

# BULLETIN DE LA S. M. F.

M. JANET

**Sur la composition des expressions différentielles  
linéaires et une application à la théorie des systèmes  
d'équations aux dérivées partielles**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 55 (1927), p. 89-91

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1927\\_\\_55\\_\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__89_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA COMPOSITION DES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES  
LINÉAIRES ET UNE APPLICATION A LA THÉORIE DES SYS-  
TÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ;**

Par M. MAURICE JANET.

1. Appelons « expression différentielle linéaire d'ordre  $p$  en  $u$  » toute somme de la forme

$$\varphi(u) = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

où les  $a$  sont des fonctions des  $x$ , et où

$$0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq p.$$

Une telle expression correspond à un polynome d'ordre  $p$  à  $n$  variables, dont les coefficients dépendent de  $n$  paramètres. Nous poserons

$$\Sigma a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \dots \omega_n^{\alpha_n} = \bar{\varphi}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Soient donnés les polynomes  $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$  correspondant à deux expressions différentielles linéaires  $\varphi, \psi$ . *Comment obtiendra-t-on le polynome correspondant à  $\psi(\varphi)$ ?* Quand  $\bar{\psi}$  se réduit à  $\omega_1^{\beta_1} \omega_2^{\beta_2} \dots \omega_n^{\beta_n}$ , la réponse résulte immédiatement de la formule de Leibnitz qui donne la dérivée d'un produit

$$(1) \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} \bar{\varphi}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \sum_{\alpha} \left[ \sum_{\rho} C_{\beta_1}^{\rho_1} C_{\beta_2}^{\rho_2} \dots C_{\beta_n}^{\rho_n} \frac{\partial^{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n} a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}}{\partial x_1^{\rho_1} \partial x_2^{\rho_2} \dots \partial x_n^{\rho_n}} \right. \\ \left. \times \omega_1^{\alpha_1 + \beta_1 - \rho_1} \omega_2^{\alpha_2 + \beta_2 - \rho_2} \dots \omega_n^{\alpha_n + \beta_n - \rho_n} \right],$$

où  $\sum_{\rho}$  indique qu'il faut donner aux  $\rho$  tous les systèmes de valeurs entières telles que pour chaque  $i$  on ait

$$0 \leq \rho_i \leq \beta_i$$

et où  $\sum_{\alpha}$  a le même sens que dans l'expression de  $\varphi$ . On peut écrire la formule précédente

$$\begin{aligned} (1)' \quad \frac{\overline{\partial^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n} \varphi}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} &= \sum_{\rho} C_{\beta_1}^{\rho_1} C_{\beta_2}^{\rho_2} C_{\beta_n}^{\rho_n} \omega_1^{\beta_1-\rho_1} \omega_2^{\beta_2-\rho_2} \dots \omega_n^{\beta_n-\rho_n} \frac{\partial^{\rho_1+\dots+\rho_n} \overline{\varphi}}{\partial x_1^{\rho_1} \dots \partial x_n^{\rho_n}} \\ &= \sum_{\rho} \frac{1}{\rho_1! \rho_2! \dots \rho_n!} \frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_n} (\omega_1^{\beta_1} \omega_2^{\beta_2} \dots \omega_n^{\beta_n})}{\partial \omega_1^{\rho_1} \partial \omega_2^{\rho_2} \dots \partial \omega_n^{\rho_n}} \\ &\quad \times \frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_n} \overline{\varphi}}{\partial x_1^{\rho_1} \dots \partial x_n^{\rho_n}}. \end{aligned}$$

Si d'ailleurs un des  $\rho$  était supérieur au  $\beta$  de même indice, le terme correspondant s'annulerait de lui-même; on peut donc étendre le signe  $\Sigma$  à tous les systèmes de valeurs positives (ou nulles) des  $\rho$ .

