques, la constante C est positive ou négative, mais déterminée pour chacune d'elles, puisque nous ne considérons de chacune que l'arc où la cote z est positive.

Les mouvements correspondant à ces caractéristiques suivies vers le col C aboutissent à un choc des trois corps. En effet, par substitution des développements (23), l'équation (7) devient

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = z S(z, Cz^{\lambda}) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dt}{dz} = z^{\frac{1}{2}} S(z, Cz^{\lambda}),$$

d'où

$$t = z^{\frac{3}{2}} S(z, Cz^{\lambda}),$$

et successivement

$$t^{\frac{2}{3}} = z S(z, Cz^{\lambda}), \qquad Ct^{\frac{2\lambda}{3}} = Cz^{\lambda} S(z, Cz^{\lambda}),$$

(1) Pour des valeurs des masses pour lesquelles l'exposant λ est entier ou est l'inverse d'un nombre entier, ces développements peuvent dégénérer en des développements contenant, outre la fraction z^{λ}, la fonction $\log z$.

puis par inversion

$$z = t^{\frac{2}{3}} S\left(t^{\frac{2}{3}}, C t^{\frac{2\lambda}{3}}\right), \qquad C z^{\lambda} = C t^{\frac{2\lambda}{3}} S\left(t^{\frac{2}{3}}, C t^{\frac{2\lambda}{3}}\right);$$

d'où enfin

$$x - a = C z^{\lambda} S(z, C z^{\lambda}) = C t^{\frac{2\lambda}{3}} S\left(t^{\frac{2}{3}}, C t^{\frac{2\lambda}{3}}\right),$$

et

$$u = x z = t^{\frac{2}{3}} S\left(t^{\frac{2}{3}}, C t^{\frac{2\lambda}{3}}\right).$$

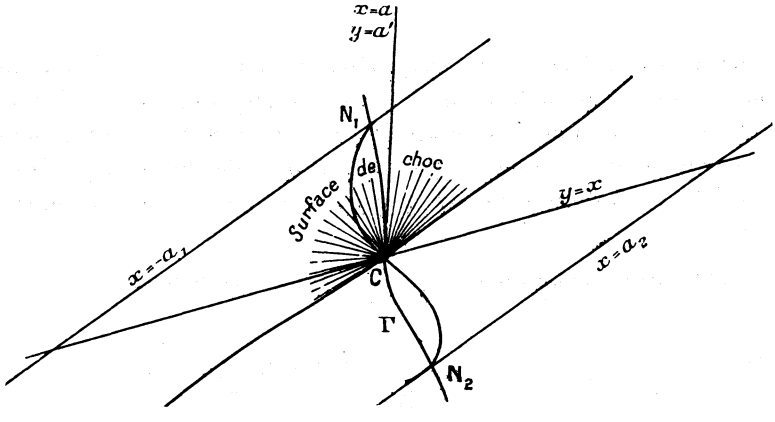
Nous retombons sur les développements connus (¹) des distances z et u au voisinage d'un *choc des trois corps*.

La condition d'un tel choc est donc la relation analytique

$$F(x - a, \quad y - a, \quad z) = 0,$$

prolongée s'il y a lieu. Nous appellerons *surface de choc* (*fig.* 4)

Fig. 4.



la surface définie par l'équation $F = 0$, prolongée analytiquement autant qu'il est possible dans l'espace

$$-a_1 \leqq x \leqq a_2, \qquad z \geqq 0.$$

Et nous appellerons *caractéristiques de choc* les caractéristiques aboutissant au col C et nécessairement situées sur la surface de

(¹) *Cf.* H. G. Block, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band 5, n° 9, 1908, p. 29; et Chazy, *Bulletin astronomique*, t. 35, 1918, p. 378.

choc, en excluant toutefois la caractéristique située dans le plan $z = 0$, et qui était pour $h = 0$ la caractéristique de choc. Parmi ces caractéristiques de choc, la droite $x = a, y = a$ correspond au mouvement d'Euler : l'instant du choc correspondant, $t = 0$, est un instant de symétrie du mouvement, au voisinage duquel les distances z et u sont des séries entières en $t^{\frac{2}{3}}$ comme dans le problème des deux corps, et au delà duquel le prolongement du mouvement est immédiat.

Les caractéristiques du système différentiel (6) n'ont à distance finie dans le domaine

$$-a_1 \leqq x \leqq a_2, \qquad z \geqq 0$$

d'autres points singuliers que le col C et les deux lignes de nœuds D_1 et D_2, quand la constante h est positive. Nous obtiendrons, au contraire, d'autres points singuliers quand cette constante est négative.

Branches infinies sur lesquelles z est fini. — Étudions maintenant les branches infinies des caractéristiques, et d'abord celles de ces branches sur lesquelles la cote z reste finie : comme précédemment, il est nécessaire que sur de telles branches infinies y tende vers l'infini quand x tend vers une limite comprise entre $-a_1$ et a_2.

Par la transformation $y = \frac{1}{Y}$, le système (6) devient

$$(24) \qquad \frac{dx}{1 - xY} = \frac{-dY}{\frac{(1 + \alpha Y^2)[\varphi(x) + f'(x)Y]}{2[f(x) + hz]}} = \frac{dz}{Yz}.$$

Les fractions rationnelles $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont positives et finies dans l'intervalle $-a_1 < x < a_2$; il résulte que, si l'on a $-a_1 < x_0 < a_2$ et si z_0 est positif et fini, les valeurs initiales x_0, $Y = 0$, z_0 définissent une caractéristique unique.

Étudions le mouvement correspondant. Si l'on prend Y comme variable indépendante, on tire des équations (24) les développements

$$x = x_0 + YS(Y), \qquad z = z_0 + Y^2 S(Y).$$

L'équation (7) donne

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\beta(1+\alpha Y^2)z}{Y^2[f(x)+hz]}$$

et

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{S(Y)}{Y^2} \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dt}{dY}\right)^2 = S(Y),$$

d'où

$$t = Y S(Y),$$

puis par inversion

$$Y = t S(t)$$

et enfin

$$z = z_0 + t^2 S(t).$$

Donc, comme dans le cas où la constante des forces vives est nulle, quand sur une caractéristique l'ordonnée y croît indéfiniment, la cote z restant finie, cette caractéristique possède à l'infini un point ordinaire, et une asymptote parallèle à Oy : le prolongement analytique de la caractéristique et du mouvement est immédiat. Aux deux extrémités de l'asymptote, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la projection de la caractérisque sur le plan xOy est positif, et la caractérisque est dans l'espace au-dessous de son asymptote, car on verrait encore que la cote z présente un maximum.

