BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VESSIOT

Contribution à la géométrie conforme. Théorie des surfaces. II

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 39-79

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__39_0>

CONTRIBUTION A LA GÉOMÉTRIE CONFORME. THÉORIE DES SURFACES;

(*Suite et fin*) [1].

PAR M. E. VESSIOT.

V. — LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ ET LA DÉFINITION INTRINSÈQUE DES SURFACES.

27. Il résulte de l'analyse des paragraphes précédents que si l'on se donne en u et v les seules fonctions

$$U = \sqrt{E}(K - H), \qquad V = \sqrt{G}(H - K); \tag{1}$$

on aura ainsi les transformations fondamentales (n° 8)

$$\mathcal{U}f = \frac{1}{U}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \mathcal{V}f = \frac{1}{V}\frac{\partial f}{\partial v}, \tag{2}$$

d'où l'on déduira les invariants (n° 9)

$$I = -\mathcal{U}(\log V), \qquad J = -\mathcal{V}(\log U), \tag{3}$$

qui sont définis par l'identité

$$(\mathcal{U}f, \mathcal{V}f) = I\mathcal{V}f - J\,Uf; \tag{4}$$

puis les invariants (n° 14)

$$I_1 = \mathcal{V}(I) - 2IJ, \qquad J_1 = \mathcal{U}(J) - 2IJ. \tag{5}$$

Il suffira donc de connaître encore les invariants A et B ou, ce qui revient au même, l'invariant θ (n° 16), pour pouvoir écrire les transformations $\mathcal{U}'f$ et $\mathcal{V}'f$ des n^{os} 23 et 23 *bis*. Le pentasphère fondamental Π est alors défini par les équations

$$0 = \overline{\mathcal{U}}f = \mathcal{U}f + \mathcal{U}'f, \qquad 0 = \overline{\mathcal{V}}f = \mathcal{V}f + \mathcal{V}'f, \tag{6}$$

la position initiale de ce pentasphère, pour les valeurs initiales $u = u_0$, $v = v_0$ des variables, demeurant arbitraire.

---

[1] Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. 54, 1926, p. 139-179.

Du pentasphère Π, on déduit le point courant de la surface par la formule (n° 22)

$$\mu_0 = \frac{x_3}{A} - \frac{x_4}{B} + i\frac{x_5}{AB}. \tag{7}$$

Les équations (6) doivent former un système complet, et il reste à étudier les *conditions d'intégrabilité* qui expriment ce fait. En raison de l'identité (4), ces conditions exprimeront l'identité

$$(\overline{\mathfrak{U}}f, \overline{\mathfrak{V}}f) = \mathrm{I}\overline{\mathfrak{V}}f - \mathrm{J}\overline{\mathfrak{U}}f. \tag{8}$$

Rappelons les notations introduites aux n^{os} 22 et 23

$$\mathfrak{U}'f = \sum_{ij} U_{ij}\mathfrak{X}_{ij}f, \qquad \mathfrak{V}'f = \sum_{ij} V_{ij}\mathfrak{X}_{ij}f, \tag{9}$$

$$\mathfrak{X}_{ij}f = x_i\frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{10}$$

Les U_{ij} et V_{ij} sont les *rotations* dont nous avons trouvé les expressions en fonction des invariants ci-dessus rappelés, et de leurs dérivées (n^{os} 22 et 23 *bis*).

En ce qui concerne le pentasphère Π, rappelons encore que x_1 et x_2 sont les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure $v =$ const. et $u =$ const., x_3 et x_4 leurs dérivées relatives à v et u respectivement; et que x_5 est la sphère orthogonale aux quatre précédentes.

Quant à l'intégration du système (6), supposé complet, elle revient à celle d'un *système de Lie* à une seule variable indépendante, dont le groupe associé est le groupe orthogonal à cinq variables.

28. En vertu des identités

$$(\mathfrak{X}_{i,\alpha}, \mathfrak{X}_{\alpha,j}) = \mathfrak{X}_{i,j} \qquad (i, j, \alpha = 1, 2, \ldots, 5),$$

la condition (8) se décompose immédiatement en les dix suivantes

$$\mathfrak{U}(V_{ij}) - \mathfrak{V}(U_{ij}) = \sum_{\alpha=1}^{5} \begin{vmatrix} U_{i\alpha} & U_{j\alpha} \\ V_{i\alpha} & V_{j\alpha} \end{vmatrix} + \mathrm{I}V_{ij} - \mathrm{J}U_{ij}, \tag{11}$$

dont le calcul se fait sans difficulté, puisqu'il n'y a qu'à y porter les valeurs des U_{ij} et V_{ij} données aux n^{os} 23 et 23 *bis*.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(12) \qquad I_2 = 2\mathfrak{V}(I_1) - 4JI_1 + I, \qquad J_2 = 2\mathfrak{U}(J_1) - 4IJ_1 + J,$$

$$(13) \qquad \cos 2\theta = A^2 - B^2 = 2C,$$

tout se réduit aux seules conditions nouvelles

$$(14) \qquad \mathfrak{U}(C) - 2IC - I_2 = 0,$$

$$(14\ bis) \qquad \mathfrak{V}(C) - 2JC + J_2 = 0,$$

D'une manière plus précise, voici ce que donne chacune des combinaisons (i, j). La combinaison (1, 2) donne une identité; (1, 3), (1, 4) et (1, 5) donnent l'équation (14); (2, 3), (2, 4) et (2, 5) donnent (14 *bis*); (3, 5) donne la première des équations (5), et (4, 5) donne l'autre; enfin (3, 4) donne une combinaison des deux équations (5).

On remarquera donc que l'on pourrait, dans ce qui précède, supprimer la définition (5) des invariants I_1 et J_1, puisqu'elle résulte des conditions d'intégrabilité en question.

29. Si l'on applique l'identité (4) à la fonction C, en tenant compte des équations (14) et (14 *bis*), on trouve

$$(15) \qquad (J_1 - I_1)2C = \mathfrak{U}(J_2) + \mathfrak{V}(I_2) - 3IJ_2 - 3JI_2.$$

Si donc $J_1 - I_1$ n'est pas identiquement nul, cette équation donne C, et, par conséquent, θ, A, B sont connus en fonction des invariants dérivés directement de U et V, à savoir I, J, I_1, J_1, I_2, J_2, $\mathfrak{U}(J_2)$, $\mathfrak{V}(I_2)$.

La surface est donc entièrement définie, dans ce cas général (au point de vue conforme), *par les fonctions* U *et* V *de u et v*. Quant à ces fonctions, elles sont seulement assujetties à vérifier les deux équations aux dérivées partielles du cinquième ordre que l'on obtiendrait en portant la valeur de C, tirée de (15), dans les équations (14) et (14 *bis*).

On peut dire que c'est du système de ces deux équations du cinquième ordre que dépend la solution générale du problème qui consiste à trouver les surfaces rapportées à leurs lignes de courbure.

On doit remarquer que, pour une même surface, il est loisible de remplacer u et v par

$$\bar{u} = \varphi(u), \qquad \bar{v} = \psi(v), \tag{16}$$

les fonctions U et V devant devenir alors

$$\bar{U} = \frac{U}{\varphi'(u)}, \qquad \bar{V} = \frac{V}{\psi'(v)}; \tag{17}$$

de sorte que les équations aux dérivées partielles en question doivent rester invariantes par le groupe des transformations (16), (17). En fait, u et v n'y figurent pas explicitement, I et J [donnés par les formules (3)] sont des invariants différentiels du groupe, et $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$ en sont des paramètres différentiels invariants.

30. *Le cas d'exception* $I_1 = J_1$ *correspond aux surfaces isothermiques.* — En effet, l'équation

$$I_1 - J_1 = 0 \tag{18}$$

s'écrit, d'après (5) et (3),

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}(\log U) - \mathfrak{V}\mathfrak{U}(\log V) = 0;$$

ou, à cause de (4),

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\left(\log\frac{U}{V}\right) + J\,\mathfrak{U}(\log V) - I\,\mathfrak{V}(\log V) = 0;$$

et, en faisant de nouveau usage de (3),

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\left(\log\frac{U}{V}\right) - \mathfrak{U}(\log V)\left(\mathfrak{V}\log\frac{U}{V}\right) = 0.$$

De là, en posant

$$\Phi = \mathfrak{V}\left(\log\frac{U}{V}\right),$$

on obtient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \Phi\,\frac{\partial(\log V)}{\partial u}, \qquad \text{ou} \qquad \Phi = V\,\psi(v);$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\log\frac{U}{V}\right) = \psi(v).$$

L'équation (18) exprime donc, en définitive, que le rapport $\frac{U}{V}$ est le quotient d'une fonction de u par une fonction de v. Il en est donc de même, d'après les équations (1), du rapport $\frac{E}{G}$ des coefficients du ds^2 (rapporté aux lignes de courbure). Et cela caractérise les surfaces isothermiques.

Si l'on tient compte de (18), l'équation (15) devient

$$\mathfrak{U}(J_2)+\mathfrak{V}(I_2)-3IJ_2-3JI_2=0. \tag{19}$$

C'est donc là l'équation aux dérivées partielles qui définit les surfaces isothermiques, avec la condition précédente pour le rapport $\frac{U}{V}$. On pourra, du reste, disposer du choix de u et v de manière que ce rapport soit égal à -1, puisque les formules (16), (17) entraînent

$$\frac{\overline{U}}{\overline{V}}=\frac{U}{V}\,\frac{\psi'(v)}{\varphi'(u)}.$$

Si l'on tient compte de $V=-U$, l'équation (19) est une équation du quatrième ordre en U seul. Quant à l'invariant C, il est défini, quand U est connu, par le système, complètement intégrable, des équations (14) et (14 *bis*) et son expression générale dépend alors linéairement d'une constante arbitraire. Chaque solution de (19) fournit donc ∞^1 surfaces isothermiques, distinctes au point de vue conforme.

Calculons l'équation (19). On a ici, avec $V=-U$,

$$I=-\frac{U'_u}{U^2},\qquad J=\frac{U'_v}{U^2},\qquad I_1=J_1=\frac{U''_{uv}}{U^3},$$

$$I_2=-\frac{2}{U^3}\frac{\partial}{\partial v}(U^2I_1)+I,\qquad J_2=\frac{2}{U^3}\frac{\partial}{\partial u}(U^2I_1)+J.$$

Puis

$$\mathfrak{V}(I_2)-3JI_2=\frac{2}{U^4}\frac{\partial^2}{\partial v^2}(U^2I_1)+I_1-IJ,$$

$$\mathfrak{U}(J_2)-3IJ_2=\frac{2}{U^4}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(U^2I_1)+J_1-IJ,$$

$$2(I_1-IJ)=\frac{2UU''_{uv}+2U'_uU'_v}{U^4}=\frac{1}{U^4}\frac{\partial^2(U^2)}{\partial u\,\partial v}.$$

On voit donc que si l'on pose $U^2I_1=D$, c'est-à-dire

$$U''_{uv}=DU, \tag{20}$$

l'équation des surfaces isothermiques (19) s'écrira (¹)

$$\frac{\partial^2 D}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial v^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(U^2)}{\partial u\,\partial v}=0. \tag{21}$$

31. Un autre cas d'exception a été signalé au n° 16; c'est celui où $AB=0$, c'est-à-dire où l'invariant θ est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou à zéro. Nous avons donné, au n° 26, les formules de variation du pentasphère particulier qui correspond au cas $B=0$.

Pour avoir les conditions d'intégrabilité, on n'a qu'à écrire que les transformations prolongées correspondantes

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{U}}f&=\mathfrak{U}f+\mathfrak{U}k\frac{\partial f}{\partial k}+\mathfrak{U}h_1\frac{\partial f}{\partial h_1}+\mathfrak{U}k_1\frac{\partial f}{\partial k_1}+\mathfrak{U}h_2\frac{\partial f}{\partial h_2}+\mathfrak{U}g\frac{\partial f}{\partial g},\\ \overline{\mathfrak{V}}f&=\mathfrak{V}f+\mathfrak{V}k\frac{\partial f}{\partial k}+\mathfrak{V}h_1\frac{\partial f}{\partial h_1}+\mathfrak{V}k_1\frac{\partial f}{\partial k_1}+\mathfrak{V}h_2\frac{\partial f}{\partial h_2}+\mathfrak{V}g\frac{\partial f}{\partial g},\end{aligned}$$

écrites avec les coefficients (51) et (52) (n° 26), satisfont encore à l'identité (4).

