

BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉD. LUCAS

Formules fondamentales de géométrie trirculaire et tétrasphérique

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 136-143

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__136_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__136_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire
et tétrasphérique; par M. Éd. LUCAS.*

(Séance du 2 mai 1877.)

1. NOTATIONS. — Nous désignerons par :

- r_i le rayon d'un cercle ou d'une sphère de centre O_i ;
- d_{ij} la distance des centres O_i et O_j de deux cercles, ou de deux sphères;
- a_{ij} le cosinus de l'angle des deux cercles ou des deux sphères O_i et O_j ;
- r_{ij} le rayon du cercle ou de la sphère qui coupe orthogonalement les deux cercles ou les deux sphères O_i et O_j et la ligne de leurs centres;
- s_{ijk} l'aire du triangle des centres O_i , O_j et O_k de trois cercles d'un plan ou de trois sphères;
- r_{ijk} le rayon du cercle orthogonal aux trois cercles d'un plan ou de la sphère orthogonale à trois sphères et au plan de leurs centres;
- v_{ijkl} le volume du tétraèdre formé par les centres de quatre sphères;
- r_{ijkl} le rayon de la sphère orthogonale à quatre sphères;

x , avec l'indice correspondant, la puissance par rapport au cercle d'un point de son plan, ou la puissance par rapport à la sphère d'un point de l'espace.

De plus, nous supposons

$$\begin{aligned}\sin^2 A_{ij} &= \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \\ \sin^2 A_{ijk} &= \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \\ \sin^2 A_{ijkl} &= \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

2. Cela posé, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 2 r_i r_j a_{ij} = r_i^2 + r_j^2 - d_{ij}^2, \\ (2) \quad & (r_{ij} d_{ij})^2 + (r_i r_j \sin A_{ij})^2 = 0, \\ (3) \quad & (1.2 r_{ijk} s_{ijk})^2 + (r_i r_j r_k \sin A_{ijk})^2 = 0, \\ (4) \quad & (1.2.3 r_{ijkl} v_{ijkl})^2 + (r_i r_j r_k r_l \sin A_{ijkl})^2 = 0.\end{aligned}$$

3. On a encore

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & \frac{1}{r_j} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_{ij}^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{1}{r_k} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_{ijk}^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$7) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \frac{1}{r_k} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \frac{1}{r_l} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_l} & \frac{1}{r_{ijkl}} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces formules permettent de *déterminer* par comparaison, avec les précédentes (2), (3) et (4), *la longueur de la distance, l'aire du triangle ou le volume du tétraèdre formé par les centres de deux, trois ou quatre sphères dont on donne les rayons et les angles.*

On a ainsi

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & \frac{1}{r_j} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{d_{ij}}{r_i r_j} \right)^2,$$

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{1}{r_k} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{2s_{ijk}}{r_i r_j r_k} \right)^2,$$

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \frac{1}{r_k} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \frac{1}{r_l} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_l} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot v_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l} \right)^2.$$

4. On a, entre les cosinus des angles de cinq sphères quelconques de l'espace, la relation

$$(11) \quad \sin^2 A_{ijklm} = 0;$$

on a d'ailleurs une formule analogue pour les cercles d'un plan.

Les puissances d'un point par rapport à quatre cercles O_1, O_2, O_3 et O_4 sont liées par la formule

$$(12) \quad x_i s_{jkl} - x_j s_{kli} + x_k s_{lij} - x_l s_{ijk} = K,$$

dans laquelle le second membre est constant; on a, de même, pour les puissances d'un point par rapport à cinq sphères quelconques,

$$(13) \quad x_i v_{jklm} - x_j v_{klmi} + x_k v_{lmij} - x_l v_{mijk} + x_m v_{ijkl} = K.$$

Lorsque les quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, ou lorsque les cinq sphères sont orthogonales à une même sphère, le second membre des équations précédentes est nul.