Branches infinies sur lesquelles z tend vers l'infini. — Étudions d'autre part l'allure des branches infinies des caractéristiques sur lesquelles la cote z croît indéfiniment. Si sur un arc de caractéristique partant d'un point à distance finie, la cote z croît indéfiniment, il faut, d'après l'équation $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{y-x}$, que l'intégrale $\int \frac{dx}{y-x}$ croisse aussi indéfiniment. Or la projection de l'arc de caractéristique considéré sur le plan xOy a même allure, des pentes de même sens que les caractéristiques tracées précédemment dans ce plan : par suite, il est impossible que sur cet arc y tende vers l'infini en même temps que z, car l'intégrale $\int \frac{dx}{y-x}$ tendrait vers une limite finie. Si donc y ne devient pas une infinité de fois infini quand z croît indéfiniment, la projection de l'arc de caractéristique considéré ne peut que tendre vers un point-limite,

situé nécessairement sur la droite $y = x$. En outre, il faut encore, d'après le sens des pentes dans le plan xOy, que la différence $y - x$ et les deux différentielles dx et dy finissent par avoir des signes constants, et par suite aussi la différentielle dz : ainsi cette différentielle est nécessairement positive, et la cote z tend vers $+\infty$, et d'autre part, l'on pourra prendre indifféremment chacune des trois variables x, y, z comme variable indépendante.

Caractéristiques dont la projection sur xOy a un point d'arrêt sur la droite $y = x$: mouvements hyperboliques. — Considérons un arc de caractéristique sur lequel z tend vers $+\infty$ et x et y vers une même limite, soit x_0 ($-a_1 \leq x_0 \leq a_2$). Par le changement de variable $z = \frac{1}{Z}$, où Z est positif et tend vers zéro en décroissant constamment, le système différentiel (6) devient

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{\frac{(y^2+\alpha)[y\varphi(x)+f'(x)]Z}{2[h+Zf(x)]}} = -\frac{dZ}{Z}. \tag{25}$$

Pour le nouveau système, le segment de la ligne $y = x$, $Z = 0$ projeté sur le plan xOy entre les droites $x = -a_1$, $x = a_2$ est une ligne de points singuliers. Désignons par P_1 et par P_2 les extrémités de la projection, points d'intersection respectifs de la droite $y = x$ et des droites $x = -a_1$, $x = a_2$; et soit M le point du segment P_1P_2 de coordonnées x_0, auquel aboutit la projection sur le plan xOy de l'arc de caractéristique considéré.

Pour étudier les caractéristiques du système différentiel (25) au voisinage des valeurs $x = x_0$, $y = x_0$, $Z = 0$, introduisons la nouvelle variable $v = x - y$: les trois variables v, y, Z satisfont à un système de la forme

$$\frac{dv}{v+\psi(x_0)Z+ZS_1(Z,v,y-x_0)} = \frac{dy}{-\psi(x_0)Z-ZS_1(Z,v,y-x_0)} = \frac{dZ}{Z},$$

si l'on suppose d'abord x_0 différent de $-a_1$ et a_2, c'est-à-dire le point M distinct des extrémités P_1 et P_2, et si l'on pose

$$\psi(x) = \frac{(x^2+\alpha)[x\varphi(x)+f'(x)]}{2h}. \tag{26}$$

D'après une discussion antérieure, la quantité $\psi(x_0)$, si h est

positif, est négative quand le point M est situé sur le segment P_1C, nulle en C, et positive quand le point M est situé sur le segment CP_2.

Par le dernier changement de variable $y + \psi(x_0)Z = Y$, on obtient un système différentiel

$$(27)\qquad \frac{dv}{v + \psi(x_0)Z + ZS_1(Z, v, Y - x_0)} = \frac{dY}{-ZS_1(Z, v, Y - x_0)} = \frac{dZ}{Z},$$

où le dénominateur du rapport intermédiaire n'a plus de termes du premier degré. Et l'on voit que les deux racines de l'équation caractéristique correspondant au point x_0 sont égales à l'unité, et que pour le système (27) la ligne $v = 0$, $Z = 0$ est une *ligne* de cette sorte *de points singuliers* dont l'équation caractéristique a une racine double, et qu'on fait rentrer tantôt dans les nœuds et tantôt dans les foyers. Sauf la ligne singulière elle-même à laquelle ne correspond aucun mouvement, toutes les caractéristiques du système (27) aboutissant au point x_0 de cette ligne sont situées sur une surface mise en évidence par Poincaré, et dont l'équation est de la forme

$$Y - x_0 = ZS_1(Z, v).$$

Sur cette surface les caractéristiques cherchées sont déterminées par une équation différentielle à deux variables; l'équation caractéristique correspondant à cette équation différentielle a pour racine double l'unité, et toutes ces caractéristiques sont représentées par un développement de la forme

$$(28)\qquad v = CZ + \psi(x_0)Z\log Z + ZS_1(CZ, Z\log Z, Z),$$

C désignant une constante arbitraire. La seule caractéristique holomorphe est obtenue pour $C = \infty$, d'où $Z = 0$, $y = x_0$, et ne représente aucun mouvement.

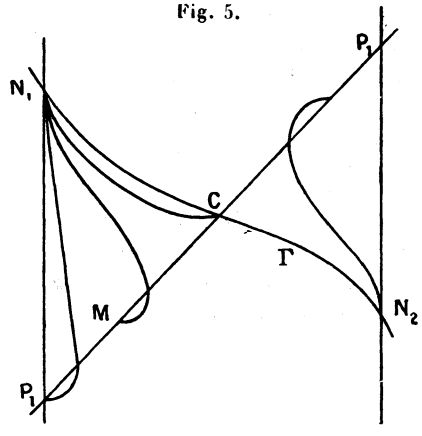
En définitive, les caractéristiques considérées du système différentiel (25) dépendent d'une constante arbitraire C, et peuvent être représentées par deux équations de la forme

$$(29)\qquad \begin{cases} y = -\psi(x_0)Z + Y = x_0 - \psi(x_0)Z + ZS_1(CZ, Z\log Z, Z), \\ x = v + y = x_0 + CZ + \psi(x_0)(Z\log Z - Z) + ZS_1(CZ, Z\log Z, Z). \end{cases}$$

Sur toutes ces caractéristiques, si $\psi(x_0)$ est différent de zéro, le

quotient $\frac{y-x_0}{x-x_0}$ tend vers zéro quand la projection x, y du point représentatif tend vers l'extrémité M, et la différence $y-x=-v$ finit par avoir le signe de $\psi(x_0)$: cette projection est située au-dessous de la droite $y=x$ de P_1 en C, et au-dessus de cette droite de C en P_2. D'après le sens des pentes sur le plan xOy, les projections des caractéristiques ont nécessairement la disposition de la figure 5. Ajoutons que le rayon de courbure en un point de la

Fig. 5.



projection tend vers zéro quand ce point tend vers l'extrémité M.