Le calcul est sans difficulté, et donne les équations (5) et les équations

$$\mathfrak{V}(I_1)-2I_1J+I=0,\qquad \mathfrak{U}(J_1)-2J_1I=0.$$

Or ce sont celles que l'on obtient en faisant $2C=1$ dans les équations (14) et (14 *bis*).

Les résultats du n° 28 s'appliquent donc à ce cas particulier.

32. On peut se proposer de définir une surface, au point de vue conforme, d'une manière entièrement intrinsèque, et, par conséquent, sans faire appel aux variables indépendantes u, v, qui ne sont définies qu'à une transformation (16) près. Ce seront donc des relations entre les seuls invariants qui définiront la surface.

Si nous supposons par exemple que I et J sont indépendants, on devra se donner, en fonction de I et J, les transformations fon-

---

(¹) Cette équation a été obtenue d'abord par Rothe (*Unterschungen über die Theorie der isothermen Flächen, Thèse*, Berlin, 1897) et retrouvée par Calapso au moyen des formules de Codazzi et de Gauss (*Circolo matematico di Palermo*, t. 17, 1903, p. 275).

damentales en I et J,

$$(22) \qquad \mathfrak{U}f = F_1(I, J)\frac{\partial f}{\partial I} + F(I, J)\frac{\partial f}{\partial J},$$

$$(22\ bis) \qquad \mathfrak{V}f = G(I, J)\frac{\partial f}{\partial I} + G_1(I, J)\frac{\partial f}{\partial J},$$

et cela suffira, puisqu'on aura alors, d'après (5),

$$(23) \qquad I_1 = G - 2IJ, \qquad J_1 = F - 2IJ,$$

et que θ sera alors fourni par les formules des nos 28 et 29, de manière que les équations (6) forment un système complet.

Les quatre fonctions F, G, F_1, G_1 devront satisfaire aux équations aux dérivées partielles du premier ordre obtenues en écrivant que les transformations (22) et (22 *bis*) satisfont à la formule (4), à savoir

$$(24) \qquad \mathfrak{U}(G) - \mathfrak{V}(F_1) = IG - JF_1,$$

$$(24\ bis) \qquad \mathfrak{U}(G_1) - \mathfrak{V}(F) = IG_1 - JF.$$

Elles satisfont aussi aux deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre obtenues par l'élimination de C entre les équations (14), (14 *bis*) et (15) des nos 28 et 29.

En égalant à zéro les symboles (22) et (22 *bis*), on définirait les paramètres v et u des deux familles de lignes de courbure.

Pour une surface isothermique, on aura $G = F$; et, en plus des équations (24) et (24 *bis*), on aura l'équation (19) du n° 30, qui sera du second ordre.

On a donc, dans ces deux cas, comme au n° 28 pour les fonctions U, V, des systèmes d'équations aux dérivées partielles contenant autant d'équations que de fonctions inconnues. Il est clair que la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux variables, dans le cas des surfaces quelconques; dans le cas des surfaces isothermiques, l'indétermination du problème est caractérisée par l'équation (21).

33. Les conditions d'intégrabilité trouvées nous permettent d'expliquer ce que nous avons indiqué aux nos 9 et 16 sur le nombre et l'indépendance des invariants.

Le groupe conforme étant à dix paramètres, et le nombre des dérivées d'une fonction $z = f(x, y)$ étant $n + 1$ pour l'ordre n, il résulte de la théorie des invariants de Lie que le nombre des invariants d'ordre effectif n est $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 8$. Nous avons trouvé, conformément à ce résultat, les deux invariants I et J du troisième ordre, et cinq invariants du quatrième, à savoir

$$\mathfrak{U}(\mathrm{I}), \quad \mathfrak{V}(\mathrm{I}), \quad \mathfrak{U}(\mathrm{J}), \quad \mathfrak{V}(\mathrm{J}) \quad \text{et} \quad \theta.$$

Ces invariants sont indépendants parce que les premières conditions d'intégrabilité trouvées, c'est-à-dire les équations (14) et (14 *bis*), sont du cinquième ordre.

L'application répétée des opérations $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$ donnerait ensuite les huit invariants du cinquième ordre

$$\mathfrak{U}^{(2)}(\mathrm{I}), \quad \mathfrak{U}\mathfrak{V}(\mathrm{I}), \quad \mathfrak{V}^{(2)}(\mathrm{I}), \quad \mathfrak{U}^{(2)}(\mathrm{J}), \quad \mathfrak{U}\mathfrak{V}(\mathrm{J}), \quad \mathfrak{V}^{(2)}(\mathrm{J}), \quad \mathfrak{U}(\theta), \quad \mathfrak{V}(\theta),$$

qui, d'après la théorie de Lie, doivent se réduire à six seulement; c'est ce qui résulte, effectivement, des équations (14) et (14 *bis*).

En vertu de ces équations, il n'y aura lieu, pour le sixième ordre, d'appliquer les opérations $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ (trois fois) qu'à I et J, ce qui donnera huit invariants au lieu de sept. Ces invariants sont effectivement liés par la condition d'intégrabilité (15).

A partir de ce moment, l'application répétée de $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ à I et J fournit pour chaque ordre n nouveau $2(n-2)$ invariants au lieu de $n+1$; et ils sont effectivement liés par les $(n-5)$ relations que l'on déduit de (15) [en tenant compte de (14) et (14 *bis*)] par différentiations successives. Pour $n=6$, on a les deux équations du cinquième ordre en U et V dont il a été parlé au n° 29.

Comme nous avons trouvé les conditions d'intégrabilité nécessaires et suffisantes, les invariants que l'on obtient par le procédé précédent sont les invariants fondamentaux de chaque ordre.

L'expression d'un invariant, supposé connu, en fonction de ces invariants fondamentaux s'obtiendra par l'application répétée des formules de variation du pentasphère II, qui, en vertu de la formule

$$\mu_0 = \frac{h_2}{\mathrm{A}} - \frac{k_2}{\mathrm{B}} + \frac{il}{\mathrm{AB}},$$

fourniront toutes les dérivées de μ_0 en fonction de U, V de U'_u, U''_{u^2}, ..., de V'_v, V''_{v^2}, ... et des invariants fondamentaux ([1]). En portant les dérivées dans l'invariant donné, les éléments U, V, U'_u, ..., V'_v, ... disparaîtront d'eux-mêmes.

En effet, l'expression réduite obtenue par ce calcul reste un invariant si l'on y remplace par des constantes arbitraires les invariants mis en évidence; mais, d'après la loi de formation des invariants fondamentaux, aucun invariant ne s'exprime en fonction des seuls éléments en question : ils doivent donc disparaître tous.

34. Voici quelques classes particulières de surfaces pour lesquelles les invariants sont liés par des relations simples :

1° L'équation $\mathfrak{U}h = I\mu_0$ montre que $I = 0$ exprime que la sphère h ne dépend que de v. Donc $IJ = 0$ est la condition pour que la surface soit *surface canal;* et $I = 0$, $J = 0$ est le système de conditions qui définit les *cyclides de Dupin* (et leurs cas particuliers : cônes de révolution et tores) ([2]).

2° L'équation $\mathfrak{U}h_1 = I_1\mu_0$ montre de même que $I_1 = 0$ exprime que la sphère h_1 ne dépend que de v; elle coupe alors la surface à angle droit le long d'une ligne de courbure $v =$ const. Donc $I_1 J_1 = 0$ caractérise les trajectoires orthogonales d'une famille de sphères.

3° Si l'on suppose $I_1 = 0$, $J_1 = 0$, on conclut de (3)

$$\mathfrak{V}(I) = \mathfrak{U}(J) = 2IJ; \tag{25}$$

On a ensuite, par (12), $I_2 = I$, $J_2 = J$; et la condition (15) donne

$$\mathfrak{U}(J) + \mathfrak{V}(I) - 6IJ = 0.$$

([1]) On se servira, pour éliminer toutes les autres dérivées de U et de V, des formules

$$U'_u = -UVJ, \qquad V'_v = -UVI.$$

([2]) On peut alors ramener $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ à $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$, c'est-à-dire supposer $U = 1$, $V = 1$; l'intégration des équations de variation du pentasphère Π conduit alors, pour μ_0, aux coordonnées

$$\mu_1 = \frac{1}{A}\cos(vA), \qquad \mu_2 = \frac{1}{A}\sin(vA), \qquad \mu_3 = \frac{1}{B}\cos(uB),$$
$$\mu_4 = \frac{1}{B}\sin(uB), \qquad \mu_5 = \frac{i}{AB},$$

A et B étant des constantes telles que $A^2 + B^2 = 1$.

Il faut donc conclure $IJ = 0$, et le cas est celui d'une *surface canal isothermique*. Car, si l'on suppose, inversement, $I = 0$, $I_1 = J_1$, on conclut de (3) que $I_1 = J_1 = 0$.

Supposons donc $I_1 = J_1 = I = 0$. Il résulte alors de (25) que J est fonction de v seul; et il en est de même de V, à cause de $0 = I = -\frac{V'_u}{UV}$. On peut alors en remplaçant v par une fonction de v ramener $\mathcal{V}f = \frac{1}{V}\frac{\partial f}{\partial v}$ à la forme $\frac{\partial f}{\partial v}$; c'est-à-dire qu'on peut supposer $V = 1$. La condition que $J = -\frac{U'_v}{UV}$ soit fonction de v indique alors que U est le produit d'une fonction de u par une fonction de v; et, en remplaçant u par une fonction de u, convenablement choisie, on peut ramener $\mathcal{U}f = \frac{1}{U}\frac{\partial f}{\partial v}$ à la forme $\varphi(v)\cdot\frac{\partial f}{\partial u}$; c'est-à-dire qu'on peut supposer $U = \frac{1}{\varphi(v)}$, $J = \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}$.

Cela fait, les équations (14) et (14 *bis*) donnent, pour $C = \frac{\cos 2\theta}{2}$,

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial v} = (2C - 1)\frac{\varphi'}{\varphi}, \tag{26}$$

ce qui donne $\sin\theta = \alpha\varphi(v)$, α étant une constante.

Dès lors, V_0 et V_2 prennent la valeur zéro dans les formules du n° 23 *bis*; et les équations de variation du pentasphère Π (n°s 23 et 23 *bis*) donnent, en particulier,

$$\frac{\partial k_1}{\partial u} = \alpha k_2, \qquad \frac{\partial k_2}{\partial u} = -\alpha k_1, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial k_2}{\partial v} = 0.$$

On en conclut que k_1 est de la forme

$$k_1 = a\cos(\alpha u) + b\sin(\alpha u),$$

a et b étant des vecteurs fixes; les sphères k_1 forment donc un faisceau, et la surface est engendrée par ∞^1 cercles normaux à toutes ces sphères. C'est, dès lors, une transformée par inversion d'une *surface de révolution;* et il est clair qu'une telle surface satisfait toujours à la question.

4° L'analyse qui précède a exclu, implicitement, le cas $C = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $B = 0$; il correspondrait du reste à la valeur $\alpha = 0$ de la constante d'intégration des équations (26). Il faut alors recourir aux équations (51) et (52) du n° 26; on en conclut

$$\mathfrak{U}^{(2)} k_1 = 0, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial v} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad k_1 = au + b,$$

a et b étant des vecteurs constants. La condition $k_1^2 = 1$ donne, de plus, $a^2 = 0$, $ab = 0$. Les sphères k_1 forment, de nouveau, un faisceau; mais sont tangentes à la sphère b au point fixe a de cette sphère. En prenant ce point pour pôle d'inversion, on voit que la surface, trajectoire orthogonale de ces sphères, devient un *cylindre*. Il est clair que les cylindres et leurs transformées par inversion répondent effectivement à la question.