5. Désignons par ξ_{ij} la distance du centre radical de trois cercles O_i, O_j et O_k à la droite des centres O_i et O_j , et par ξ_{ijk} la distance du centre radical de quatre sphères O_i, O_j, O_k et O_l au plan des trois centres O_i, O_j et O_k ; on a, pour le calcul de ces distances, les formules

$$(14) \quad (d_{ij} \xi_{ij})^2 = (r_i r_j \sin A_{ij})^2 + (d_{ij} r_{ijk})^2,$$

ou encore

$$(15) \quad \xi_{ij}^2 = r_{ijk}^2 - r_{ij}^2;$$

et, dans l'espace,

$$(16) \quad (s_{ijk} \xi_{ijk})^2 = (2 r_i r_j r_k \sin A_{ijk})^2 + (d_{ijk} r_{ijkl})^2,$$

ou encore

$$(17) \quad \xi_{ijk}^2 = r_{ijkl}^2 - r_{ijk}^2.$$

6. On a pour l'équation linéaire du cercle orthogonal à trois cercles O_i, O_j, O_k , ou de la sphère orthogonale à trois sphères et au plan de leurs centres

$$(18) \quad x_{ijk} = \frac{1}{2 s_{ijk}} (x_i d_{jk} \xi_{jk} + x_j d_{ki} \xi_{ki} + x_k d_{ij} \xi_{ij}) + 2 r_{ijk}^2;$$

de même, pour l'équation de la sphère orthogonale à quatre sphères

$$(19) \quad x_{ijkl} = \frac{1}{3v_{ijkl}} (x_i d_{jkl} \xi_{jkl} + x_j d_{kli} \xi_{kli} + x_k d_{lij} \xi_{lij} + x_l d_{ikl} \xi_{ikl}) + 2 r_{ijk}^2$$

On obtient encore les équations homogènes et quadratiques du cercle orthogonal à trois cercles, ou de la sphère orthogonale à quatre sphères, par les formules suivantes :

$$(20) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{x_k}{r_k} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & \left(\frac{x_{ijk}}{r_{ijk}} \right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(21) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \frac{x_k}{r_k} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \frac{x_l}{r_l} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & \frac{x_l}{r_l} & \left(\frac{x_{ijkl}}{r_{ijkl}} \right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On aurait de même l'équation linéaire et l'équation quadratique homogène du cercle ou de la sphère orthogonale à deux cercles ou à deux sphères et à la ligne de leurs centres.

Il existe entre les puissances d'un point par rapport à trois cercles quelconques la relation fondamentale

$$(22) \quad \begin{vmatrix} x_i + x_i + 2a_{ii}r_i r_i & x_i + x_j + 2a_{ij}r_i r_j & x_i + x_k + 2a_{ik}r_i r_k \\ x_j + x_i + 2a_{ji}r_j r_i & x_j + x_j + 2a_{jj}r_j r_j & x_j + x_k + 2a_{jk}r_j r_k \\ x_k + x_i + 2a_{ki}r_k r_i & x_k + x_j + 2a_{kj}r_k r_j & x_k + x_k + 2a_{kk}r_k r_k \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est du second degré; il en existe une analogue

pour les puissances d'un point par rapport à quatre sphères; on a plus simplement pour les puissances par rapport à deux cercles, d'un point de la ligne des centres,

$$(12) \quad \begin{vmatrix} x_i + x_i + 2a_{ii}r_i r_i & x_i + x_j + 2a_{ij}r_i r_j \\ x_j + x_i + 2a_{ji}r_j r_j & x_i + x_j + 2a_{jj}r_j r_j \end{vmatrix} = 0.$$

7. L'ensemble de deux cercles ou de deux sphères réciproques par rapport au cercle ou à la sphère O_{ijk} a pour équation

$$(24) \quad \frac{2s_{ijk}}{r_i r_j r_k} x_{ijk} \pm \left(\frac{p_i x_i}{r_i} + \frac{p_j x_j}{r_j} + \frac{p_k x_k}{r_k} \right) = 0,$$

ou, en tirant x_{ijk} de la formule (20),

$$(25) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{x_k}{r_k} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{p_i x_i}{r_i} + \frac{p_j x_j}{r_j} + \frac{p_k x_k}{r_k} \right)^2.$$

On obtient, pour déterminer les rayons ρ de ces deux cercles, la formule

$$(26) \quad \rho \left(\frac{p_i \sin A_{jk}}{r_i} + \frac{p_j \sin A_{ki}}{r_j} + \frac{p_k \sin A_{ij}}{r_k} \pm \frac{2s_{ijk}}{r_i r_j r_k} \right) = \sqrt{\Delta},$$

en supposant

$$(27) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{p_i \sin A_{jk}}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{p_j \sin A_{ki}}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{p_k \sin A_{ij}}{r_k} \\ \frac{p_i \sin A_{jk}}{r_i} & \frac{p_j \sin A_{ki}}{r_j} & \frac{p_k \sin A_{ij}}{r_k} & -1 \end{vmatrix}.$$

On obtiendra de même les équations et les rayons de deux sphères

réiproques par rapport à la sphère orthogonale à quatre sphères données.