Si l'on suppose que l'extrémité de la projection soit le point C, c'est-à-dire si l'on a $x_0=a$, $\psi(x_0)$ s'annule, et la fonction log Z disparaît des développements (28) et (29), qui se réduisent à des développements holomorphes pour $Z=0$

$$v = CZ + S_2(Z),$$
$$y = a + S_2(Z),$$
$$x = a + CZ + S_2(Z).$$

Les projections des caractéristiques correspondantes aboutissent au point C de part ou d'autre de la droite $y=x$, tangentiellement à une parallèle à Ox, et avec un rayon de courbure quelconque, ni nul ni infini. Pour la valeur particulière $C=0$, la caractéristique obtenue se réduit à la caractéristique $x=a, y=a$, représentant le mouvement d'Euler.

Ce mouvement écarté, étudions les mouvements correspondant aux caractéristiques dont nous venons de tracer les projections sur

le plan xOy. Si l'on substitue les développements (29) dans le second membre de l'équation (7)

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\beta(y^2+\alpha)}{h+Zf(x)}, \tag{30}$$

ce second membre se transforme en un développement de forme analogue, qui pour $Z=0$ se réduit au terme $\frac{\beta(x_0^2+\alpha)}{h}$, qui est positif : par suite, en changeant au besoin les unités de longueur et de temps, nous pouvons supposer ce terme égal à 1, et mettre l'équation (30) sous la forme

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = 1+\psi_1(x_0)Z+S_2(Z, Z\log Z), \tag{31}$$

en posant

$$\psi_1(x) = \frac{-\beta}{h}\left[2x\psi(x)+\frac{f(x)}{h}(x^2+\alpha)\right],$$

d'où, d'après l'équation (26) et l'identité (5),

$$\psi_1(x) = -\frac{\beta}{h^2}(x^2+\alpha)^2\varphi(x),$$

de sorte que la fonction $\psi_1(x_0)$ est négative de P_1 en P_2. On tire de l'équation (31)

$$\frac{dt}{dZ} = \frac{-1-\frac{\psi_1(x_0)}{2}Z+S_2(Z, Z\log Z)}{Z^2},$$

si le temps t croît avec la cote z, et

$$t = \frac{1-\frac{\psi_1(x_0)}{2}Z\log Z+S_2(Z, Z\log Z)}{Z} = \frac{S(Z, Z\log Z)}{Z};$$

donc le temps croît indéfiniment avec la cote z sur la caractéristique considérée. On déduit

$$\frac{1}{t} = Z\,S(Z, Z\log Z);$$

et, puisque $\psi_1(x)$ est différent de zéro de P_1 en P_2, $\log Z$ figurerait dans l'expression précédente même si, x_0 étant égal à a, il ne figurait pas dans les expressions (29).

On a ensuite

$$\log t = -\log Z+S_1(Z, Z\log Z)$$

et

$$\frac{\log t}{t} = -\,Z\log Z\,S(Z, Z\log Z) + Z\,S_1(Z, Z\log Z).$$

Les expressions de $\frac{1}{t}$ et $\frac{\log t}{t}$ peuvent être considérées comme deux équations implicites en Z et Z log Z, et résolues par rapport à ces deux variables sous la forme

$$Z = \frac{1}{t}S\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right), \qquad Z\log Z = S_1\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right).$$

On tire enfin (¹)

$$z = \frac{1}{Z} = tS\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right)$$

et

$$u + a_1 z = z(x + a_1) = z\,S(Z, Z\log Z) = tS\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right),$$

$$a_2 z - u = z(a_2 - x) = tS\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right).$$

Donc, quand sur la projection de la caractéristique considérée le point x, y tend vers l'extrémité M, le temps croît indéfiniment, et les trois distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps. C'est le mouvement qu'on a appelé *mouvement hyperbolique* des trois corps, et nous retrouvons la représentation des coordonnées valable dans le mouvement hyperbolique général des trois corps et des n corps. Nous appellerons *caractéristiques hyperboliques* les caractéristiques que nous venons d'étudier, et dont les projections aboutissent à des points d'arrêt M situés sur le segment de droite P_1P_2. Parmi les mouvements hyperboliques, qui dépendent de quatre paramètres, se distinguent ceux où le point M est en C, et où la fonction $\psi(x_0)$ est nulle : dans ces mouvements particuliers, les rapports des distances

(¹) J'ai donné cette forme de développement dans le problème général des n corps (*Comptes rendus*, t. 160, 1920, p. 1560; *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. 39, 1922, p. 49). M. Bohlin avait obtenu cette même forme dans les mouvements rectilignes de deux corps et de trois corps par approximations successives (*Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar å Stockholms Observatorium*, Band 9, 1908, nᵒ 1, p. 14 et 45). Dans le mouvement hyperbolique rectiligne ou curviligne de deux corps, ce développement résulte d'ailleurs immédiatement de l'élimination de la variable u entre les deux équations classiques

$$r = a(e\,\mathrm{Ch}u - 1), \qquad e\,\mathrm{Sh}u - u = nt.$$

mutuelles ont pour valeurs limites les valeurs constantes du mouvement d'Euler, de même que dans un choc des trois corps ou sur les trajectoires paraboliques.

Les expressions obtenues des distances mutuelles donnent immédiatement le prolongement analytique du mouvement au delà de la valeur infinie du temps.

Pour que ces trois expressions conservent des valeurs réelles, il est nécessaire, arrivant au point $t = \infty$ par la partie positive de l'axe réel du plan complexe, de partir du point $t = \infty$, non pas par la partie négative de l'axe réel, mais par l'une d'entre une infinité de droites parallèles à cet axe. En outre, après le prolongement, les expressions des trois distances mutuelles z, $a_1 z + u$, $a_2 z - u$ deviennent négatives : par suite les valeurs absolues de ces distances satisfont à deux équations différentielles de la forme (1) et (2), mais où les trois coefficients m_1, m_2, m_3 sont négatifs; les nouvelles trajectoires correspondent, non plus à des attractions, mais à des répulsions en raison inverse du carré de la distance. Pour ces raisons, que j'ai développées dans un autre Mémoire (1), nous ne prolongerons pas les mouvements hyperboliques au delà de la valeur infinie du temps, ni les caractéristiques hyperboliques au delà des points d'arrêt M.