5° Les surfaces dont *une famille de lignes de courbure est formée de courbes sphériques* sont faciles à caractériser. Supposons qu'il s'agisse des courbes $v = \text{const.}$; la sphère qui contient une de ces courbes appartient, pour chaque point de la courbe, au faisceau (h, h_1) et coupe la surface suivant un angle, constant le long de la courbe, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$s = h \cos\omega + h_1 \sin\omega,$$

ω étant fonction de v. Comme cette sphère ne dépend pas de u, on a

$$0 = \mathfrak{U} s = \mathfrak{U} h \cos\omega + \mathfrak{U} h_1 \sin\omega,$$

d'où, d'après les équations (7) et (9) du n° 22,

$$\mathrm{I} \cos\omega + \mathrm{I}_1 \sin\omega = 0.$$

La condition est donc que le rapport $\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}}$ ne dépende que de v; ou que le rapport $\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{J}}$ ne dépende que de u, s'il s'agit de l'autre famille de lignes de courbure.

Si les deux conditions sont réalisées à la fois, la surface a ses *lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes*.

35. Supposons que l'on ait, à la fois, $\mathrm{I} = \text{const.}$, $\mathrm{J} = \text{const.}$ On conclura de (5), $\mathrm{I}_1 = \mathrm{J}_1 = -2\mathrm{IJ}$; puis, de (12), $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}(8\mathrm{J}^2 + 1)$, $\mathrm{J}_2 = \mathrm{J}(8\mathrm{I}^2 + 1)$. L'équation (15) donne donc

$$\mathrm{IJ}(8\mathrm{I}^2 + 8\mathrm{J}^2 + 2) = 0, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{IJ} = 0.$$

L'hypothèse conduit donc à une surface canal isothermique, cas examiné plus haut.

Si l'on exclut ce cas, on voit que l'un au moins des invariants I, J peut être considéré comme variable indépendante. En dehors du cas général envisagé au n° 32, il resterait donc à étudier le cas où I et J sont fonctions l'un de l'autre. Si l'on se donne la relation liant I à J, on adjoint au système des deux équations fondamentales du cinquième ordre en U et V (n° 29) une équation du premier ordre; et il faudrait examiner si le système ainsi constitué sera compatible pour toute forme de la relation donnée $F(I, J) = 0$.

Je me bornerai à examiner le cas des surfaces isothermiques qui se présente plus simplement. Prenant alors $V = -U$, comme au n° 30, et posant

$$W = \frac{1}{U} = -\frac{1}{V}, \tag{27}$$

on voit que $W'_u = I$ doit être fonction de $W'_v = -J$. En introduisant la variable auxiliaire $I = t$, on aura donc

$$W = tu - \varphi(t)v - \psi(t), \qquad u = \varphi'(t)v + \psi'(t). \tag{28}$$

En formant alors l'équation de Calapso [équation (21) du n° 30] on est conduit à un système d'équations différentielles ordinaires en t, φ, ψ.

Laissant de côté l'étude générale de ce système, je me limite au cas où l'invariant $I_1 = J_1$ est aussi fonction de I. On trouve sans difficulté

$$I_1 = -\frac{(t\varphi' - \varphi)v + (t\psi' - \psi)}{\varphi'' v + \psi''} - 2t\varphi,$$

et l'on a seulement à écrire que cette expression ne dépend pas de v, ce qui donne

$$\frac{\frac{d}{dt}(t\varphi' - \varphi)}{(t\varphi' - \varphi)} = \frac{\frac{d}{dt}(t\psi' - \psi)}{t\psi' - \psi},$$

d'où, α étant une constante,

$$t(\varphi'\alpha - \psi') = \varphi\alpha - \psi;$$

et, β étant une nouvelle constante,

$$\varphi\alpha - \psi = \beta t. \tag{29}$$

Les formules (28) donnent alors

$$W = (v + \alpha)(t\varphi' - \varphi), \qquad u - \beta = (v + \alpha)\varphi';$$

de sorte que, par le changement de u en $u + \beta$ et de v en $v - \alpha$, on peut caractériser le cas considéré par le fait que la fonction ψ est identiquement nulle. Ayant ainsi

$$W = tu - \varphi(t)v, \qquad u = \varphi'(t)v,$$

on conclut que la forme générale de W est alors

$$W = v\Phi\left(\frac{u}{v}\right),$$

c'est-à-dire que W est homogène de degré 1 en u et v; et $U = -V$ est homogène de degré (-1), soit

$$U = \frac{1}{u}\Psi\left(\frac{u}{v}\right). \tag{29}$$

36. En portant l'expression (29) de U dans l'équation de Calapso, on obtiendrait une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre[1] pour déterminer Ψ en fonction de son argument $\frac{u}{v}$. Il est plus avantageux de revenir aux équations (14) et (14 *bis*) du n° 28.

Je fais d'abord le changement de variables

$$u = e^{-2\bar{u}}, \qquad v = e^{\bar{v}}, \tag{30}$$

qui ramène $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ à la forme

$$\mathfrak{U}f = -\frac{1}{2}e^{2(\bar{u}+\bar{v})}\Phi\left[e^{-2(\bar{u}+\bar{v})}\right]\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}, \qquad \mathfrak{V}f = -\frac{1}{2}\Phi\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}.$$

En posant ensuite

$$\omega = \bar{u} + \bar{v}, \qquad \Omega(\omega) = -\frac{2}{e^{\omega}\Phi(e^{-2\omega})}, \tag{31}$$

et supprimant les traits, pour simplifier l'écriture, on a

$$\omega = u + v, \qquad \mathfrak{U}f = \frac{e^{\omega}}{\Omega}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \mathfrak{V}f = \frac{e^{-\omega}}{\Omega}\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{32}$$

---

[1] Si l'on pose $\frac{u}{v} = w$, cette équation est

$$12\,w^3\frac{\Psi''}{\Psi} + 2w^2(1 + 4w^2)\left(\frac{\Psi''}{\Psi}\right)' + w^3(1 + w^2)\left(\frac{\Psi''}{\Psi}\right)'' = \frac{1}{2}\left[(\Psi^2)' - w(\Psi^2)''\right].$$

On en conclut, sans difficulté,

$$(33)\quad \mathrm{I} = -e^{\omega}\frac{\Omega'+\Omega}{\Omega^2}, \qquad \mathrm{J} = -e^{-\omega}\frac{\Omega'-\Omega}{\Omega^2}, \qquad \mathrm{I}_1 = \mathrm{J}_1 = -\frac{\Omega''-\Omega}{\Omega^3}.$$

Les équations en C du n° 28 donnent alors, en posant

$$(34)\quad \theta = \frac{\Omega''-\Omega}{\Omega} = -\mathrm{I}_1\Omega^2,$$

et effectuant les changements de fonctions classiques

$$(35)\quad 2\mathrm{C}+1 = \frac{\mathrm{M}}{\Omega^2}e^{-2\omega}, \qquad 2\mathrm{C}-1 = \frac{\mathrm{N}}{\Omega^2}e^{2\omega},$$

les conditions

$$(36)\quad \mathrm{M}'_u = -4(\theta'_\omega - 2\theta), \qquad \mathrm{N}'_v = 4(\theta'_\omega + 2\theta).$$

D'après cela, on obtiendrait par deux quadratures M et N sous les formes respectives

$$(37)\quad \mathrm{M} = \mathfrak{M}(\omega) + \mathfrak{M}_1(v), \qquad \mathrm{N} = \mathfrak{N}(\omega) + \mathfrak{N}_1(u).$$

Mais on doit avoir, d'après (35),

$$(38)\quad \mathrm{M}e^{-2\omega} - \mathrm{N}e^{2\omega} = 2\Omega^2,$$

de sorte que $\mathfrak{M}_1(v)e^{-2\omega} - \mathfrak{N}_1(u)e^{2\omega}$ devra être fonction de ω.

On en conclut facilement

$$\frac{\mathfrak{M}'_1}{e^{4v}} = -\frac{\mathfrak{N}'_1}{e^{-4u}} = 4\gamma = \text{const}.$$

Donc

$$\mathfrak{M}_1 = \gamma e^{4v} + \gamma_1, \qquad \mathfrak{N}_1 = \gamma e^{-4u} + \gamma_2.$$

On peut, sans modifier les formules (37), supposer dès lor γ_1 et γ_2 nuls, et l'on a

$$(39)\quad \mathrm{M} = \mathfrak{M}(\omega) + \gamma e^{4v}, \qquad \mathrm{N} = \mathfrak{N}(\omega) + \gamma e^{-4u},$$

avec les conditions

$$(40)\quad \mathfrak{M}' = -4(\theta' - 2\theta), \qquad \mathfrak{N}' = 4(\theta' + 2\theta),$$

$$(41)\quad \mathfrak{M}e^{-2\omega} - \mathfrak{N}e^{2\omega} = 2\Omega^2, \qquad \theta = \frac{\Omega''-\Omega}{\Omega},$$

où ne figure plus que la variable ω.

Reste à déterminer Ω de manière que ces conditions soient compatibles. Remarquons, à cet effet, la combinaison des équations (40)

$$\mathfrak{M}' - \mathfrak{N}' = -8\theta',$$

qui entraîne, α étant une constante,

$$(42) \qquad \mathfrak{M} - \mathfrak{N} = -8(\theta + \alpha).$$

Il suffit, par suite, de tirer $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de (41) et (42) et de porter les valeurs dans la combinaison des équations (40),

$$(43) \qquad \mathfrak{M}' + \mathfrak{N}' = 16\theta.$$

On trouve ainsi l'équation, du troisième ordre en Ω,

$$(44) \qquad 4\,\mathrm{sh}\,2\omega(\theta\,\mathrm{ch}\,2\omega)' + \mathrm{sh}\,2\omega\left(\frac{\Omega^2}{\mathrm{sh}\,2\omega}\right)' = 8(\theta + \alpha).$$

37. Dans le cas qui précède, relatif aux surfaces isothermiques, I, J *et tous les invariants issus de ceux-ci par l'application des opérations* $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ *sont fonctions de* I. Reprenons cette hypothèse sans rien supposer sur la surface. Alors

$$(45) \qquad \mathfrak{U}(\mathrm{I}) = \frac{\mathrm{I}'_u}{\mathrm{U}}, \qquad \mathfrak{V}(\mathrm{I}) = \frac{\mathrm{I}'_v}{\mathrm{V}}$$

sont fonctions de I. Si l'une de ces fonctions est nulle, la seconde par exemple, I est fonction de u seul ainsi que U; J est, par suite, nul, ainsi que I_1 et J_1. On retombe sur les cas 3° et 4° du n° 34 (surfaces de révolution et cylindres).

Supposons donc qu'aucune des fonctions (45) n'est nulle, et posons, par suite,

$$(46) \qquad \mathrm{U} = \frac{\mathrm{I}'_u}{\varphi(\mathrm{I})}, \qquad \mathrm{V} = \frac{\mathrm{I}'_v}{\psi(\mathrm{I})}.$$

La formule (n° 9)

$$\mathrm{I} = -\mathfrak{U}(\log \mathrm{V}) = -\frac{\mathrm{V}'_u}{\mathrm{UV}}$$

donne alors, en y introduisant les valeurs (46), une relation de la forme

$$\mathrm{I}''_{uv} = \mathrm{I}'_u \mathrm{I}'_v\,\chi(\mathrm{I}),$$

qui, par un changement de fonction $\mathrm{I} = \theta(\mathrm{T})$ peut se ramener à la forme $T''_{vu} = 0$. Donc I est de la forme

$$I = f[\lambda(u) + \mu(v)],$$

et, en prenant pour variables nouvelles $\lambda(u)$ et $\mu(v)$ à la place de u et de v respectivement, on voit que I, et par suite U et V [d'après (46)], sont fonctions de $\omega = u + v$. Cela suffit évidemment pour qu'il en soit de même de tous les invariants considérés.

Si la surface n'est pas isothermique, C sera alors également [équation (15), n° 29] fonction de $u + v$. Dans le cas des surfaces isothermiques, cela supposerait que la constante γ du numéro précédent fût nulle, Dans le cas général, U et V, fonctions de ω, seront liées par les deux équations différentielles ordinaires du cinquième ordre qui se déduiront immédiatement des équations aux dérivées partielles du n° 29. Mais ces équations se réduiront ici à une seule; car on pourrait, plus simplement, se donner arbitrairement l'expression de C en ω, et les équations (14) et (14 *bis*) du n° 28 deviendront un système différentiel ordinaire de deux équations du troisième ordre en U et V. La solution générale du problème dépend donc d'une fonction arbitraire de ω et de cinq constantes arbitraires (¹).