8. En déterminant les coefficients p_i , de telle sorte que l'ensemble des cercles ou des sphères réiproques passe par les points d'intersection des trois cercles ou des quatre sphères, on a pour le système des huit cercles passant par trois des six points d'intersection de trois cercles donnés l'équation

$$(28) \quad \frac{2S_{ijk}}{r_i r_j r_k} x_{ijk} \pm \left(\frac{x_i}{r_i} \sin A_{jk} \pm \frac{x_j}{r_j} \sin A_{ki} \pm \frac{x_k}{r_k} \sin A_{ij} \right) = 0.$$

Cette équation devient du *seizième* degré en coordonnées cartésiennes, après la disparition des doubles signes. L'équation précédente peut s'écrire encore

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_i}{x_i} [\cos(A_{ij} \pm A_{ik}) - \cos A_{jk}] \\ + \frac{r_j}{x_j} [\cos(A_{ji} \pm A_{jk}) - \cos A_{ki}] \\ + \frac{r_k}{x_k} [\cos(A_{kj} \pm A_{ki}) - \cos A_{ij}] = 0. \end{array} \right.$$

L'ensemble du système de deux cercles réiproques, défini par la règle des signes, a pour équation

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i x_j x_k \sin \frac{A_{ki} + A_{ij} - A_{jk}}{2} + r_j x_k x_i \sin \frac{A_{ij} + A_{jk} - A_{ki}}{2} \\ + r_k x_i x_j \sin \frac{A_{jk} + A_{ki} - A_{ij}}{2} = 0. \end{array} \right.$$

Les rayons ρ de ces deux cercles sont fournis par la formule

$$(31) \quad \frac{2}{\rho} \sin \frac{A_{jk} + A_{ki} + A_{ij}}{2} = \frac{\sin A_{jk}}{r_i} + \frac{\sin A_{ki}}{r_j} + \frac{\sin A_{ij}}{r_k} \pm \frac{2S_{ijk}}{r_i r_j r_k}.$$

Il est facile d'appliquer ces résultats au système de quatre sphères ou *tétrasphère*. L'ensemble des seize sphères circonscrites à la tétrasphère est donné par l'équation

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6V_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l} X_{ijkl} \\ \pm \left(\frac{x_i}{r_i} \sin A_{jkl} \pm \frac{x_j}{r_j} \sin A_{kli} \pm \frac{x_k}{r_k} \sin A_{lji} \pm \frac{x_l}{r_l} \sin A_{ijk} \right) = 0. \end{array} \right.$$

qui devient du *trente-deuxième* degré en coordonnées cartésiennes.

Les rayons ρ des sphères circonscrites sont donnés par la formule

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\rho} \sin \frac{A_{jkl} + A_{kli} + A_{lij} + A_{ijk}}{2} \\ & = \frac{\sin A_{jkl}}{r_i} + \frac{\sin A_{kli}}{r_j} + \frac{\sin A_{lij}}{r_k} + \frac{\sin A_{ijk}}{r_l} \pm \frac{6V_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l}. \end{aligned} \right.$$

La formule (31) conduit immédiatement à ce théorème :

THÉOREME. — *La somme des inverses des rayons des cercles passant par trois des six points d'intersection de trois cercles orthogonaux deux à deux est nulle.*

9. Par des considérations analogues aux précédentes, on obtient l'équation du système des huit cercles tangents à trois cercles donnés et des seize sphères tangentes à quatre sphères données. On a, dans ce dernier cas,

$$(34) \quad \left| \begin{array}{ccccc} 0 & \sin^2 \frac{A_{ij}}{2} & \sin^2 \frac{A_{ik}}{2} & \sin^2 \frac{A_{il}}{2} & \frac{x_i}{r_i} \\ \sin^2 \frac{A_{ji}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{jk}}{2} & \sin^2 \frac{A_{jl}}{2} & \frac{x_j}{r_j} \\ \sin^2 \frac{A_{ki}}{2} & \sin^2 \frac{A_{kj}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{kl}}{2} & \frac{x_k}{r_k} \\ \sin^2 \frac{A_{li}}{2} & \sin^2 \frac{A_{lj}}{2} & \sin^2 \frac{A_{lk}}{2} & 0 & \frac{x_l}{r_l} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & \frac{x_l}{r_l} & 0 \end{array} \right| = 0.$$

On trouvera des résultats analogues pour les rayons de ces sphères et pour les équations et les rayons des cercles conjugués au système de trois cercles, et des sphères conjuguées à la tétrasphère.