Caractéristiques dont la projection sur xOy a un point d'arrêt en P_1 ou P_2 : mouvements hyperboliques-paraboliques. — Il reste à étudier les branches infinies des caractéristiques admettant une asymptote parallèle à Oz, et dont la projection sur le plan xOy aboutit à l'un des points P_1 ou P_2. Supposons que cette projection aboutisse au point P_1, c'est-à-dire que x et y tendent vers $-a_1$, et dans le système (25) faisons le changement de variables

$$x = -a_1 + x_1, \qquad y = x - v :$$

au voisinage des valeurs $x_1 = 0$, $v = 0$, $Z = 0$, le système transformé peut s'écrire

$$(32) \qquad \frac{dx_1}{v} = \frac{dv}{v + \dfrac{ZS(x_1, v)}{x_1[x_1 + ZS(x_1)]}} = \frac{dZ}{Z}.$$

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série. t. 39, 1922, p. 52-59.

D'ailleurs les variables x_1 et Z tendent vers zéro par valeurs positives, et aussi la variable ν, d'après le système (32), où les différentielles dx et dz sont négatives. Il résulte que la projection de la caractéristique aboutit au point P_1 au-dessous de la droite $y = x$, et au-dessus de la parallèle à Ox, d'après le sens des pentes dans la région.

Introduisons encore les deux variables y_1 et z_1 définies par les équations

$$(33) \qquad \nu = \frac{x_1 y_1}{3}, \qquad Z = \gamma x_1^3 z_1, \ \gamma = \frac{4hM}{9m_2(m_1+m_3)^2},$$

où les coefficients $\frac{1}{3}$ et γ sont choisis pour simplifier des calculs ultérieurs. Le système transformé peut s'écrire

$$(34) \quad \frac{dx_1}{\frac{x_1 y_1}{3}} = \frac{dy_1}{y_1 - \frac{y_1^2}{3} + z_1\left[-\frac{2}{3} + S_1(x_1, x_1 y_1, x_1^3 z_1)\right]} = \frac{dz_1}{z_1 - y_1 z_1},$$

si nous mettons en évidence des coefficients que nous emploierons; il nous sera utile aussi de noter que la valeur commune des trois rapports (34) est égale à $\frac{dZ}{Z}$. D'ailleurs *les deux nouvelles variables* y_1 *et* z_1 *finissent par être positives*, comme les variables x_1, ν et z, et ne peuvent s'annuler qu'à la limite.

Je dis que sur la caractéristique considérée les deux variables y_1 et z_1 que nous venons d'introduire sont bornées.

En premier lieu, le quotient $\frac{Z}{x_1}$ tend vers zéro. En effet, admettons que l'inverse $\frac{x_1}{Z} = \frac{x + a_1}{Z}$ ait indéfiniment des valeurs bornées. Dans le système (25) faisons le nouveau changement de variable

$$x + a_1 = x_2 Z :$$

ce système prend la forme

$$\frac{dx_2}{x_2(y + a_1)} = \frac{dy}{\frac{y^2 + \alpha}{2} \ \frac{y - b_1 + x_2^3 Z^2 S(x_2 Z, y)}{h x_2 + S(x_2, Z)}} = -\frac{dZ}{x_2 Z^2}.$$

Prenons y comme variable indépendante; quand y tend vers $-a_1$, il passe indéfiniment par des valeurs auxquelles correspondent des valeurs de x_2 bornées, et les valeurs de Z sont toutes arbitrairement petites. Dans les trois plans complexes des trois

variables, autour de chacun des points x_2, y, Z correspondant à un tel système de valeurs, les deux coefficients différentiels $\frac{dx_2}{dy}$, $\frac{dZ}{dy}$ s'expriment en fonctions holomorphes des trois variables dans trois cercles de rayons fixes : dès lors, d'après le théorème de Cauchy, autour de chacune des valeurs considérées de y comme centre, la solution $x_2(y)$, $Z(y)$ est formée de deux fonctions holomorphes dans un cercle de rayon fixe. Si le centre de ce cercle est assez voisin du point $-a_1$, il contient ce point. Donc les fonctions $x_2(y)$, $Z(y)$ sont holomorphes pour $y=-a_1$: Z tendant vers zéro, la fonction $Z(y)$ se réduit évidemment à $Z=0$ puisque Z est en facteur au dénominateur de dZ. Or la solution $x_2(y)$, $Z(y)=0$ correspondante ne représente aucun mouvement. Donc sur la caractéristique précédemment considérée, *le quotient* $\frac{Z}{x_1}$ *tend vers zéro.*

Il résulte que l'expression

$$h+Zf(x)=h+m_1m_3\frac{Z}{a_1+x}+Z\left(m_1m_2+\frac{m_2m_3}{a_2-x}\right)$$

tend vers h. Conservant y comme variable indépendante et égalant les deux derniers rapports du système (25), on déduit une égalité de la forme

$$\frac{dZ}{dy}=x_1^2\left(\frac{9\gamma}{2}+\varepsilon\right),$$

γ désignant le coefficient introduit dans la troisième équation (33), et ε une quantité infiniment petite. Intégrons l'égalité précédente par rapport à la variable y entre les deux valeurs y_0 et y

$$-a_1<y_0<y:$$

nous obtenons

$$Z(y)-Z(y_0)=x_1^2[y_0+\theta(y-y_0)]\left(\frac{9\gamma}{2}+\varepsilon'\right)(y-y_0),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et 1, et ε' une seconde quantité infiniment petite. Puisque la fonction x_1 finit par décroître, on déduit l'égalité

$$Z(y)-Z(y_0)<x_1^2(y)\left(\frac{9\gamma}{2}+\varepsilon'\right)(y-y_0),$$

si y est assez voisin de la limite $-a_1$. y étant ainsi choisi, faisons varier y_0, faisons-le tendre vers $-a_1$; $Z(y_0)$ tend vers zéro, et à

la limite l'inégalité précédente devient

$$Z < x_1^3 \left(\frac{9}{2} + \eta\right) \gamma \left(y + a_1\right),$$

η désignant une quantité infiniment petite avec $y + a_1$. Donc *le quotient* $\frac{Z}{x_1^3}$ *tend vers zéro* comme $y + a_1$.