38. Le cas que nous venons d'examiner, où l'on ne peut pas trouver deux invariants fondamentaux indépendants (en u et v), n'est pas autre chose que celui des *surfaces qui admettent une transformation infinitésimale conforme* (²).

Reprenons la question à ce point de vue. On peut d'abord supposer que les invariauts sont tous constants. D'après les n°ˢ 35 et 34, c'est le cas de la cyclide de Dupin, qui, avec les notations de la note du n° 34, admet les deux transformations

$$\mu_1 \frac{\partial f}{\partial \mu_2} - \mu_2 \frac{\partial f}{\partial \mu_1}, \qquad \mu_3 \frac{\partial f}{\partial \mu_4} - \mu_4 \frac{\partial f}{\partial \mu_3},$$

qui échangent les points de la surface suivant la loi donnée par $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$. Ce cas sera écarté dans ce qui suit.

(¹) Il y a six constantes d'intégration, mais ω ne figure pas explicitement dans les équations, et l'on ne change pas la surface si l'on ajoute à ω, c'est-à-dire à u et v, une constante.

(²) Ces surfaces ont été déterminées par U. Amaldi (*Atti della reale Acc. dei Lincei*, t. 10, 1901).

Soit (S) une surface qui admet une transformation infinitésimale conforme; celle-ci conserve les lignes de courbure; elle échange donc les points de (S) suivant une loi qui est définie par une transformation infinitésimale de la forme

$$\mathcal{T}f = \mathrm{X}(u)\frac{\partial f}{\partial u} + \mathrm{Y}(v)\frac{\partial f}{\partial v}.$$

En remplaçant u par une fonction de u et v par une fonction de v, on la ramènera à l'un des deux types

$$(47) \qquad \frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Si l'on a affaire au premier type, $\mathcal{T}f = \frac{\partial f}{\partial u}$, U et V sont fonctions de v seul; car $\mathcal{T}f$ doit laisser invariante chacune des transformations $\mathcal{U}f$ et $\mathcal{V}f$. On est donc ramené (*voir* n° 34, 3° et 4°) au cas des surfaces de révolution et des cylindres.

Si l'on a affaire au second type, $\mathcal{T}f = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$, l'invariance de $\mathcal{U}f$ et $\mathcal{V}f$ indique que U et V sont fonctions de $\omega = u + v$, et l'on retombe sur le cas des n^{os} 37 (surfaces générales) et 36 (surfaces isothermiques). Dans ce second cas, il faudra que la constante γ soit nulle, pour que $\mathcal{T}f$ laisse C invariant.

La conclusion du n° 37 s'explique par le fait que pour obtenir une surface répondant à la question, il suffit de prendre une courbe arbitraire sur une sphère fixe, choisie une fois pour toutes, et de lui appliquer les transformations d'un groupe conforme quelconque à un paramètre; ce qui introduit une fonction arbitraire et cinq constantes arbitraires seulement, car il faut tenir compte du fait que la sphère admet ∞^4 transformations conformes.

Quant aux *surfaces isothermiques qui admettent une transformation infinitésimale conforme*, elles sont définies par l'équation (44).

Les résultats connus, sur la déterminatiou des surfaces spirales minima [1], donneraient facilement une solution de cette équation dépendant de deux constantes arbitraires.

---

[1] Darboux, *Théorie des surfaces*, t. 1, 2e édition, p. 359.

VI. — Étude des courbes tracées sur une surface.

39. Pour un déplacement quelconque sur la surface considérée, on a, d'après la définition de $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ [équations (1) et (2), n° **27**],

$$df = \mathfrak{U}f.\,\mathrm{U}\,du + \mathfrak{V}f.\,\mathrm{V}\,dv. \tag{1}$$

On remarquera, en passant, qu'il en résulte que $\mathrm{U}\,du$ et $\mathrm{V}\,dv$ sont des expressions de Pfaff invariantes, et que l'intégrale double

$$\int\int \mathrm{UV}\,du\,dv = -\int\int (\mathrm{H}-\mathrm{K})^2 \sqrt{\mathrm{EG}}\,du\,dv, \tag{2}$$

est un invariant intégral (1).

Je poserai, pour abréger, les notations

$$\varphi = \mathrm{U}\,du, \qquad \psi = \mathrm{V}\,dv, \tag{3}$$

d'où

$$df = \varphi\,\mathfrak{U}f + \psi\,\mathfrak{V}f. \tag{4}$$

Les formules du n° **22** donnent alors

$$dh = \varphi\,\mathrm{I}\,\mu_0 + \psi\,h_1, \qquad dk = \varphi\,k_1 - \psi\,\mathrm{J}\,\mu_0. \tag{5}$$

On en conclut que *les dérivées des sphères de courbure normale principales, prises dans une direction quelconque, sont orthogonales*, car

$$dh\,dk = 0. \tag{6}$$

On a, par suite, [d'après (6), n° **22**],

$$d\mu_0^2 = dh^2 + dk^2, \tag{7}$$

ce qui fournit la *forme quadratique invariante fondamentale*

$$d\mu_0^2 = \varphi^2 + \psi^2 = \mathrm{U}^2\,du^2 + \mathrm{V}^2\,dv^2. \tag{8}$$

Du reste, on aura aussi, d'après (5),

$$d\mu_0 = -\psi\,h_1 + \varphi\,k_1 - (\varphi\,\mathrm{I} + \psi\,\mathrm{J})\,\mu_0. \tag{9}$$

---

(1) Cette intégrale a déjà été introduite par divers auteurs, ainsi que les surfaces pour lesquelles elle est stationnaire (surfaces minima au point de vue conforme). *Voir*, par exemple, Thomsen, *Thèse*, p. 23.

Je poserai encore, pour abréger l'écriture,

$$\chi^2 = \varphi^2 + \psi^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 = d\mu_0^2. \tag{10}$$

La sphère $\frac{1}{\chi} d\mu_0$ est normale au déplacement considéré, et l'angle ω de ce déplacement avec la direction positive de la tangente à la ligne de courbure $v = \text{const.}$, pris avec les conventions de signes classiques, est donné par

$$\cos\omega = \left(\frac{1}{\chi} d\mu_0\right) k_1, \qquad \sin\omega = \left(\frac{1}{\chi} d\mu_0\right) h_1;$$

on a donc

$$\cos\omega = \frac{\varphi}{\chi}, \qquad \sin\omega = -\frac{\psi}{\chi}. \tag{11}$$

Et, par suite, (9) s'écrit

$$\frac{1}{\chi} d\mu_0 = h_1 \sin\omega + k_1 \cos\omega - (I\cos\omega - J\sin\omega)\mu_0. \tag{12}$$

J'écris encore les formules, déduites de celles du n° **22**, qui donnent dh_1 et dk_1,

$$dh_1 = \varphi I_1 \mu_0 + \psi A\, h_2, \qquad dk_1 = \varphi B\, k_2 - \psi J_1\, \mu_0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\chi} dh_1 = I_1 \cos\omega \,.\, \mu_0 - A\sin\omega \,.\, h_2, \qquad \frac{1}{\chi} dk_1 = B\cos\omega \,.\, k_2 + J_1 \sin\omega \,.\, \mu_0. \tag{14}$$

40. Pour une courbe quelconque (C) tracée sur la surface, la *sphère de courbure normale* est de la forme

$$n = Xh + Yk,$$

X, Y étant des coefficients scalaires. La condition $n^2 = 1$ donne, à cause de $h^2 = k^2 = hk = 1$ (n° 7), $(X + Y)^2 = 1$, et l'on orientera la sphère n de manière que $X + Y = 1$, ce qui revient à $nh = 1$, c'est-à-dire à choisir la même règle d'orientation que pour h et k.

Ceci posé, X et Y doivent satisfaire en outre aux conditions de contact : $n\, d\mu_0 = 0$, $n\, d^2\mu_0 = 0$. La première étant réalisée, on peut remplacer la seconde par $dn\, d\mu_0 = 0$, ce qui se réduit, à cause de $h\, d\mu_0 = 0$, $k\, d\mu_0 = 0$, à

$$(X\, dh + Y\, dk)\, d\mu_0 = 0,$$

ou, d'après (5) et (9), à

$$-X\pi^2 + Y\varphi^2 = 0.$$

Donc

$$\frac{X}{\varphi^2} = \frac{Y}{\psi^2} = \frac{X+Y}{\varphi^2+\psi^2} = \frac{1}{\chi^2},$$

c'est-à-dire, d'après (11),

$$X = \cos^2\omega, \qquad Y = \sin^2\omega.$$

On a donc la formule

$$n = h\cos^2\omega + k\sin^2\omega. \tag{13}$$

Nous l'avions, au n° **21**, déduite de la formule d'Euler. Elle redonne ici, inversement, cette formule, si l'on multiplie par le vecteur $2j$ n° (**6**) les deux membres; car on a alors

$$2jn = N = \text{courbure normale},$$

$2jh = H$, $2jk = K$, donc

$$N = H\cos^2\omega + K\sin^2\omega. \tag{14}$$

41. La *sphère de courbure géodésique* de la courbe considérée est de la forme

$$g = h_1\cos\omega - k_1\sin\omega + Z\mu_0,$$

Z étant un coefficient scalaire. Cette formule satisfait à $g^2 = 1$; elle exprime que g fait partie du réseau des sphères normales à la surface au point considéré, qu'elle fait avec h_1 l'angle ω, et avec k_1 l'angle $\omega + \frac{\pi}{2}$. La condition $g\,d\mu_0 = 0$ étant ainsi remplie, comme on le vérifie au moyen de (9), il reste à écrire que $g\,d^2\mu_0 = 0$, ou, ce qui revient au même, que $dg\,d\mu_0 = 0$. Comme on a

$$h_1\,dh_1 = k_1\,dk_1 = h_1\,dk_1 = k_1\,dh_1 = \mu_0^2 = \mu_0\,d\mu_0 = 0,$$

cette condition s'écrit simplement

$$Z\chi - d\omega - (I\cos\omega - J\sin\omega)(\psi A\,\mu_0 h_2\cos\omega - \varphi B\,\mu_0 k_2\sin\omega) = 0.$$

Or, d'après (11), n° **22**, $\mu_0 h_2 = \frac{1}{A}$, $\mu_0 k_2 = -\frac{1}{B}$, et il reste

$$Z\chi - d\omega = 0.$$

Donc

$$g = h_1 \cos\omega - k_1 \sin\omega + \mu_0 \frac{d\omega}{\chi} \tag{15}$$

ou

$$\chi g = h_1 \varphi + k_1 \psi + \mu_0 d\omega; \tag{15 bis}$$

on a, de plus,

$$d\omega = -d \operatorname{arc tang} \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi}{\chi^2}.$$

En multipliant les deux membres de (15) par le vecteur $2j$, on obtient, pour la *courbure géodésique* Γ, la formule

$$\Gamma = \mathrm{H}_1 \cos\omega - \mathrm{K}_1 \sin\omega + \frac{d\omega}{ds}, \tag{16}$$

où l'on a réintroduit l'arc de la courbe. Car, d'après (10), n° 7,

$$2j\mu_0 = (\mathrm{K} - \mathrm{H})\, 2j\mu = \mathrm{K} - \mathrm{H}$$

et $\chi^2 = d\mu_0^2$ est égal à

$$(\mathrm{K} - \mathrm{H})^2 d\mu^2 = (\mathrm{K} - \mathrm{H})^2 ds^2.$$

Si l'on pose, de plus, comme au n° 1,

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2,$$

on a, d'après (15) du n° 3,

$$\mathrm{H}_1 \cos\omega = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}} \frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} \frac{du}{ds}, \qquad \mathrm{K}_1 \sin\omega = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}} \frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} \frac{dv}{ds},$$

et l'on retombe sur la formule classique [1].

On remarquera que, dans (15), le rapport $\frac{\mu_0}{\chi}$ est égal au rapport $\frac{\mu}{\sqrt{d\mu^2}}$, où μ est un vecteur quelconque représentant le point de la surface. Nous avons donc la formule, indépendante de tout choix particulier du vecteur qui représente le point courant,

$$g = h_1 \cos\omega - k_1 \sin\omega + \mu \frac{d\omega}{\sqrt{d\mu^2}}. \tag{15 ter}$$

---

[1] *Voir*, par exemple, DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, 1re édition, p. 354 et 386.