Si  $\overline{\psi} = \Sigma b_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \omega_1^{\beta_1} \omega_2^{\beta_2} \dots \omega_n^{\beta_n}$ , il suffira, pour obtenir l'expression de  $\overline{\psi(\varphi)}$  de multiplier par  $b_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}$  le premier et le dernier membre de l'équation (1)' et de faire la somme de toutes les expressions analogues.

D'où la formule simple :

$$(2) \quad \overline{\psi(\varphi)} = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho_1! \rho_2! \dots \rho_n!} \frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_n} \overline{\psi}}{\partial \omega_1^{\rho_1} \partial \omega_2^{\rho_2} \dots \partial \omega_n^{\rho_n}} \frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_n} \overline{\varphi}}{\partial x_1^{\rho_1} \partial x_2^{\rho_2} \dots \partial x_n^{\rho_n}}.$$

2. Considérons maintenant un système quelconque d'équations aux dérivées partielles à une inconnue, *linéaire* sans seconds membres. On peut déduire de ces équations, par dérivations, multiplications par fonctions des variables, et additions, une infinité d'équations (E) conséquences du système (1).

Considérons l'ensemble des termes d'ordre le plus élevé de l'une quelconque de ces équations; cet ensemble  $X(u)$  correspond à un certain polynôme homogène en  $\omega$ ,  $\overline{X}$ . Il est clair que toutes ces formes  $\overline{X}$  constituent un module. C'est un module (2) de formes

(1) Les équations données sont bien entendu comprises dans les (E).

(2) On dit qu'un système de formes en  $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ , à coefficients fonctions de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  constitue un module si, quelles que soient les formes  $F_1, F_2, \dots, F_k$  du système, toute forme  $A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_k F_k$  où les  $A$  sont des formes en  $\omega$  à coefficients fonctions de  $x$ , fait aussi partie du système.

en  $\omega$ , dont les coefficients sont des fonctions des  $x$ . Mais ce n'est pas un module quelconque de cette espèce. Nous allons démontrer en effet que si  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{\Psi}$  sont deux formes quelconques du module la forme

$$\sum \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_i} \right)$$

appartient au module.

$\Phi$  est l'ensemble des termes d'ordre le plus élevé  $p$  d'une certaine expression différentielle linéaire  $\varphi$  déduite par dérivations, multiplications par fonctions des  $x$ , additions, des premiers membres des équations données. On en peut dire autant en remplaçant respectivement  $\Phi$ ,  $\varphi$ ,  $p$  dans la phrase précédente par  $\Psi$ ,  $\psi$ ,  $q$ .

L'équation  $\psi(\varphi) - \varphi(\psi) = 0$  fait nécessairement partie des équations (E). Il est clair que cette équation est au plus d'ordre  $p + q - 1$ . L'ensemble des termes d'ordre  $p + q - 1$  de  $\overline{\psi(\varphi)}$  est d'ailleurs le même d'après la formule (2) que l'ensemble des termes d'ordre  $p + q - 1$  de

$$\bar{\psi} \bar{\varphi} + \sum \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}$$

et par suite l'ensemble des termes d'ordre  $p + q - 1$  de  $\overline{\psi(\varphi) - \varphi(\psi)}$  est le même que celui des termes d'ordre  $p + q - 1$  de

$$\sum \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i} \right),$$

mais  $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i}$  est d'ordre  $q - 1$ ,  $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \omega_i}$  d'ordre  $p$ .

L'ensemble des termes d'ordre  $p + q - 1$  de  $\overline{\psi(\varphi) - \varphi(\psi)}$  est donc

$$\sum \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_i} \right).$$

Cela suffit à établir la proposition annoncée.

Cette démonstration est à rapprocher de celle qui a permis à M. Günther de prouver que le système d'équations du premier ordre, auquel doivent satisfaire les multiplicités caractéristiques à  $n - 1$  dimensions d'un système d'équations aux dérivées partielles quelconque, est, en général, complètement intégrable.