En outre, en introduisant les variables y_1 et z_1 telles que l'on ait

$$\gamma = x - v = x - \frac{x_1 y_1}{3}, \qquad Z = \gamma x_1^3 z_1,$$

positives comme x_1, on tire de la dernière inégalité

$$\gamma x_1^3 z_1 < x_1^3 \left(\frac{9}{2} + \eta\right) \gamma \left(x_1 - \frac{x_1 y_1}{3}\right)$$

ou

$$z_1 < \left(\frac{9}{2} + \eta\right) \left(1 - \frac{y_1}{3}\right) :$$

d'où résulte que *les deux quantités positives* y_1 *et* z_1 figurant dans le système (34) *sont bornées.*

Pour achever l'étude de ces deux quantités, nous allons discuter l'allure des caractéristiques du système différentiel (34); nous représenterons les valeurs des trois variables x_1, y_1, z_1 par le point de coordonnées x_1, y_1, z_1 par rapport à trois axes rectangulaires $O_1 x_1$, $O_1 y_1$, $O_1 z_1$, ou simplement par la projection y_1, z_1 de ce point sur le plan $y_1 O_1 z_1$. Il suffit d'ailleurs dans ce nouvel espace de considérer le domaine D défini par les inégalités

$$y_1 \geqq 0 \text{ et arbitrairement petit},$$

$$x_1 \geqq 0, \qquad z_1 \geqq 0, \qquad z_1 \leqq \left(\frac{9}{2} + \eta\right) \left(1 - \frac{y_1}{3}\right),$$

η désignant aussi une quantité arbitrairement petite; *il faut que le point* x_1, y_1, z_1 *décrive une caractéristique du système* (34) *qui finisse par ne plus sortir du domaine* D, et par conséquent dont la projection sur le plan $y_1 O_1 z_1$ finisse par ne plus sortir du triangle limité par les trois droites

$$y_1 = 0, \qquad z_1 = 0, \qquad z_1 = \frac{9}{2} \left(1 - \frac{y_1}{3}\right).$$

Cherchons dans le domaine D et sur la frontière de ce domaine les points singuliers du système différentiel (34); ce sont :

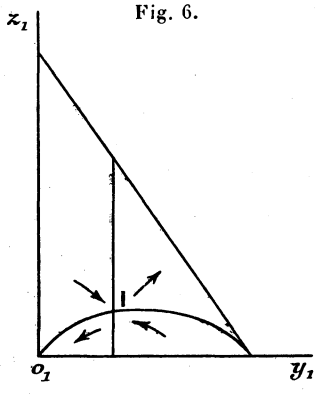
1° les points du segment de droite $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, qui est une ligne singulière;

2° le point $x_1 = 0$, $y_1 = 3$, $z_1 = 0$;

3° Le point $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$, que nous désignerons par I.

En outre, le sens des pentes des projections des caractéristiques du système différentiel (34) sur le plan $y_1 O_1 z_1$ est donné par les signes des dénominateurs des deux rapports en dy_1 et dz_1; le triangle considéré dans ce plan est divisé en quatre régions par la droite $y_1 = 1$ et par la courbe dont on obtient l'équation en annulant le dénominateur du rapport en dy : cette droite et cette courbe se coupent au point I. Dans les quatre régions obtenues, les pentes des projections des caractéristiques ont les directions des quatre flèches de la figure 6. Enfin, d'après les équations (34), dz_1 est négatif comme dx_1 et dZ pour $y_1 < 1$, et positif pour $y_1 > 1$: de sorte que, dans le sens où nous suivons la caractéristique, la projection du point représentatif sur le plan $y_1 O_1 z_1$ a, non seulement la direction, mais aussi le sens de chacune des quatre flèches de la figure 6. Il résulte que *la projection de la caractéristique considérée aboutit nécessairement soit à l'origine* O_1, *soit au point singulier* I.

Fig. 6.



Examinons ces deux hypothèses. Pour que la projection de la caractéristique aboutisse au point O_1, il faut, puisque x_1 tend vers zéro et que dx_1 est négatif, que la caractéristique elle-même aboutisse au point O_1. Or le long de la ligne de points singuliers $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, les racines de l'équation caractéristique du système (34) sont visiblement égales toutes deux à l'unité.

Chacun des points de cette ligne est un point singulier de l'espèce intermédiaire entre les nœuds et les foyers; sauf la ligne singulière elle-même, les caractéristiques aboutissant en un point de cette ligne sont situées sur la surface mise en évidence par Poincaré. Au point $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, cette surface est évidemment le plan $x_1 = 0$, qui contient effectivement une infinité de caractéristiques, mais ces caractéristiques ne correspondent à aucun mouvement, car on déduit $x = -a_1$. Cette première hypothèse est à rejeter.

Sur les caractéristiques considérées, il faut donc nécessairement que le point x_1, y_1, z_1 tende vers le point singulier I. Au voisinage de ce point, le système (34) est de la forme

$$(35)\qquad \frac{dx_1}{x_1\left(\frac{1}{3}+\dots\right)} = \frac{dy_1}{\frac{4}{3}\frac{m_3}{m_1+m_3}x_1+\frac{1}{3}(y_1-1)-\frac{2}{3}(z_1-1)+\dots} = \frac{dz_1}{-(y_1-1)(1+\dots)},$$

si l'on écrit seulement les termes du premier degré en $x_1, y_1 - 1$, $z_1 - 1$; et l'équation caractéristique est

$$\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)(\lambda-1)=0.$$

Donc le dernier point singulier I est un *col*. Étudions les caractéristiques qui y aboutissent. Le système (35), si l'on y fait $x_1 = 0$, se réduit à une équation du premier ordre dont l'équation caractéristique a pour racines $-\frac{2}{3}$ et 1 : donc, dans le plan $x_1 = 0$, au point $y_1 = 1$, $z_1 = 1$, passent seulement deux caractéristiques, qui sont holomorphes et auxquelles ne correspond aucun mouvement. L'une de ces caractéristiques est nécessairement la caractéristique isolée aboutissant au col I, et l'autre est la section par le plan $x_1 = 0$ de la surface

$$\Phi_1(x, y_1-1, z_1-1)=0,$$

lieu des autres caractéristiques aboutissant à ce col. Sur cette surface, l'étude de ces caractéristiques se ramène à l'étude d'une équation différente du premier ordre, dont l'équation caractéristique a pour racines $\frac{1}{3}$ et 1.