42. On retrouve bien facilement la formule d'Ossian Bonnet sur la torsion géodésique, Θ, en se servant de la propriété

$$\Theta\, ds = g\, dn,$$

que j'ai établie dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, nouvelle série, t. **2**, 1923, p. 164).

Nous avons, en effet, g étant orthogonal à h et k,

$$g\, dn = \cos^2\omega.(g\, dh) + \sin^2\omega.(g\, dk).$$

Or, d'après (5),

$$dh = \chi(\mathrm{I}\cos\omega.\,\mu_0 - h_1\sin\omega), \qquad dk = \chi(k_1\cos\omega + \mathrm{J}\sin\omega.\,\mu_0);$$

d'où, d'après (15),

$$g\, dh = -\chi\sin\omega\cos\omega, \qquad g\, dk = -\chi\sin\omega\cos\omega.$$

On a donc aussi

$$(17) \qquad gdn = -\chi\sin\omega\cos\omega,$$

d'où

$$\Theta\, ds = g\, dn = -\chi\sin\omega\cos\omega = (\mathrm{H}-\mathrm{K})\sin\omega\cos\omega\, ds,$$

ce qui donne la *formule de Bonnet*

$$(18) \qquad \Theta = (\mathrm{H}-\mathrm{K})\sin\omega\cos\omega.$$

On trouve, du reste, sans difficulté, comme application des formules des numéros précédents,

$$(19) \qquad \frac{1}{\chi}dn = \left(\mathrm{I}\cos 3\omega + \mathrm{J}\sin^3\omega + 3\sin\omega\cos\omega.\frac{d\omega}{\chi}\right)\mu_0 - \sin\omega\cos\omega\, g,$$

d'où la formule (17), et aussi la formule

$$(20) \qquad \frac{dn^2}{d\mu_0^2} = \sin^2\omega\cos^2\omega,$$

qui résulterait immédiatement du fait que $(g\, dn)^2 = dn^2$ (Mémoire cité ci-dessus, p. 164).

43. Je passe à la recherche de la *sphère osculatrice* à la courbe considérée; elle est de la forme

$$(21) \qquad r = -g \sin\alpha + n \cos\alpha,$$

α étant l'angle sous lequel elle coupe la surface. Cet angle α sera déterminé par la condition $r\, d^3 \mu_0 = 0$, c'est-à-dire

$$(g\, d^3 \mu_0) \sin\alpha - (n\, d^3 \mu_0) \cos\alpha = 0.$$

Ceci revient, à cause de $g\, d\mu_0 = g\, d^2 \mu_0 = n\, d\mu_0 = n\, d^2 \mu_0 = 0$, à

$$(22) \qquad \left[dg . d\left(\frac{d\mu_0}{\chi}\right)\right] \sin\alpha - \left[dn . d\left(\frac{d\mu_0}{\chi}\right)\right] \cos\alpha = 0.$$

Or nous avons trouvé [équations (15) et (9)],

$$(23) \qquad g = h_1 \cos\omega - k_1 \sin\omega + Z \mu_0, \qquad Z = \frac{d\omega}{\chi},$$

$$(24) \qquad \frac{d\mu_0}{\chi} = h_1 \sin\omega + k_1 \cos\omega + T \mu_0, \qquad T = J \sin\omega - I \cos\omega;$$

et l'on tire de là facilement, en utilisant les formules (14),

$$(25) \qquad \frac{dg}{\chi} = W \mu_0 - \sin\omega \cos\omega . t,$$

où t est la sphère $t = A h_2 + B k_2$, tangente à la surface, introduite au n° **18**, et où l'on a posé

$$(25\ bis) \qquad W = TZ + \frac{dZ}{\chi} + I_1 \cos^2\omega - J_1 \sin^2\omega.$$

On trouve, de même,

$$(26) \qquad \frac{1}{\chi} d\left(\frac{d\mu_0}{\chi}\right) = S \mu_0 + T \frac{d\mu_0}{\chi} + Z g - A h_2 \sin^2\omega + B k_2 \cos^2\omega,$$

$$(26\ bis) \qquad S = -Z^2 + \frac{dT}{\chi} + (I_1 + J_1) \sin\omega \cos\omega.$$

Le calcul des crochets figurant dans (22) est, dès lors, immédiat, car on a

$$\mu_0^2 = 0, \quad \mu_0 d\mu_0 = 0, \quad \mu_0 g = 0, \quad \mu_0 t = 0, \quad \mu_0 h_2 = \frac{1}{A}, \quad \mu_0 k_2 = -\frac{1}{B},$$

$$g\, d\mu_0 = 0, \quad t\, d\mu_0 = 0, \quad gt = 0, \quad g h_2 = \frac{Z}{A}, \quad g k_2 = -\frac{Z}{B},$$

$$t h_2 = A, \quad t k_2 = B, \quad dg . d\mu_0 = 0.$$

Nous poserons (¹)

$$(27)\qquad P = -\frac{dn}{\chi}\frac{d}{\chi}\left(\frac{d\mu_0}{\chi}\right) = I\cos^3\omega + J\sin^3\omega + 3\sin\omega\cos\omega\frac{d\omega}{\chi},$$

$$(28)\qquad Q = -\frac{dg}{\chi}\frac{d}{\chi}\left(\frac{d\mu_0}{\chi}\right) = W + \sin\omega\cos\omega\,(B^2\cos^2\omega - A^2\sin^2\omega)$$

$$= \frac{1}{\chi}d\left(\frac{d\omega}{\chi}\right) + (J\sin\omega - I\cos\omega)\frac{d\omega}{\chi} + I_1\cos^2\omega - J_1\sin^2\omega$$
$$+ \sin\omega\cos\omega\,(B^2\cos^2\omega - A^2\sin^2\omega),$$

et la formule cherchée sera

$$(29)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{P}{Q}.$$

Elle se simplifie pour les lignes de courbure $\left(\omega = 0 \text{ et } \omega = \frac{\pi}{2}\right)$, et devient alors, respectivement,

$$(30)\qquad \operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{I}{I_1}, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\alpha_2 = -\frac{J}{J_1}.$$

Ces formules donnent une interprétation remarquable pour les invariants I_1 et J_1.

L'équation $P = 0$, du second ordre, définit les courbes dont la sphère osculatrice est constamment tangente à la surface.

44. Ayant la sphère osculatrice

$$r = -g\sin\alpha + n\cos\alpha,$$

et, par suite, sa dérivée

$$r_1 = g\cos x + n\sin\alpha,$$

puisque le cercle osculateur est l'intersection des sphères de courbure n et g, nous pouvons chercher les éléments invariants de la courbe prise en elle-même, tels que nous les avons considérés dans notre Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique* (2ᵉ série, 25ᵉ cahier). D'après le nº 21 *ter* de ce mémoire, la variable cano-

(¹) Aucune confusion n'est possible avec les quantités P et Q du nº 10.

nique σ de la courbe (¹) est définie par

$$d\sigma^2 = \pm\, dr_1\, d\left(\frac{d\mu}{\sqrt{d\mu^2}}\right),$$

μ étant le point courant et r_1 la dérivée de la sphère osculatrice. Nous avons donc à calculer

$$d\sigma^2 = \pm\, dr_1\, d\left(\frac{d\mu_0}{\chi}\right).$$

Les formules précédentes donnent immédiatement, $g.d\left(\frac{d\mu_0}{\chi}\right)$ et $n.d\,\frac{d\mu_0}{\chi}$ étant nuls,

$$d\sigma^2 = \pm\,\chi^2(\mathrm{P}\sin\alpha + \mathrm{Q}\cos\alpha) = \pm\,\chi^2\sqrt{\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}.$$

La formule qui donne la variable canonique est donc

$$d\sigma^2 = \sqrt{\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}\, d\mu_0^2. \tag{31}$$

Pour les lignes de courbure, elle donne

$$d\sigma_1 = \sqrt[4]{\mathrm{I}^2+\mathrm{I}_1^2}.\mathrm{U}\,du, \qquad d\sigma_2 = -\sqrt[4]{\mathrm{J}^2+\mathrm{J}_1^2}.\mathrm{V}\,dv. \tag{32}$$

44 *bis*. Calculons encore l'invariant du quatrième ordre, désigné par $\sqrt{\mathrm{J}}$ dans le Mémoire en question; c'est-à-dire, avec les notations actuelles,

$$\Pi = r_1\frac{dr}{d\sigma}. \tag{33}$$

On a

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{r_1}{d\sigma}(-r_1\,d\alpha - \sin\alpha.dg + \cos\alpha.dn)\\ &= \frac{1}{d\sigma}(-d\alpha + g\,dn\cos^2\alpha - n\,dg\sin^2\alpha)\\ &= \frac{1}{d\sigma}(-d\alpha - n\,dg);\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (17),

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}}\left(\sin\omega\cos\omega - \frac{d\alpha}{\chi}\right),$$

(¹) Elle est désignée par s dans le Mémoire.

ou, à cause de (29),

$$(34) \qquad \Pi = \frac{1}{\sqrt[4]{P^2+Q^2}}\left[\sin\omega\cos\omega + \frac{P\,dQ - Q\,dP}{\chi(P^2+Q^2)}\right].$$

Pour les lignes de courbure, on a, en particulier,

$$(35) \qquad \Pi_1 = \frac{I\,\mathfrak{U}(I_1) - I_1\,\mathfrak{U}(I)}{(I^2+I_1^2)^{\frac{5}{4}}}, \qquad \Pi_2 = -\frac{J\,\mathfrak{V}(J_1) - J_1\,\mathfrak{V}(J)}{(J^2+J_1^2)^{\frac{5}{4}}}.$$

On retrouverait immédiatement, par ces formules, la condition ($\Pi_1 = 0$ ou $\Pi_2 = 0$) pour que l'une des familles de lignes de courbure soit sphérique (n° 34, 5°).

45. On peut chercher à déduire, des formules trouvées aux paragraphes précédents, des *formes différentielles invariantes*. En se bornant aux formes quadratiques *rationnelles* les plus simples, on a, outre les formes qui se sont déjà introduites, à savoir

$$(36) \qquad d\mu_0^2 = dh^2 + dk^2 = U^2\,du^2 + V^2\,dv^2,$$

$$(37) \qquad dn^2 = dg^2 = (n\,dg)^2 = \frac{(UV\,du\,dv)^2}{U^2\,du^2 + V^2\,dv^2},$$

les deux formes

$$(38) \qquad dh_1^2 + dk_1^2 = A^2V^2\,dv^2 + 2(I_1 + J_1)UV\,du\,dv + B^2U^2\,du^2,$$

$$(39) \qquad dh_1\,dk_1 = -I_1U^2\,du^2 - J_1V^2\,dv^2,$$

dans lesquelles se présentent les invariants fondamentaux I_1, J_1, A et B.

Ces diverses formes peuvent se calculer, en partant d'un vecteur μ quelconque, pour représenter le point courant, et en se servant de coordonnées curvilignes u', v' quelconques.

Considérons d'abord, à cet effet, le vecteur n (*sphère de courbure normale*). Les conditions de contact et d'orthogonalité

$$n\mu = 0, \qquad n\frac{\partial\mu}{\partial u'} = 0, \qquad n\frac{\partial\mu}{\partial v'} = 0, \qquad n\,d^2\mu = 0$$

donnent

$$(40) \qquad n = \frac{1}{M}\left\{\mu \times \frac{\partial\mu}{\partial u'} \times \frac{\partial\mu}{\partial v'} \times \left[du'\,d\left(\frac{\partial\mu}{\partial u'}\right) + dv'\,d\left(\frac{\partial\mu}{\partial v'}\right)\right]\right\},$$

où le crochet-accolade est un produit vectoriel.

La condition $n^2 = 1$ donne, par application de la règle de multiplication des tableaux, qui donne M^2,

$$M = i\Delta^{\frac{1}{2}} d\mu^2, \tag{41}$$

en posant

$$d\mu^2 = E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2, \qquad \Delta = E'G' - F'^2. \tag{42}$$

On a utilisé, dans ce calcul, les identités

$$\mu^2 = 0, \quad \mu\frac{\partial\mu}{\partial u'} = 0, \quad \mu\frac{\partial\mu}{\partial v'} = 0, \quad \mu\frac{\partial^2\mu}{\partial u'^2} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial u'}\right)^2,$$
$$\mu\frac{\partial^2\mu}{\partial u'\,\partial v'} = -\frac{\partial\mu}{\partial u'}\frac{\partial\mu}{\partial v'}, \quad \mu\frac{\partial^2\mu}{\partial v'^2} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial v'}\right)^2,$$
$$E' = \left(\frac{\partial\mu}{\partial u'}\right)^2, \quad F' = \frac{\partial\mu}{\partial u'}\frac{\partial\mu}{\partial v'}, \quad G' = \left(\frac{\partial\mu}{\partial v'}\right)^2.$$

Pour calculer ensuite dn^2, je remarque qu'on a $n\,dn = 0$, $\mu\,dn = 0$, de sorte que dn est orthogonal à la surface au point considéré (puisque n est tangente); je pose donc

$$dn = \xi\frac{\partial\mu}{\partial u'} + \eta\frac{\partial\mu}{\partial v'} + \zeta\mu, \tag{43}$$

ξ, η, ζ étant des expressions de Pfaff, d'où

$$dn^2 = \xi^2 E' + 2\xi\eta F' + \eta^2 G'. \tag{44}$$

En différentiant les identités $n\frac{\partial\mu}{\partial u'} = 0$, $n\frac{\partial\mu}{\partial v'}$, j'ai

$$dn\frac{\partial\mu}{\partial u'} + n.d\frac{\partial\mu}{\partial u'} = 0, \qquad dn\frac{\partial\mu}{\partial v'} + n.d\frac{\partial\mu}{\partial v'} = 0,$$

donc

$$n.d\frac{\partial\mu}{\partial u'} + \xi E' + \eta F' = 0, \qquad n.d\frac{\partial\mu}{\partial v'} + \xi F' + \eta G' = 0, \tag{45}$$

ce qui permet d'écrire (44) sous la forme

$$dn^2 + \xi\, n.d\frac{\partial\mu}{\partial u'} + \eta\, n.d\frac{\partial\mu}{\partial v'} = 0. \tag{46}$$

L'élimination de ξ, η entre les équations (45) et (46) donne alors

$$\begin{vmatrix} n.d\frac{\partial\mu}{\partial u'} & E' & F' \\ n.d\frac{\partial\mu}{\partial v'} & F' & G' \\ dn^2 & n.d\frac{\partial\mu}{\partial u'} & n.d\frac{\partial\mu}{\partial v'} \end{vmatrix} = 0. \tag{47}$$

Or, la formule (40) donne, en introduisant la forme différentielle quadratique

$$(48) \qquad \Psi = \left| \mu \times \frac{\partial\mu}{\partial u'} \times \frac{\partial\mu}{\partial v'} \times d\frac{\partial\mu}{\partial u'} \times d\frac{\partial\mu}{\partial v'} \right|,$$

produit extérieur des cinq vecteurs (c'est-à-dire déterminant des coordonnées),

$$(49) \qquad n.d\frac{\partial\mu}{\partial u'} = -\frac{\Psi}{M}dv', \qquad n.d\frac{\partial\mu}{\partial v'} = \frac{\Psi}{M}du'.$$

L'identité (47) donne ainsi

$$dn^2 = \frac{\Psi^2}{\Delta M^2}d\mu^2,$$

c'est-à-dire

$$(50) \qquad dn^2 = -\frac{\Psi^2}{\Delta^2\, d\mu^2}.$$

L'équation $\Psi = 0$ est, d'après cela, l'équation différentielle des lignes de courbure, ainsi qu'il est bien connu.

46. Les formules précédentes permettent le calcul de h et de k, et, par suite, [d'après (36) et (37)], celui des formes de Pfaff invariantes $U\,du$, $V\,dv$. L'identité (1) donnant alors $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$, toute notre théorie s'applique sans difficulté.

En ce qui concerne la forme $d\mu_0^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2$, on peut l'obtenir plus directement.

Désignons par D le discriminant de la forme quadratique Ψ. Si l'on effectue un changement de variables sur u' et v', Δ est multiplié par le carré du déterminant fonctionnel de la transformation, la forme Ψ est multipliée par le carré de ce déterminant, de sorte que D est multiplié par la sixième puissance (car il faut aussi tenir compte de la modification des coefficients, et de la transformation en du', dv'); donc $\frac{D}{\Delta^3}$ reste invariant.

Si d'autre part on multiplie μ par un facteur scalaire R, $d\mu^2$ se multiplie par R^2, et Ψ par R^5; de sorte que Δ est multiplié par R^4, D par R^{10}, et $\frac{D}{\Delta^3}$ par R^{-2}.

Or dans le cas des formes canoniques (36), (37), on a $\Delta = U^2V^2$, donc, à cause de (50), $\Psi = iU^3V^3\,du\,dv$, donc $D = -U^6V^6$, et $\frac{D}{\Delta^3} = -1$. Donc si l'on pose $\mu_0 = R\mu$, on a, pour déterminer R, la condition

$$R^{-2}\frac{D}{\Delta^3} = -1.$$

On en conclut la formule (¹)

$$\mu_0 = \sqrt{-\frac{D}{\Delta^3}} \cdot \mu \tag{51}$$

et

$$d\mu_0^2 = -\frac{D}{\Delta^3}\, d\mu^2. \tag{52}$$

47. Il me reste à indiquer comment on peut trouver la *sphère de courbure géodésique* g; car on aura alors h_1 et k_1 sans passer par l'intermédiaire de h et k. La méthode à suivre a été donnée dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, p. 160. Voici le calcul.

Je supprime, pour simplifier l'écriture, les accents introduits au n° **45**. Donc u et v seront des coordonnées curvilignes quelconques, et l'on posera

$$d\mu^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2, \qquad \Delta = EG - F^2. \tag{53}$$

Je désignerai par Φ la forme $d\mu^2$, et par Φ_1 et Φ_2 les demi-dérivées $\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial(du)}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial(dv)}$. Alors on peut poser

$$g = c + Z\mu, \tag{54}$$

où

$$c = \frac{-\Phi_2\mu'_u + \Phi_1\mu'_v}{\sqrt{\Delta\Phi}} = \frac{-(F\, du + G\, dv)\,\mu'_u + (E\, du + F\, dv)\,\mu'_v}{\sqrt{\Delta(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)}} \tag{55}$$

est une sphère normale à la surface et tangente à la courbe au point considéré; car on a $c\, d\mu = 0$, $c^2 = 1$. Le facteur Z se détermine par la condition $g\, d^2\mu = 0$; ce qui s'écrit

$$Z\Phi = c\, d^2\mu, \tag{56}$$

car $\mu\, d\mu = 0$ donne $\mu\, d^2\mu = -d\mu^2$.

(¹) On reconnait par là que la manière dont nous avons été conduits à *normer* μ est la même qu'a adoptée M. Thomsen (*Thèse*, p. 7).

On a ensuite

$$\mu'_u\, d^2\mu = \mathrm{E}\, d^2 u + \mathrm{F}\, d^2 v + \mu'_u \mu''_{u^2}\, du^2 + 2\mu'_u \mu''_{uv}\, du\, dv + \mu'_u \mu''_{v^2}\, dv^2,$$
$$\mu'_v\, d^2\mu = \mathrm{F}\, d^2 u + \mathrm{G}\, d^2 v + \mu'_u \mu''_{u^2}\, du^2 + 2\mu'_v \mu''_{uv}\, du\, dv + \mu'_v \mu''_{v^2}\, dv^2;$$

puis

$$(57)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \mu'_u \mu''_{u^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}, & \mu'_u \mu''_{uv} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, & \mu'_v \mu''_{uv} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, \\ \mu'_v \mu''_{v^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}, & \mu'_u \mu''_{v^2} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, & \mu'_v \mu''_{u^2} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \end{array} \right.$$

et, par conséquent,

$$(58)\quad \mathrm{Z}\sqrt{\Delta}(d\mu^2)^{\frac{3}{2}} = \Delta(du\, d^2 v - dv\, d^2 u)$$
$$+ \begin{vmatrix} \mathrm{E}\, du + \mathrm{F}\, dv & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} du^2 + \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} du\, dv + \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right) dv^2 \\ \mathrm{F}\, du + \mathrm{G}\, dv & \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right) du^2 + \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} du\, dv + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} dv^2 \end{vmatrix}$$

Si l'on multiplie les deux membres de (54) par $2j$, *dans l'hypothèse où* μ *est défini en coordonnées cartésiennes* (n^{os} **6** et **7**) ; on a $2j\mu = 1$, donc $2j\mu'_u = 2j\mu'_v = 0$, et $2jc = 0$; d'où $2jg = \mathrm{Z}$. Le facteur Z est, dans ce cas, la courbure géodésique, et comme $d\mu^2$ est alors égal à ds^2, la formule (57) se réduit à une formule classique. On remarquera que c représente alors le plan normal à la surface mené par la tangente à la courbe.

VII. — L'ÉQUATION DE LAPLACE.

48. Les cinq coordonnées pentasphériques du point μ de la surface satisfont à l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} z & z'_u & z'_v & z''_{u^2} & z''_{uv} & z''_{v^2} \\ [\mu & \mu'_u & \mu'_v & \mu''_{u^2} & \mu''_{uv} & \mu''_{v^2}] \end{vmatrix} = 0,$$

dont le premier membre est un déterminant, la ligne écrite entre crochets devant être remplacée par le tableau obtenu en y remplaçant successivement μ par ses cinq coordonnées μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5.

On peut prendre cette équation comme point de départ pour l'étude (conforme) de la surface, comme j'ai pris une équation différentielle linéaire ordinaire du cinquième ordre comme point de départ pour l'étude (conforme) des courbes gauches et des enveloppes de sphères dans mon Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique*. Cette équation (1) appartient à une classe spéciale d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, car elle admet cinq solutions μ_h, liées par la relation

$$\sum_{h=1}^{5} \mu_h^2 = 0.$$

L'équation des caractéristiques

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ [\mu & \mu'_u & \mu'_v & \mu''_{u^2} & \mu''_{uv} & \mu''_{v^2}] \end{vmatrix} = 0$$

se ramène, par des combinaisons de colonnes, à

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -du\,dv & 0 \\ [\mu & \mu'_u & \mu'_v & d\mu'_u & \mu''_{uv} & d\mu'_v] \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire, avec la notation (48) du n° 45, à $\Psi = 0$. Elle définit donc les lignes de courbure de la surface.