Donc, sauf la caractéristique isolée, les caractéristiques du système (35) aboutissant au col I sont représentées par des développements de la forme, pour Z positif et assez petit, et puisque la valeur commune des trois rapports (35) est encore $\frac{dZ}{Z}$,

$$x_1 = S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z, CZ\right),$$
$$y_1 - 1 = S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z, CZ\right),$$
$$z_1 - 1 = S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z, CZ\right),$$

où figure la seule constante arbitraire C, car les développements obtenus doivent satisfaire à l'équation $Z = \gamma x_1^3 z_1$, qui détermine la valeur du coefficient de $Z^{\frac{1}{3}}$ dans le développement de x_1.

On déduit des précédents les développements des variables x et y

$$(36)\quad \begin{cases} x = -a_1 + x_1 = -a_1 + S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z, CZ\right), \\ y = x - v = -a_1 + x_1 - \frac{x_1 y_1}{3} \\ \qquad = -a_1 + x_1 - Z\frac{dx_1}{dZ} \\ \qquad = -a_1 + S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z, CZ\right); \end{cases}$$

d'où résulte que les projections sur le plan xOy des caractéristiques considérées du système (35) aboutissent au point P_1 tangentiellement à la droite de coefficient angulaire $\frac{2}{3}$ (*fig.* 5). Remarquons que le développement de x_1, et de x, ne renferme pas de terme du premier degré en $Z\log Z$, sans quoi, d'après l'équation $z_1 = \frac{Z}{\gamma x_1^3}$, le développement de Z devrait contenir un terme en $Z^{\frac{2}{3}}\log Z$; par conséquent, le développement de y ne contient pas non plus de terme du premier degré en $Z\log Z$, ni d'ailleurs en Z.

Étudions enfin les mouvements correspondant aux caractéristiques que nous venons d'obtenir. Si l'on substitue les développements (36) au second membre de l'équation

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\beta(y^2+\alpha)}{h + Zf(x)},$$

ce second membre se transforme en un développement de forme analogue

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = S\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z\right),$$

où nous ne mettons plus en évidence la constante arbitraire C, et où nous pouvons égaler à 1 le terme constant

$$\frac{\beta(a_1^2+\alpha)}{h} = \frac{m_2(m_1+m_3)}{2Mh},$$

en changeant les unités de longueur et de temps. D'où l'équation

$$\frac{dt}{dZ} = \frac{-1+S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z\right)}{Z^2}, \tag{37}$$

si le temps croît avec la cote z. Il croît d'ailleurs indéfiniment avec z, et l'on déduit le développement

$$t = \frac{1+S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z\right)}{Z}, \tag{38}$$

car, comme le développement (36) de la variable y, le développement S_1 de l'équation (37) ne contient pas, au premier degré, de terme en $Z\log Z$. On tire de l'équation (38)

$$\frac{1}{t} = ZS\left(Z^{\frac{1}{3}}, \log Z\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} = Z^{\frac{1}{3}} S\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z\right),$$

puis

$$\log t = -\log Z + S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z\right),$$

d'où

$$\frac{\log t}{t} = -Z\log Z\, S\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z\right) + Z\, S_1\left(Z^{\frac{1}{3}}, Z\log Z\right).$$

Par inversion des deux équations en $\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ et $\frac{\log t}{t}$, on obtient

$$Z^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} S\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right), \qquad Z\log Z = S_1\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),$$

d'où

$$z = \frac{1}{Z} = t\, S\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),$$

puis

$$a_1 z + u = z(a_1 + x) = z\, x_1 = t^{\frac{2}{3}} S\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right).$$

Donc, sur les caractéristiques considérées, quand la projection x, y tend vers le point limite P_1, le temps t croît indéfiniment, la distance des deux masses m_1 et m_3 est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps, et la distance de la troisième masse m_2 à l'une des deux premières ou à leur centre de gravité est un infiniment grand d'ordre 1. J'ai appelé un tel mouvement *mouvement hyperbolique-parabolique*, et nous retrouvons la représentation des coordonnées valables dans le mouvement hyperbolique-parabolique le plus général des trois corps.

Nous appellerons *caractéristiques hyperboliques-paraboliques* les caractéristiques que nous venons d'étudier, et dont les projections sur le plan xOy aboutissent au point P_1, et *surface hyperbolique-parabolique* la surface engendrée par ces caractéristiques, et dont l'équation est la relation

$$\Phi_1\left(a_1+x,\ \frac{3(x-y)}{a_1+x}-1,\ \frac{1}{\gamma(a_1+x)^3 z}-1\right)=0,$$

prolongée analytiquement dans tout le domaine

$$-a_1 \leqq x \leqq a_2, \quad z \geqq 0.$$

C'est là aussi la relation que doivent vérifier des conditions initiales pour produire un mouvement hyperbolique-parabolique.

De même au point P_2, $x=a_2$, $y=a_2$, aboutissent les projections sur le plan xOy de caractéristiques hyperboliques-paraboliques correspondant à des mouvements où la distance des masses m_2 et m_3 est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps, et où les distances de ces deux masses à la masse m_1 sont des infiniment grands d'ordre 1. Ces caractéristiques sont situées sur la seconde surface hyperbolique-parabolique

$$\Phi_2\left[a_2-x,\ \frac{3(x-y)}{a_2-x}-1,\ \frac{9m_1(m_2+m_3)^2}{4h\mathrm{M}(a_2-x)^3 z}-1\right]=0.$$

Les représentations obtenues donnent immédiatement le prolongement analytique des caractéristiques et des mouvements hyperboliques-paraboliques; comme les représentations des caractéristiques et des mouvements hyperboliques. Mais nous n'effectuerons pas ce prolongement, d'autant que l'ordre des trois masses

change dans le passage à l'infini, et que la variable x sort de l'intervalle $-a_1, +a_2$.

CHAPITRE III.

CONSTANTE DES FORCES VIVES NÉGATIVE.

Traitons enfin le cas où la constante des forces vives h est négative. De même que dans le cas où h est positif, les caractéristiques admettent comme lignes de nœuds les deux demi-droites $D_1(x = -a_1,\ y = b_1,\ z \gtrless 0)$ et $D_2(x = a_2,\ y = -b_2,\ z \gtrless 0)$, et comme col le point $C(x = a,\ y = a,\ z = 0)$. Le passage d'une caractéristique en un point de l'une des demi-droites D_1 ou D_2 correspond à un choc des deux masses m_1 et m_3, ou m_3 et m_2. Et, si une caractéristique aboutit au col C, il y a choc des trois corps : cette caractéristique est nécessairement située sur la surface

$$F(x-a,\ y-a,\ z) = 0,$$

dont l'équation est aussi la condition de choc. De même encore, pour h négatif comme pour h positif, les caractéristiques ont des branches infinies parallèles à Oy, correspondant à des maxima de la distance z.