Donc, la condition pour que l'équation (1) ait la forme de Laplace,

$$(2) \qquad z''_{uv} + \mathbf{a} z'_u + \mathbf{b} z'_v + \mathbf{c} z = 0,$$

est que la surface soit rapportée à ses lignes de courbure (¹). C'est ce que nous supposerons. Les coefficients **a**, **b**, **c** seront donc définis par l'identité

$$(3) \qquad \mu''_{uv} + \mathbf{a}\mu'_u + \mathbf{b}\mu'_v + \mathbf{c}\mu = 0.$$

Si l'on pose, en tenant compte de $\mu'_u \mu'_v = 0$,

$$(4) \qquad d\mu^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

on trouve, en multipliant (3) par μ'_u et μ'_v,

$$(5) \qquad \mathbf{a} = -\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}, \qquad \mathbf{b} = -\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}.$$

49. Les *sphères de courbure géodésique principales*, h_1 et k_1,

---

(¹) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. 1, 2ᵉ édition. p. 273.

s'obtiennent ici bien facilement. On peut poser

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \mu'_v + Z\mu,$$

et Z se détermine par la condition $h_1 \mu''_{u^2} = 0$. Mais l'on a

$$\mu\mu'_u = 0,$$

donc

$$\mu\mu''_{u^2} = -\mu'^2_u = -E,$$

et, d'après (57), n° 47,

$$\mu'_v \mu''_{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v};$$

de là

$$Z = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{G}},$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}(\mu'_v + \mathbf{a}\mu), \qquad k_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}(\mu'_u + \mathbf{b}\mu).$$

On voit donc que h_1 et k_1 *se déduisent de* μ *par les deux transformations de Laplace.*

Pour h_2 et k_2, on a les formules

$$(7) \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{S}}\frac{\partial h_1}{\partial v}, \qquad k_2 = \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial k_1}{\partial u},$$

où interviennent les formations nouvelles

$$(8) \qquad S = \left(\frac{\partial h_1}{\partial v}\right)^2, \qquad T = \left(\frac{\partial k_1}{\partial u}\right)^2.$$

On trouve ensuite, sans difficulté, en opérant comme au n° 17,

$$(9) \qquad l = \frac{i}{\sqrt{\frac{E}{T} + \frac{G}{S}}}\left(\mu + \sqrt{\frac{G}{S}}\, h_2 + \sqrt{\frac{E}{T}}\, k_2\right).$$

Il est ici commode d'introduire l'invariant

$$(10) \qquad R = \frac{ES}{GT},$$

ce qui permet d'écrire

$$(11) \qquad \mu = -\sqrt{\frac{G}{S}}\left(h_2 + \sqrt{R}.\, k_2 + i\sqrt{1+R}.\, l\right),$$

$$(12) \qquad h = \frac{1}{\sqrt{R}}\left(\sqrt{1+R}.\, h_2 + il\right), \qquad k = -\sqrt{1+R}.\, k_2 - i\sqrt{R}.\, l.$$

50. Les *formules de variation du pentasphère* II s'obtiennent

sans difficulté. On trouve d'abord, par un calcul direct,

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} = \frac{\mathbf{h}\mu}{\sqrt{\mathrm{G}}}, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial v} = \frac{\mathbf{k}\mu}{\sqrt{\mathrm{E}}}, \tag{13}$$

où $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$ sont les invariants (au sens de Darboux) de l'équation (2)

$$\mathbf{h} = \mathbf{a}'_u + \mathbf{ab} - \mathbf{c}, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{b}'_v + \mathbf{ab} - \mathbf{c}. \tag{14}$$

On a, d'autre part, les identités, résultant de (6) et (13)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial u} = -\mathbf{h}'_v + \mathbf{h}\left(\mathbf{a} + \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial v}\right), \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} = -\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}\left(\mathbf{b} + \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u}\right). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Les produits scalaires de h_1, h_2, k_1, h_2, l par leurs dérivées

$$\frac{\partial h_1}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial l}{\partial u}, \quad \frac{\partial h_1}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial l}{\partial v}$$

se calculent ensuite, en tenant compte des formules du numéro précédent, de (13) et de (15).

Voici les formules qu'on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial u} &= \frac{-\mathbf{h}}{\sqrt{\mathrm{S}}}\left(h_2 + \sqrt{\mathrm{R}}.k_2 + i\sqrt{1+\mathrm{R}}.l\right), \\ \frac{\partial k_1}{\partial u} &= \sqrt{\mathrm{T}}.k_2, \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} &= \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{\mathrm{S}}}h_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{S}}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{R}}.k_2 + i\sqrt{1+\mathrm{R}}.l\right), \\ \frac{\partial k_2}{\partial u} &= \frac{\mathbf{h}\sqrt{\mathrm{R}}}{\sqrt{\mathrm{S}}}h_1 - \sqrt{\mathrm{T}}.k_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{S}}{\partial u}\sqrt{\mathrm{R}}.h_2 - \frac{i}{2}\frac{\sqrt{\mathrm{R}}}{\sqrt{1+\mathrm{R}}}\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u}l, \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= i\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{\mathrm{S}}}\sqrt{1+\mathrm{R}}.h_1 - \frac{i}{2}\frac{\partial \log \mathrm{S}}{\partial u}\sqrt{1+\mathrm{R}}.h_2 + \frac{i}{2}\frac{\sqrt{\mathrm{R}}}{\sqrt{1+\mathrm{R}}}\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u}k_2. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial v} &= \sqrt{\mathrm{S}}.h_2, \\ \frac{\partial k_1}{\partial v} &= -\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\mathrm{T}}\sqrt{\mathrm{R}}}\left(h_2 + \sqrt{\mathrm{R}}.k_2 + i\sqrt{1+\mathrm{R}}.l\right), \\ \frac{\partial h_2}{\partial v} &= -\sqrt{\mathrm{S}}.h_1 + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\mathrm{T}}\sqrt{\mathrm{R}}}k_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{T}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}k_2 + \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{R}}}\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v}l, \\ \frac{\partial k_2}{\partial v} &= \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\mathrm{T}}}k_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{T}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\left(h_2 + i\sqrt{1+\mathrm{R}}.l\right), \\ \frac{\partial l}{\partial v} &= i\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\mathrm{T}}}\frac{\sqrt{1+\mathrm{R}}}{\sqrt{\mathrm{R}}}k_1 - \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{R}}}\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v}h_2 - \frac{i}{2}\frac{\partial \log \mathrm{T}}{\partial v}\frac{\sqrt{1+\mathrm{R}}}{\sqrt{\mathrm{R}}}k_2. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

51. Les *conditions d'intégrabilité* de ce système se calculent sans difficulté. On trouve, d'abord, les équations (15), qui, écrites en tenant compte de (5) et de (10), prennent la forme

$$(18)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial u} = \mathbf{h}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\mathbf{h}}\sqrt{\frac{S}{TR}}\right), \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial v} = \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{TR}{S}}\right).$$

On trouve, d'autre part, les deux équations nouvelles :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{1+R}}\frac{\partial \log R}{\partial v}\right) + \frac{1}{4\sqrt{1+R}}\frac{\partial \log T}{\partial v}\frac{\partial \log R}{\partial u} \\ = {} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{1+R}\,\frac{\partial \log S}{\partial u}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{1+R}\,\frac{\partial \log S}{\partial u}\frac{\partial \log T}{\partial v} + \mathbf{h}\sqrt{1+R},\end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1+R}}\frac{\partial \log R}{\partial u}\right) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1+R}}\frac{\partial \log S}{\partial u}\frac{\partial \log R}{\partial v} \\ = {} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{1+R}}{\sqrt{R}}\frac{\partial \log T}{\partial v}\right) + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1+R}}{\sqrt{R}}\frac{\partial \log T}{\partial v}\frac{\partial \log S}{\partial u} + \mathbf{k}\frac{\sqrt{1+R}}{\sqrt{R}},\end{aligned}\right.$$

et une combinaison de ces deux équations, à savoir :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial \log T}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{R}\frac{\partial \log S}{\partial u}\right) + \frac{1+R}{4\sqrt{R}}\frac{\partial \log S}{\partial u}\frac{\partial \log T}{\partial v} \\ &\qquad + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{R}}{1+R}\frac{\partial \log R}{\partial u}\frac{\partial \log R}{\partial v} + \mathbf{h}\sqrt{R} + \mathbf{k}\frac{1}{\sqrt{R}} = 0.\end{aligned}\right.$$

A ces équations il faut joindre encore celle qu'on obtient en éliminant $\mathbf{c}$ entre les équations (14). En tenant compte de (5), c'est

$$(22)\qquad \mathbf{h} - \mathbf{k} = \frac{\partial^2 \log\sqrt{\frac{G}{E}}}{\partial u\,\partial v},$$

ou, d'après (10),

$$(23)\qquad \mathbf{h} - \mathbf{k} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \log\left(\frac{S}{TR}\right)}{\partial u\,\partial v}.$$

On remarquera que l'élimination de $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$ serait facile et fournirait un système de trois équations aux dérivées partielles en R, S, T.

A toute solution de ce système correspondra une famille et une seule de surfaces équivalentes les unes aux autres vis-à-vis du groupe conforme. La recherche de ces surfaces se ferait par l'intégration du système (16), (17), complètement intégrable, laquelle se ramène à celle d'une équation de Lie unique ayant pour groupe associé le groupe orthogonal à cinq variables.

Ce système intégré, on aura h et k par les formules (12), et la surface par la formule

$$\mu_0 = k - h. \tag{24}$$

A cette famille de surfaces correspond, de plus, une même famille d'équations de Laplace (2), équivalentes vis-à-vis du groupe

$$\bar{z} = z.\chi(u, v) \qquad (\chi \text{ fonction arbitraire}). \tag{25}$$

Cette famille d'équations est définie par les invariants $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$, tirés des formules (19) et (20). Celle des équations de cette famille qui fournirait μ_0 est, comme on le déduirait des formules précédentes par un calcul que j'omets pour abréger,

$$z''_{uv} + \mathbf{a}_0 z'_u + \mathbf{b}_0 z'_v + (-\mathbf{h} - \mathbf{k} + 2\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0)z = 0, \tag{26}$$

avec

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log\left[\left(1 + \frac{1}{R}\right)S\right]}{\partial u}, \qquad \mathbf{b}_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log[(1 + R)T]}{\partial v}. \tag{27}$$

Ce résultat est, du reste, une conséquence plus facile des comparaisons que nous ferons plus loin avec la méthode des paragraphes précédents (*cf.* n° 54).

52. Il y aurait lieu d'étudier le problème suivant :

Étant donnée une équation de Laplace (2), *reconnaître si elle admet cinq solutions* z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 *liées par la relation quadratique*

$$\sum_{\alpha=1}^{5} z_\alpha^2 = 0,$$

et, dans ce cas, trouver ces solutions.

Cela revient à supposer que, dans les équations (18), (19), (20), (23), $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$ sont des fonctions de u et v données; et tout revient à examiner si ce système en R, S, T, qui est maintenant surabondant, a des solutions. Pour chacune de ces solutions, la recherche des z_α dépendra encore de l'intégration du système de Lie (16), (17). Ces z_α sont, en effet, les coordonnées de μ, donné par la formule (11), où l'on connaîtra, par l'intégration du système de Lie, h_2, k_2 et l. Tout reviendra donc à calculer le facteur $\sqrt{\frac{G}{S}}$.

Or les équations (5) donneront, par deux quadratures,

$$E = E_0\varphi(u), \qquad G = G_0\psi(v), \tag{28}$$

E_0 et G_0 étant des fonctions déterminées, et $\varphi(u)$ et $\psi(v)$ étant à trouver. Mais ceci se fera en portant ces valeurs (28) dans la formule (10), où R, S et T sont supposées connues. Le calcul des z_α sera, dès lors, achevé.

Quant à la discussion du système en R, S, T, elle paraît difficile ([1]). Nous ferons seulement, à cet égard, les remarques suivantes. Les formules (18) peuvent fournir les deux dérivées $\frac{\partial R}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$, qui, portées dans (19), (20), ou (21), donneront R. On sera ramené ainsi à des équations en S et T seuls.

Observons, d'autre part, que $\sqrt{\frac{S}{TR}}$ peut s'éliminer directement au moyen de (18) et (23), qui donnent deux équations, du second ordre seulement, en S et T :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2\mathbf{h}}\frac{\partial S}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2\mathbf{k}}\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 \log(\mathbf{h}\,\mathbf{k})}{\partial u\,\partial v} = 0, \tag{29}$$

$$\mathbf{h} - \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2\mathbf{h}}\frac{\partial S}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 \log \mathbf{h}}{\partial u\,\partial v} = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2\mathbf{k}}\frac{\partial T}{\partial v}\right) - \frac{\partial^2 \log \mathbf{k}}{\partial u\,\partial v}. \tag{30}$$

53. *L'équation de Laplace qui correspond à* μ_0 se déduit, comme il suit, des formules du n° 22. On a

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mu_0 = \mathfrak{U}\mathfrak{V}k - \mathfrak{U}\mathfrak{V}h = \mathfrak{U}\mathfrak{V}k - \mathfrak{U}h_1 = \mathfrak{U}\mathfrak{V}k - I_1\mu_0); \tag{31}$$

puis, en utilisant la formule (4) du n° 27,

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}\mathfrak{V}k &= \mathfrak{V}\mathfrak{U}k + I\,\mathfrak{V}k - J\,\mathfrak{U}k = \mathfrak{V}k_1 - IJ\mu_0 - J\,\mathfrak{U}k\\ &= -J_1\mu_0 - IJ\mu_0 - J\,\mathfrak{U}(h+\mu_0)\\ &= -(J_1 + 2IJ)\mu_0 - J\,\mathfrak{U}\mu_0.\end{aligned}$$

([1]) Nous indiquerons au n° 55 une autre manière d'aborder le problème, en se servant des résultats des paragraphes III, IV et V, et nous pourrons ainsi pousser la discussion plus loin.