Au contraire, les caractéristiques ne possèdent pas pour h négatif de branches infinies analogues aux deux dernières sortes de branches infinies que nous avons étudiées pour h positif, et qui possèdent une asymptote parallèle à Oz dans le plan $y = x$.

En effet, d'après l'équation des forces vives, l'expression $f(x)+hz$ ne peut devenir négative au cours d'un mouvement, et, si cette expression s'annule, les deux vitesses $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ sont nulles aussi. Or, quand h était nul ou positif, l'expression considérée,

$$f(x) + hz = m_1 m_2 + \frac{m_1 m_3}{a_1 + x} + \frac{m_2 m_3}{a_2 - x} + hz,$$

était, en fonction de z, essentiellement positive quel que soit z; au contraire, quand h est négatif, la même expression s'annule et devient négative si z est assez grand. Telle est la circonstance

qui empêche l'existence de caractéristiques possédant une asymptote parallèle à Oz et située dans le plan $y = x$, à moins peut-être que cette asymptote ne soit située aussi dans l'un des deux plans $x = -a_1$, $x = a_2$. Mais nous verrons que la même circonstance introduit de nouveaux points singuliers des caractéristiques, et des mouvements d'allure nouvelle.

D'ailleurs le cas que nous venons de définir ne peut non plus se présenter. Il est encore impossible, quand la constante des forces vives est négative, que sur une caractéristique z tende vers l'infini, et que x et y tendent tous deux vers la valeur $-a_1$, par exemple. En effet, posons $z = \frac{1}{Z}$: quand z tend vers $+\infty$, Z tend vers zéro; en outre, d'après l'égalité

$$\frac{f(x)}{z} + h = m_1 m_3 \frac{Z}{a_1 + x} + \left(m_1 m_2 + \frac{m_2 m_3}{a_2 - x}\right) Z + h \geqq 0,$$

le quotient $\frac{Z}{a_1 + x}$ est supérieur à un nombre positif fixe : donc l'inverse $\frac{x + a_1}{Z}$ est borné supérieurement. Or, nous avons démontré précédemment, sans tenir compte du signe de la constante h, que si, sur une caractéristique, y tend vers $-a_1$, Z vers zéro et si le quotient $\frac{x + a_1}{Z}$ a indéfiniment des valeurs bornées, la fonction Z se réduit nécessairement à $Z \equiv 0$, et aucun mouvement ne correspond à la caractéristique considérée.

Le cylindre de vitesse nulle : les mouvements avec instant de vitesse nulle et rebroussement. — Ainsi il résulte de l'équation des forces vives que les caractéristiques ne peuvent avoir de points au-dessus de la surface

$$z = \frac{f(x)}{-h},$$

qui est la surface de vitesse nulle correspondant à la valeur de h considérée. Nous appellerons cette surface *cylindre de vitesse nulle*, car c'est un cylindre de génératrices parallèles à Oy et dont la base dans le plan xOz admet comme asymptotes les deux droites $x = -a_1$, $x = a_2$; dans l'intervalle, la cote z présente un minimum pour la valeur de x qui annule la dérivée $f'(x)$, et qui

est aussi l'abscisse du point d'intersection de la courbe Γ avec Ox. Ainsi la cote z d'un point d'une caractéristique ne peut devenir infinie sauf dans les plans $x = -a_1$, $x = a_2$.

Soit un point du cylindre de vitesse nulle, de coordonnées x_0, y_0, z_0, dont la cote z_0 est finie, de sorte que l'on a

$$f(x_0) + hz_0 = 0, \qquad -a_1 < x_0 < a_2,$$

En prenant y comme variable indépendante, on voit que les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 déterminent une caractéristique unique du système différentiel (6), qui se réduit à la droite

$$x = x_0, \; z = z_0,$$

excepté si la quantité $y_0\varphi(x_0) + f'(x_0)$ est nulle. Et le résultat subsiste pour le système transformé du système (6) par le changement de variable $y = \frac{1}{Y}$ et pour les valeurs initiales $x = x_0$, $Y = 0$, $z = z_0$. Donc les génératrices rectilignes du cylindre de vitesse nulle sont des caractéristiques particulières, auxquelles ne correspond d'ailleurs aucun mouvement, et la courbe d'intersection du cylindre de vitesse nulle et du cylindre de génératrices parallèles à Oz et dont la base dans le plan xOy est la courbe Γ tracée précédemment

$$y\varphi(x) + f'(x) = 0$$

est une ligne de points singuliers.

Pour étudier les caractéristiques au voisinage d'un point de cette ligne, faisons le changement de variables

$$y = -\frac{f'(x)}{\varphi(x)} + Y, \qquad z = \frac{f(x)}{-h} - Z;$$

le système (6) prend la forme

$$(39)\quad \frac{dx}{\left(x + \frac{f'}{\varphi} - Y\right)Z} = \frac{dY}{\frac{\left(\frac{f'}{\varphi} - Y\right)^2 + \alpha}{2h}\varphi(x)Y + \frac{\varphi f'' - \varphi' f'}{\varphi^2}\left(x + \frac{f'}{\varphi} - Y\right)Z} = \frac{dZ}{\left(\frac{\alpha\varphi^2 + f'^2}{-h\varphi} + \frac{f'}{h}y - Z\right)Z},$$

après quelques réductions et après emploi de l'identité (5) au

dénominateur de dZ. Nous pouvons définir le point considéré sur l'intersection des deux cylindres par son abscisse $x_0(-a_1<x_0<a_2)$, ou encore par sa projection M sur le plan xOy, projection située sur la courbe Γ qui va du point N_1 au point N_2 et passe en C. Les deux racines de l'équation caractéristique du système (39) relative au point x_0 sont les deux quantités

$$\frac{f'^2(x_0)+\alpha\varphi^2(x_0)}{2h\varphi(x_0)} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha\varphi^2(x_0)+f'^2(x_0)}{-h\varphi(x_0)},$$

qui sont continues de N_1 en N_2, et dont le quotient est égal à -2. Donc la ligne $y=0$, $z=0$ d'intersection des deux cylindres est une *ligne de cols* pour le système des caractéristiques.