Donc (31) donne

$$(32)\qquad \mathfrak{U}\mathfrak{V}\mu_0 + \mathrm{J}\,\mathfrak{U}\mu_0 + (\mathrm{I}_1 + \mathrm{J}_1 + 2\mathrm{I}\mathrm{J})\mu_0 = 0.$$

Or on a

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mu_0 = \frac{1}{\mathrm{U}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{V}}\frac{\partial\mu_0}{\partial v}\right) = \frac{1}{\mathrm{UV}}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\mathrm{UV}^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\frac{\partial\mu_0}{\partial v},$$

c'est-à-dire, d'après l'expression de I [équation (3), n° 27],

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mu_0 = \frac{1}{\mathrm{UV}}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{I}\mathfrak{V}\mu_0.$$

En portant cette valeur dans (32), on voit que μ_0 satisfait à l'équation de Laplace, qu'il s'agissait de former,

$$(33)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{JV}\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{IU}\frac{\partial z}{\partial v} + (\mathrm{I}_1 + \mathrm{J}_1 + 2\mathrm{IJ})\,\mathrm{UV}\,z = 0.$$

L'invariant **h**, par exemple, est donc, d'après (14),

$$\mathbf{h} = \frac{\partial(\mathrm{JV})}{\partial u} - (\mathrm{I}_1 + \mathrm{J}_1 + \mathrm{IJ})\,\mathrm{UV}.$$

Or on a, d'après les formules du n° 27,

$$\frac{\partial(\mathrm{JV})}{\partial u} = \mathrm{UV}.\mathfrak{U}\mathrm{J} - \mathrm{J}(\mathrm{IUV}) = (\mathrm{J}_1 + \mathrm{IJ})\,\mathrm{UV}.$$

On conclut donc les formules pour les invariants de Darboux :

$$(34)\qquad \mathbf{h} = -\mathrm{I}_1\mathrm{UV},\qquad \mathbf{k} = -\mathrm{J}_1\mathrm{UV}.$$

Je remarque d'autre part que, en tenant compte de la définition de I_1 et J_1 [équation (5), n° 27], l'équation (33) s'écrit plus simplement

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial(\mathrm{JV}z)}{\partial u} + \frac{\partial(\mathrm{IU}z)}{\partial v} = 0,$$

de sorte que son adjointe est

$$(36)\qquad \frac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial v} - \mathrm{JV}\frac{\partial t}{\partial u} - \mathrm{IU}\frac{\partial t}{\partial v} = 0$$

Cette adjointe a donc la solution $t = \text{const}$. Or au changement de fonction

$$(37)\qquad \bar{z} = \lambda z$$

dans une équation de Laplace correspond le changement inverse

$$t = \lambda \bar{t} \tag{38}$$

dans son adjointe. Nous concluons donc que si le vecteur μ qui a fourni l'équation de Laplace (2), supposée donnée, est lié au vecteur canonique $\mu_0 = k - h$ par la formule

$$\mu_0 = M\,\mu, \tag{39}$$

le facteur M est une solution de l'adjointe de (2).

54. Pour rattacher les fonctions E, G, R, S, T aux fonctions U, V et aux invariants fondamentaux, nous comparerons les formules (7) et (12) aux formules (20) et (30) du paragraphe III. Cela donne

$$\sqrt{S} = AV, \qquad \sqrt{T} = BU, \qquad \sqrt{R} = -\frac{A}{B}, \qquad \sqrt{1+R} = \frac{1}{B}. \tag{40}$$

On voit donc que R est lié à l'invariant θ par les formules simples

$$R = \cot^2\theta, \qquad \sqrt{R} = -\cot\theta, \qquad \sqrt{1+R} = \frac{1}{\sin\theta}. \tag{41}$$

On conclut de là

$$U = \sqrt{1+R}\,\sqrt{T}, \qquad V = -\frac{\sqrt{1+R}}{\sqrt{R}}\sqrt{S}, \tag{42}$$

ce qui montre l'identité des équations (26) et (33).

On a encore, à cause de (10), et en comparant (9) avec l'équation (25) du n° 17,

$$\frac{E}{G} = \frac{U^2}{V^2}, \qquad M = \frac{\sqrt{1+R}\,\sqrt{S}}{\sqrt{R}\,\sqrt{G}} = \sqrt{1+R}\,\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{E}}, \tag{43}$$

d'où

$$U = M\sqrt{E}, \qquad V = -M\sqrt{G}. \tag{44}$$

Observons que, si l'équation (2) correspond aux coordonnées pentasphériques *cartésiennes*, c'est-à-dire si elle admet comme solutions les coordonnées rectangulaires du point courant de la surface, on a $\mathbf{c} = 0$, comme il est bien connu (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. 1, p. 259). On voit, de plus, en comparant les formules (44) aux formules (1) du n° 27, que $M = K - H$. Donc, dans ce cas, $K - H$ est solution de l'adjointe de (2).

55. Je reviens maintenant au problème du n° 52. Rattachée à la théorie des invariants développée aux paragraphes III, IV et V, la solution se présente sous la forme suivante.

Les invariants $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$ étant les données de la question, on cherchera à déterminer U et V. Ces fonctions sont définies par les équations (34), qui s'écrivent, en tenant compte des formules du n° 27,

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log V}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \log U}{\partial v} \frac{\partial \log V}{\partial u} = \mathbf{h}, \\ &\frac{\partial^2 \log U}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \log U}{\partial v} \frac{\partial \log V}{\partial u} = \mathbf{k}, \end{aligned} \right.$$

et par les équations aux dérivées partielles trouvées aux n^os 29 et 30.

Il y aura deux cas à considérer suivant que $\mathbf{h}$ est, ou non, identique à $\mathbf{k}$. Comme on déduit de (45), par soustraction,

$$(46) \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{V}{U}}{\partial u\, \partial v} = \mathbf{h} - \mathbf{k},$$

on aura seulement à adjoindre aux équations (45), dans le cas des surfaces isothermiques ($\mathbf{h} = \mathbf{k}$), l'équation (19) du n° 30. Dans le cas général ($\mathbf{h} \neq \mathbf{k}$), il faudra leur adjoindre les deux équations trouvées au n° 29.

Une fois U et V calculés, la détermination de μ_0 se fera en intégrant les systèmes de Lie du paragraphe IV ([1]).

Il restera encore à calculer M. Or, la transformation $z = \mathrm{M} z$ changeant l'équation donnée (2) en (33), on aura

$$(47) \qquad \frac{\mathrm{M}'_u}{\mathrm{M}} + \mathrm{I}\,\mathrm{U} = \mathbf{b}, \qquad \frac{\mathrm{M}'_v}{\mathrm{M}} + \mathrm{J}\,\mathrm{V} = \mathbf{a},$$

de sorte que M sera donné, à un facteur constant arbitraire près que la solution comporte, par une quadrature de différentielle totale. Rappelons que

$$(48) \qquad \mathrm{IU} = -\frac{\partial \log V}{\partial u}, \qquad \mathrm{JV} = -\frac{\partial \log U}{\partial v}.$$

L'équation (46), où $\mathbf{h} - \mathbf{k} = \mathbf{a}'_u - \mathbf{b}'_v$, exprime précisément que

---

([1]) Dans le cas $\mathbf{h} = \mathbf{k}$, une quadrature doit donner, auparavant, la valeur de l'invariant θ (*cf.* n° 30).

la différentielle en question

$$(49) \qquad dM = \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \log V}{\partial u}\right) du + \left(\mathbf{a} + \frac{\partial \log U}{\partial v}\right) dv$$

est bien intégrable.

56. Toute la difficulté réside dans l'étude du système en U, V. Récrivons donc les équations (14) et (14 *bis*) du n° 28 et l'équation (15) du n° 29. En tenant compte de (34), les premières deviennent

$$(50) \qquad \frac{\partial C}{\partial u} + (2C+1)\frac{\partial \log V}{\partial u} + \frac{2}{UV}\left(\mathbf{h}\frac{U}{V}\right)'_v = 0,$$

$$(50\ bis) \qquad \frac{\partial C}{\partial v} + (2C-1)\frac{\partial \log U}{\partial v} - \frac{2}{UV}\left(\mathbf{k}\frac{V}{U}\right)'_u = 0;$$

et, en ayant égard à (45) et (46), l'équation en C prend la forme

$$(51) \qquad 2C(\mathbf{k}-\mathbf{h}) = \frac{2}{U^2}\left[\frac{U}{V}\left(\mathbf{h}\frac{U}{V}\right)'_v\right]'_v + \frac{2}{V^2}\left[\frac{V}{U}\left(\mathbf{k}\frac{V}{U}\right)'_u\right]'_u + 2\frac{\partial \log V}{\partial u}\frac{\partial \log U}{\partial v} + \mathbf{h} + \mathbf{k}.$$

Ceci conduit à prendre pour inconnues $\frac{V}{U} = W$, et U; car W doit satisfaire, d'autre part, à l'équation (46), c'est-à-dire

$$(52) \qquad \frac{\partial^2 \log W}{\partial u\, \partial v} = \mathbf{h} - \mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{k} \neq \mathbf{h}$, on aura d'abord, en considérant W comme connu, les expressions des trois dérivées secondes de log U, au moyen de la seconde des équations (45) et des équations (50) et (50 *bis*), où l'on aura porté la valeur de C tirée de (51) : ces expressions dépendront de U et de ses dérivées premières $\frac{\partial U}{\partial u}$, $\frac{\partial U}{\partial v}$; de W et de ses dérivées premières et secondes. On éliminera ensuite U par différentiations, et les équations en W obtenues, jointes à (52), détermineront W.

Il est naturel de penser que ces opérations fourniront en général un système de valeurs unique (ou un nombre limité) pour W et U; elles donneront de plus les relations auxquelles $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$ doivent satisfaire pour que l'équation (2) possède la propriété en question.

D'après (52), W dépendrait au plus de deux fonctions arbitraires $\varphi(u)$, $\psi(v)$; car, par une double quadrature, cette équation donnerait W sous la forme

$$W = W_0\,\varphi(u)\,\psi(v).$$

Si cette quadrature peut s'effectuer, on pourra porter cette valeur dans les expressions des dérivées secondes de $\log U$, considérées ci-dessus; et, d'après ces expressions, U dépendra au plus de trois constantes arbitraires, en outre des fonctions φ et ψ. Mais les conditions d'intégrabilité ramèneront à des équations d'ordre moindre en U, et permettront en général, de proche en proche, le calcul effectif de U sans intégration, et la détermination de φ et ψ.

57. Dans l'hypothèse $\mathbf{k} = \mathbf{h}$, l'équation (52) donne

$$W = \varphi(u)\,\psi(v), \tag{53}$$

et (51) donne le produit $\frac{\partial \log U}{\partial u}\,\frac{\partial \log U}{\partial v}$. Comme la seconde équation (45) donne $\frac{\partial^2 \log U}{\partial u\,\partial v}$, on a encore les trois dérivées secondes de $\log U$. Les conditions d'intégrabilité donnent une équation nouvelle du premier ordre en U. On a ainsi $\frac{\partial U}{\partial u}$ et $\frac{\partial U}{\partial v}$ en fonction de U; et, en différentiant à nouveau, on obtiendra l'expression de U. En exprimant qu'elle satisfait effectivement aux équations différentielles précédemment trouvées, on arrivera à déterminer $\varphi(u)$ et $\psi(v)$.

Ici encore, le calcul fournira aussi, en définitive, les conditions que $\mathbf{h}$ doit remplir pour que le problème soit possible.

Remarquons enfin que les équations (45) se réduisent dans ce cas à une équation très simple en $U\varphi(u)$, à savoir

$$\frac{\partial^2(\varphi U)}{\partial u\,\partial v} = \mathbf{h}(\varphi U). \tag{54}$$

C'est donc cette inconnue (φU) qu'il conviendra de substituer à U dans les calculs.

Pour le cas $W = -1$, on aurait le système simple

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v} = \mathbf{h}U, \qquad \Delta\mathbf{h} + \frac{\partial U}{\partial u}\,\frac{\partial U}{\partial v} + \mathbf{h}U^2 = 0, \tag{55}$$

qui, par élimination de $\mathbf{h}$, redonnerait l'équation de Rothe et Calapso [n° 30, équation (21)].