Par tout point x_0 de cette ligne passent, outre la ligne elle-même, deux caractéristiques holomorphes. L'une est évidemment la génératrice du cylindre de vitesse nulle, représentée par les équations $x=x_0$, $Z=0$. Puisque la seconde caractéristique holomorphe ne peut être tangente au plan $Z=0$ qui contient à la fois la première et la ligne de cols, sur cette caractéristique x et y sont fonctions holomorphes de Z. Prenant Z comme variable indépendante, écrivons le système (39) sous la forme

$$\frac{dx}{dZ}=\theta(x_0)+S_1(x-x_0,\ Y,\ Z),$$

$$Z\frac{dY}{dZ}=\left[-\frac{1}{2}+S_1(x-x_0,\ Y,\ Z)\right]Y+[\theta_1(x_0)+S_1(x-x_0,\ Y,\ Z)]Z:$$

les deux fonctions $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$ sont holomorphes de N_1 en N_2 : ajoutons que, selon des remarques antérieures, d'une part la quantité

$$\frac{\varphi f''-\varphi' f'}{\varphi^2}=-\frac{d}{dz}\left(-\frac{f'}{\varphi}\right)$$

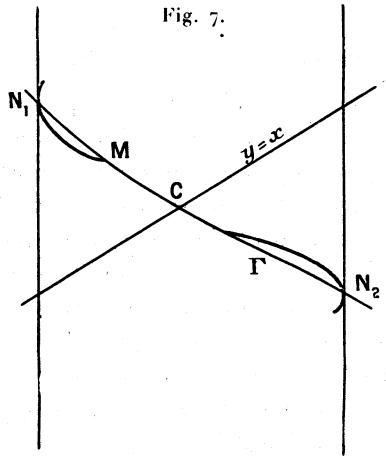
est positive de N_1 en N_2, et par suite, la fonction $\theta_1(x)$ a, comme la fonction $\theta(x)$, le signe de la fonction $x\varphi+f'$, et, d'autre part, cette dernière fonction et par conséquent les deux fonctions $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$ sont négatives de N_1 en C, nulles en C et positives de C en N_2.

Il résulte que la troisième caractéristique passant au point x_0 est représentée par deux développements de la forme

$$(40)\qquad \begin{cases} x=x_0+\theta(x_0)Z+ZS_1(Z), \\ Y=\frac{2}{3}\theta_1(x_0)Z+ZS_1(Z), \end{cases}$$

où la variable Z prend seulement des valeurs positives. D'après le signe de la différence $x - x_0$ ou de la fonction Y, la projection de l'arc de caractéristique obtenu, aboutit au point M au-dessous de la courbe Γ de N_1 en C, et au-dessus de cette courbe de C en N_2 : le point M est d'ailleurs un point ordinaire de cette projection (*fig.* 7).

Fig. 7.



Quand le point M varie de N_1 en N_2, les arcs des caractéristiques obtenues engendrent une surface analytique, dont l'équation résulte de l'élimination de x_0 entre les deux équations (40)

$$\Psi(x, Y, Z) = 0,$$

et sur laquelle on doit considérer de même seulement la région $Z \geqq 0$.

Dans le cas-limite où la projection M vient en N_1 ou N_2, soit $x_0 = -a_1$, le système (39) prend la forme.

$$\frac{dx}{(x+a_1)^2 Z S(x+a_1, Y)} = \frac{dY}{Y[1+S_1(x+a_1, Y)]+(x+a_1)^3 Z S(x+a_1, Y)} = \frac{dZ}{Z[-2+S_1(x+a_1, Y, Z)]}.$$

Le point $x = -a_1$, $Y = 0$, $Z = 0$ est encore un col, extrémité de la ligne de cols considérée. Les deux caractèristiques passant en ce point, outre la ligne de cols elle-même, sont la génératrice du cylindre de vitesse nulle $x = -a_1$, $Z = 0$, et la génératrice

représentée par les équations (4o) après passage à la limite, qui se réduit à $x = -a_1$, $y = 0$, et ne représente aucun mouvement.

Si d'autre part, le point M vient en C, la troisième caractéristique holomorphe, d'après les équations (4o), se réduit visiblement à

$$x = a, \quad Y = 0, \qquad \text{ou} \qquad x = a, \quad y = a;$$

le mouvement correspondant est le mouvement d'Euler.

Étudions les mouvements correspondant aux autres positions du point M. Par substitution des développements (4o) l'équation

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\beta(y^2+\alpha)\,z}{f(x)+hz} = \frac{\beta(y^2+\alpha)\,z}{-hZ}$$

devient

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{S(Z)}{Z} \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dt}{dZ}\right)^2 = \frac{S(Z)}{Z},$$

le terme indépendant de Z dans le développement S(Z) étant évidemment positif. On tire

$$\frac{dt}{dZ} = \frac{S(Z)}{\sqrt{Z}};$$

donc la valeur $Z = 0$ et le point M correspondent à une valeur finie du temps, $t = 0$. On déduit

$$t = \sqrt{Z}\,S(Z), \qquad t^2 = Z\,S(Z),$$

et par inversion

$$Z = t^2 S(t^2),$$

et enfin

$$Y = t^2 S(t^2), \qquad x = x_0 + t^2 S(t^2).$$

On vérifie qu'à l'instant $t = 0$ les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$, et par conséquent, les deux vitesses $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{du}{dt} = y\frac{dz}{dt}$, s'annulent, comme il est nécessaire d'après le théorème des forces vives.

Le prolongement du mouvement au delà de l'instant $t = 0$ est classique. Quand le temps continue à varier dans le même sens, la variable Z ne peut devenir négative, mais reprend les valeurs positives en sens inverse. Évidemment, d'après les formules obtenues, à deux valeurs de t égales et de signes contraires correspondent les mêmes valeurs de Z, Y et x, et par conséquent des

distances z et u : il y a symétrie du mouvement par rapport à l'instant $t = 0$; le point représentatif rebrousse chemin lui aussi, et décrit la même caractéristique en sens inverse (1).

Nous appellerons *surface des caractéristiques avec instants de vitesse nulle* la surface dont l'équation est donnée par la relation

$$\Psi\left[x, \frac{f'(x)}{\varphi(x)} + y, \frac{f(x)}{-h} - Z\right] = 0,$$

prolongée analytiquement dans tout l'espace

$$-a_1 \leqq x \leqq a_2, \quad 0 \leqq z \leqq \frac{f(x)}{-h}.$$

(1) Remarquons que, si un mouvement présente deux instants de vitesse nulle, ou un instant de vitesse nulle et un choc symétrique de deux corps, ou deux chocs symétriques de deux corps, ce mouvement est périodique.